

Números e funções reais

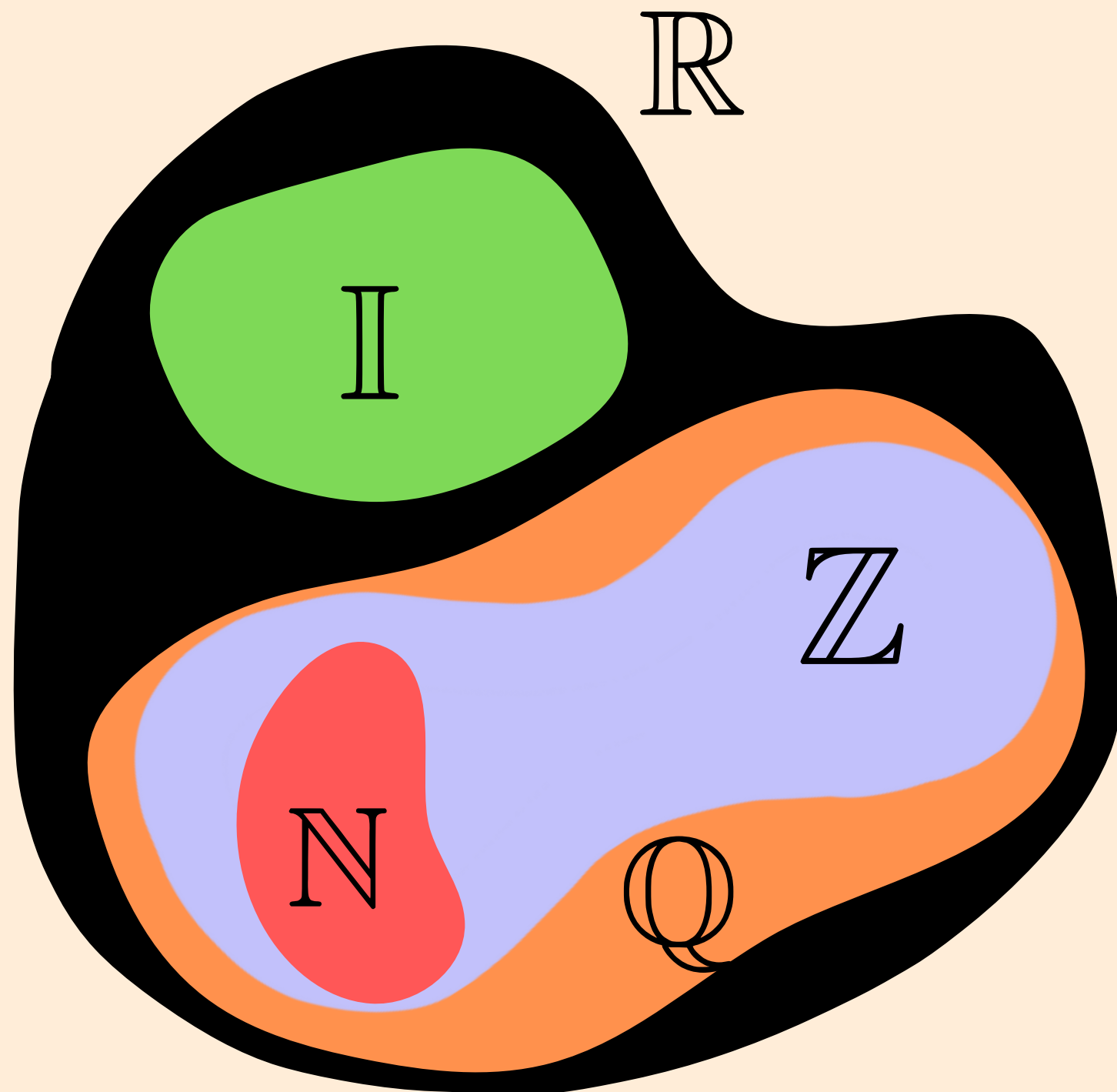
<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1>

Referências:

- THOMAS, George B. Cálculo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. Um curso de cálculo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

$f(x)$

Números reais



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\left\{ \frac{a}{b}, b \neq 0 \text{ e } a \in \mathbb{Z} \right\} \in \mathbb{Q}$$

Números reais

- Duas operações são definidas

Adição

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \longrightarrow (x + y) \in \mathbb{R}$$

Multiplicação

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \longrightarrow (x \cdot y) \in \mathbb{R}$$

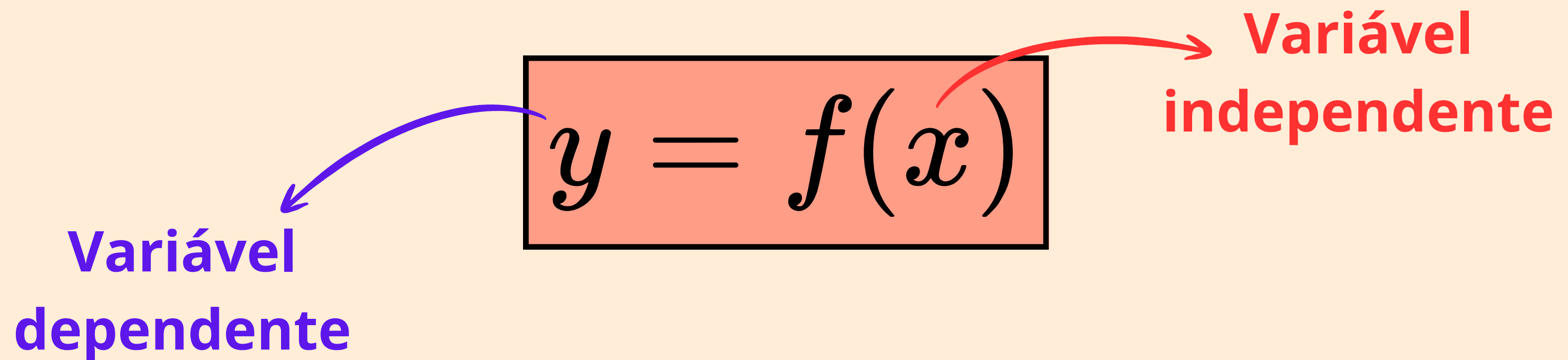
Funções reais

- O valor de uma variável depende do valor de outra
- A relação entre esses valores é dada por uma regra ou fórmula

$$y = f(x)$$

Funções reais

- O valor de uma variável depende do valor de outra
- A relação entre esses valores é dada por uma regra ou fórmula

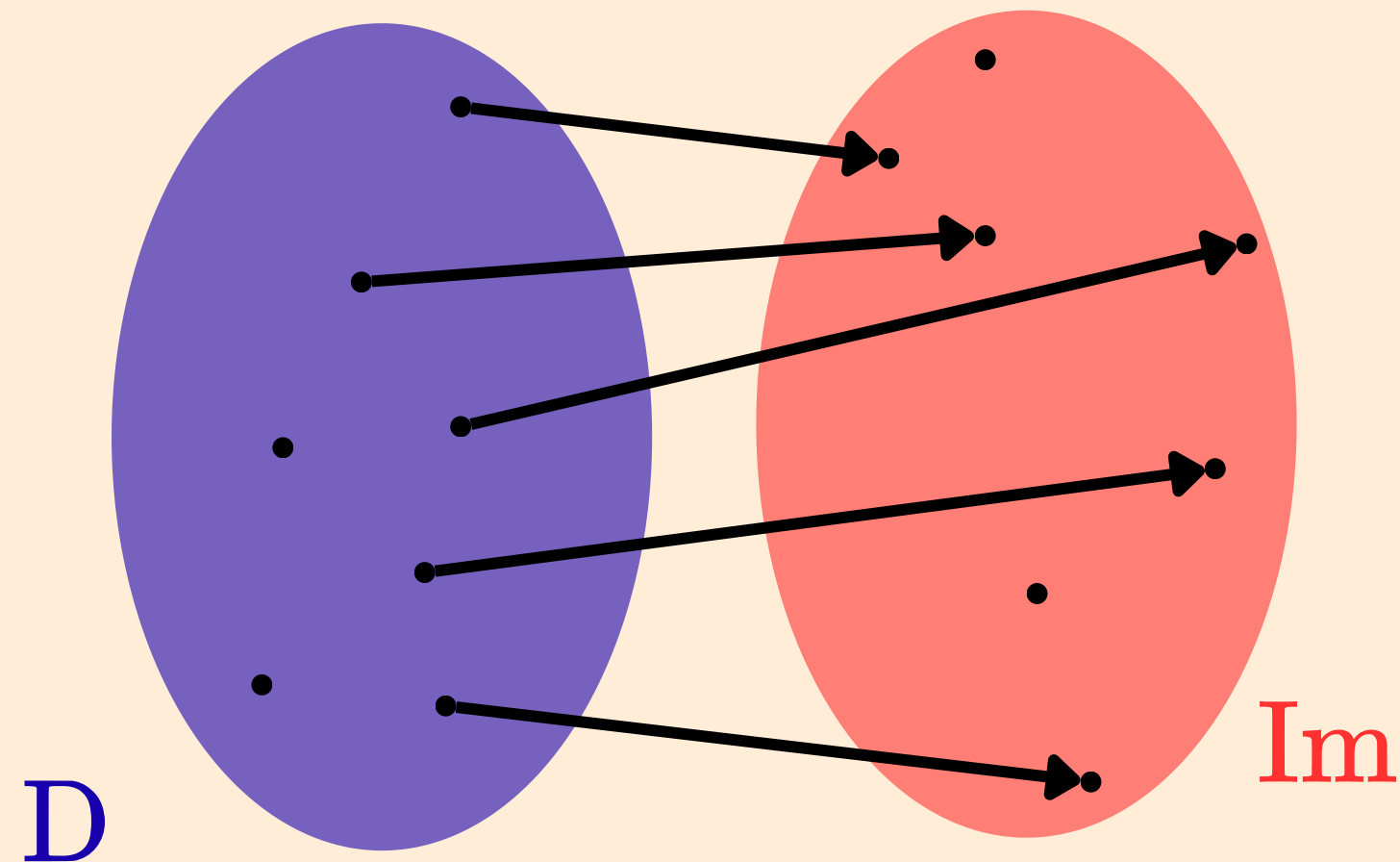


Funções reais

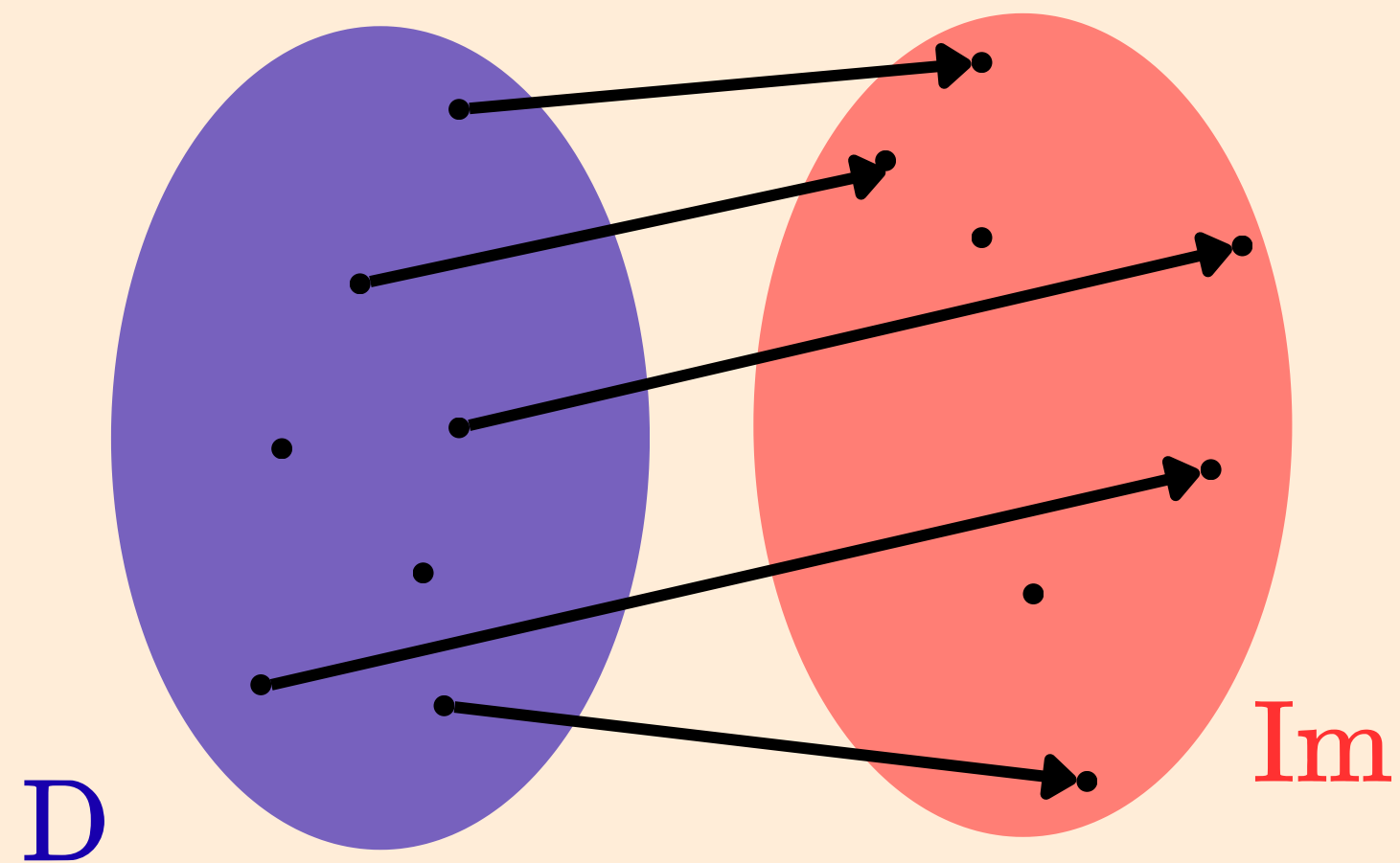
Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Im é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Im$ a cada elemento $x \in D$

Funções reais

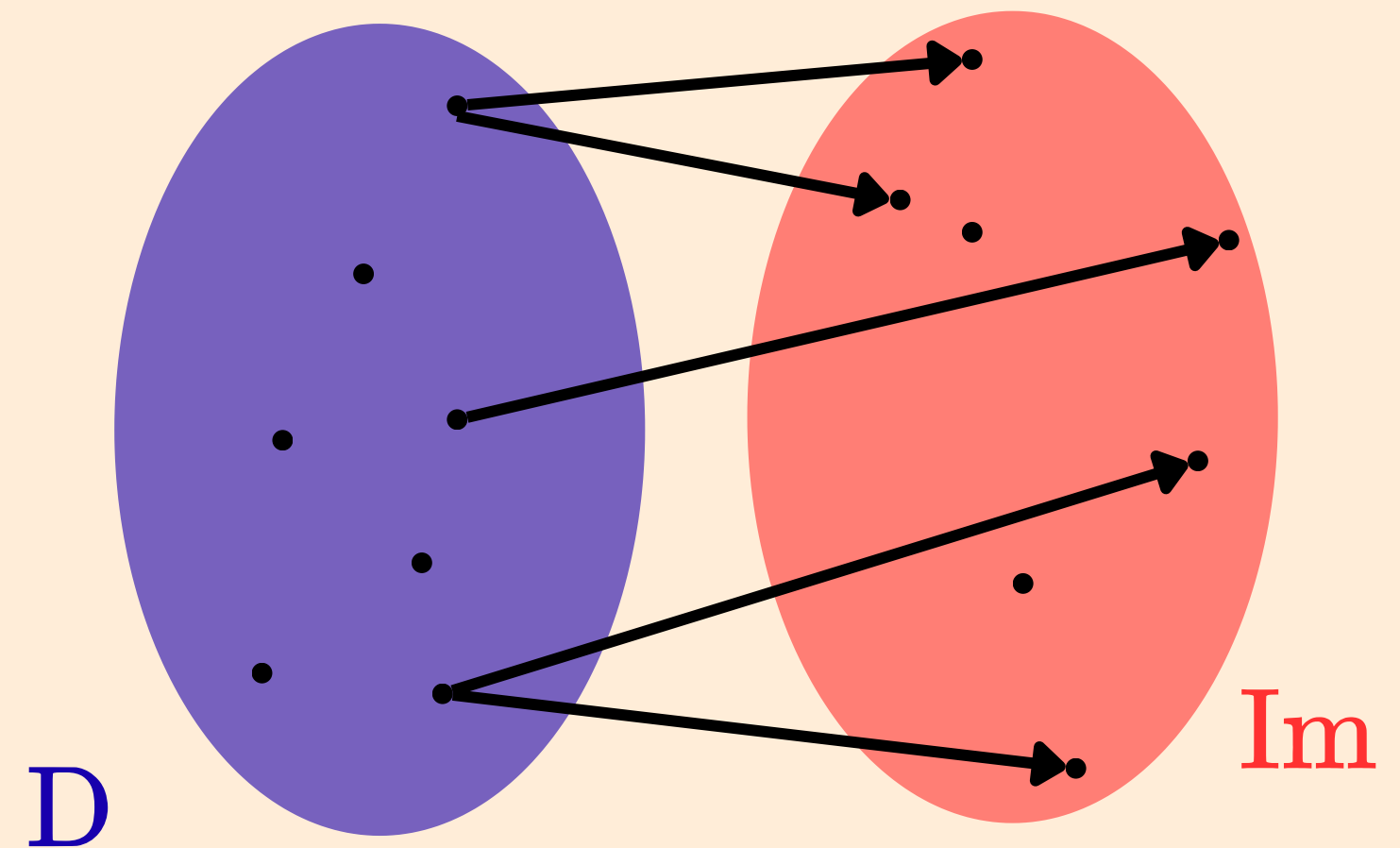
Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Im é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Im$ a cada elemento $x \in D$



Funções reais



É função



NÃO é função

Funções reais

Domínio: todos os possíveis valores de entrada da função

Imagem: todos os valores resultantes da função enquanto a variável independente varia ao longo do domínio

Exemplo:

$$y = x^2$$

Funções reais

Domínio: todos os possíveis valores de entrada da função

Imagem: todos os valores resultantes da função enquanto a variável independente varia ao longo do domínio

Exemplo:

$$y = x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Domínio: } (-\infty, \infty) \text{ ou } D = \{x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Imagem: } (0, \infty) \text{ ou } \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \end{array} \right.$$

Exemplos:

→ $y = \frac{1}{x}$

→ $y = \sqrt{x}$

→ $y = \sqrt{4 - x}$

→ $y = \sqrt{1 - x^2}$

Exemplos:

$$\longrightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = \sqrt{4 - x}$$

$$\begin{cases} D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} \\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \end{cases}$$

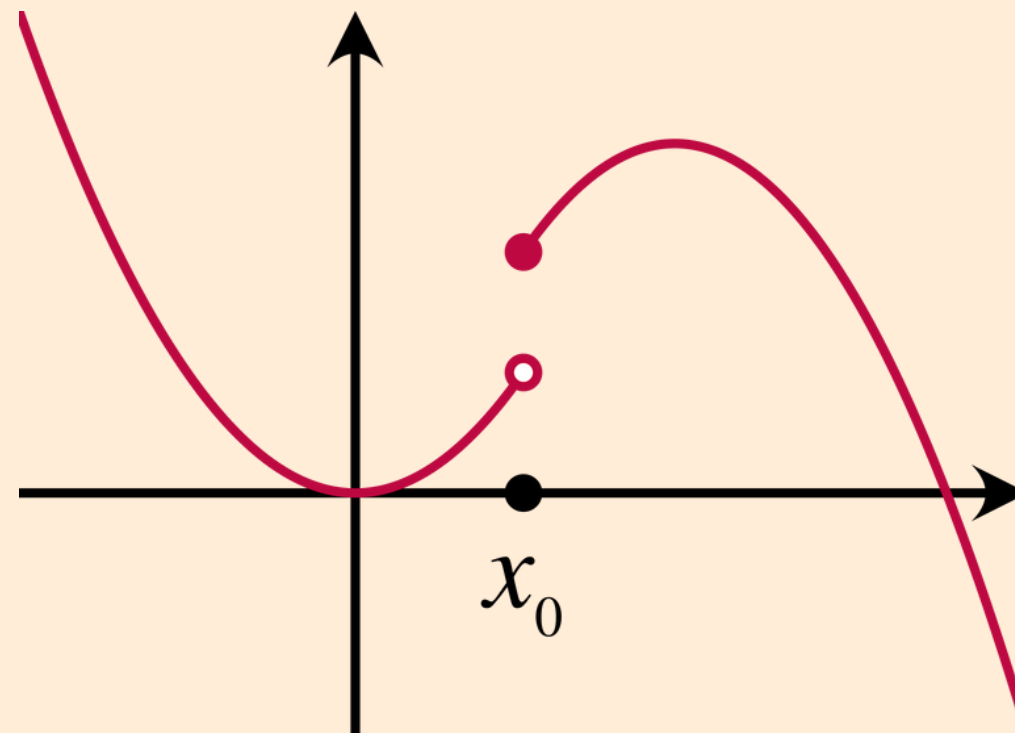
$$\longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{cases} D = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\} \\ \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 1\} \end{cases}$$

Funções reais

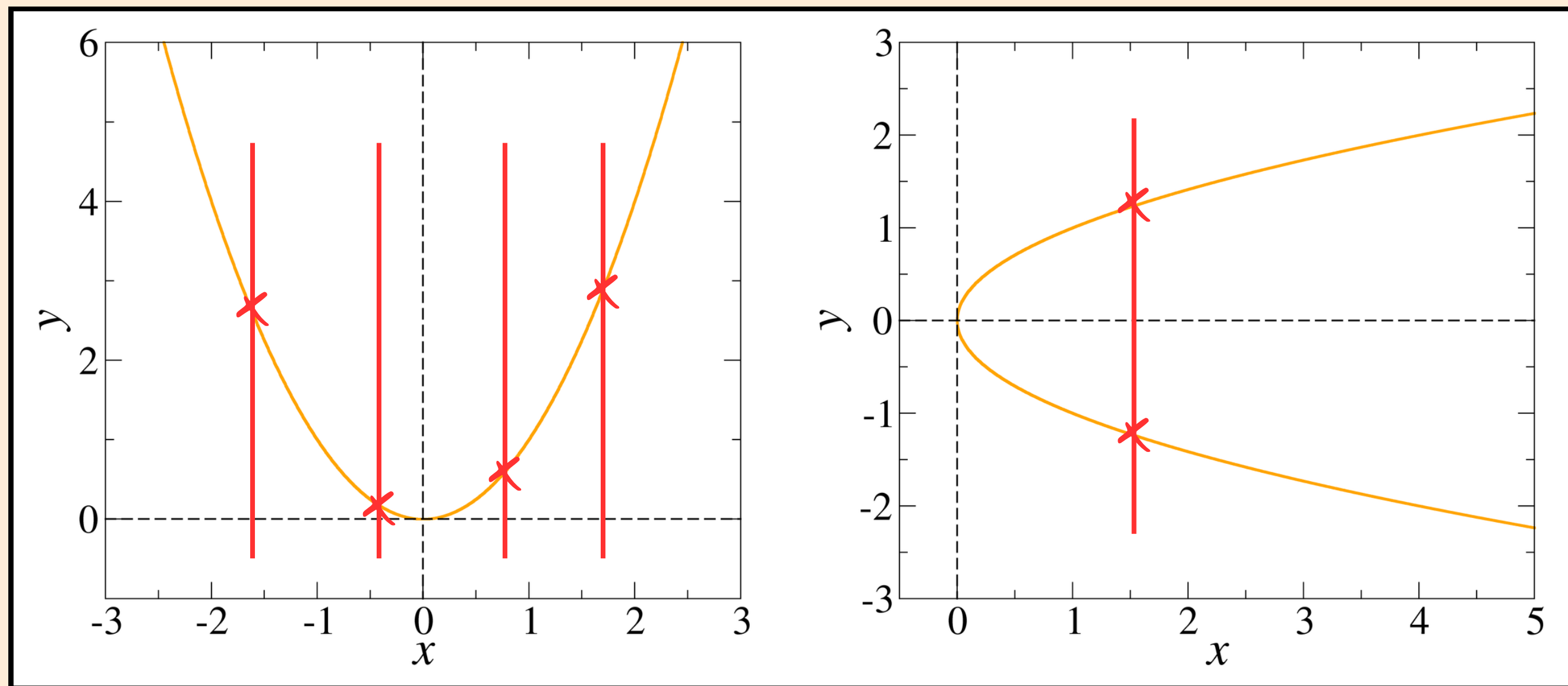
Gráficos: são formados pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são os pares (x, y) onde $y = f(x)$

$$\{(x, f(x)) / x \in \mathbf{D}\}$$



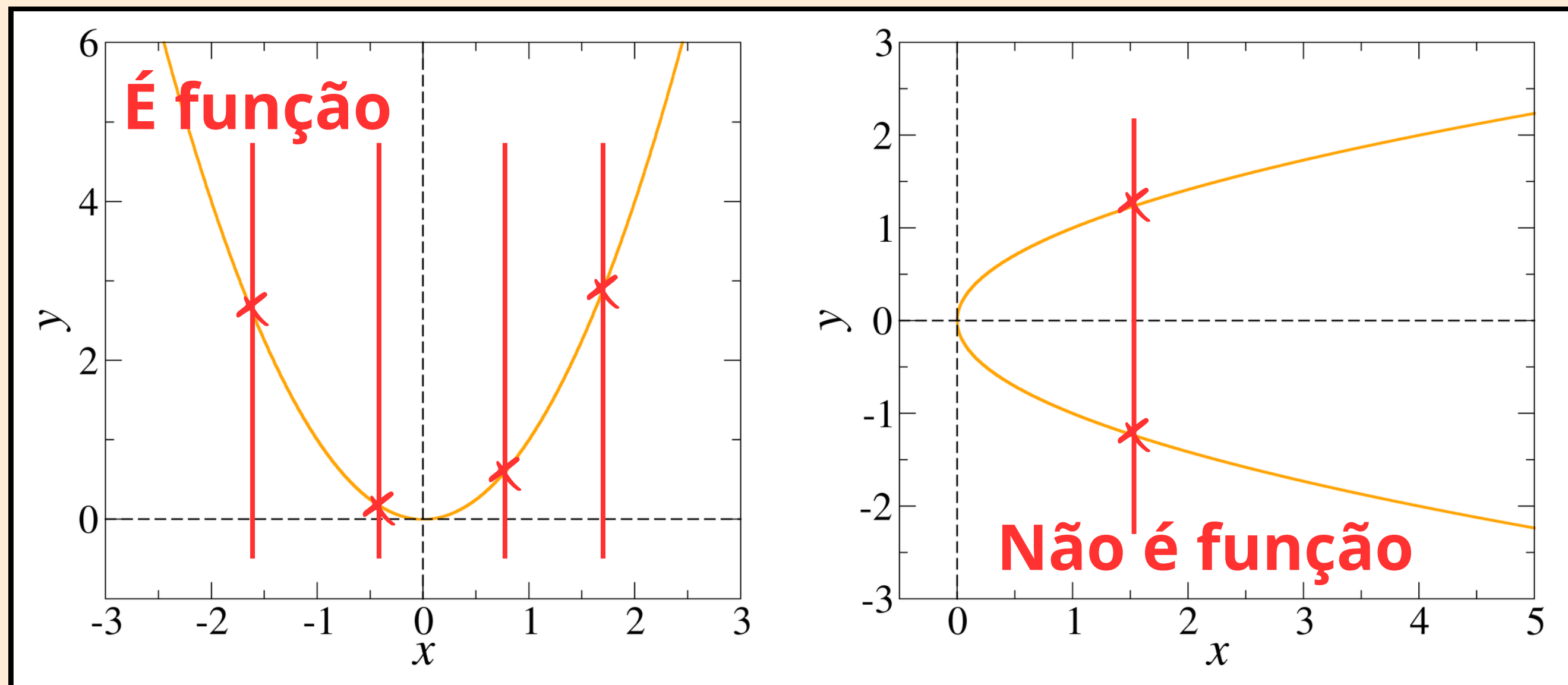
Funções reais

Teste da reta vertical: nenhuma reta vertical pode interceptar a curva da função mais de uma vez.



Funções reais

Teste da reta vertical: nenhuma reta vertical pode interceptar a curva da função mais de uma vez.



Funções reais

Operações

$$\longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\longrightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

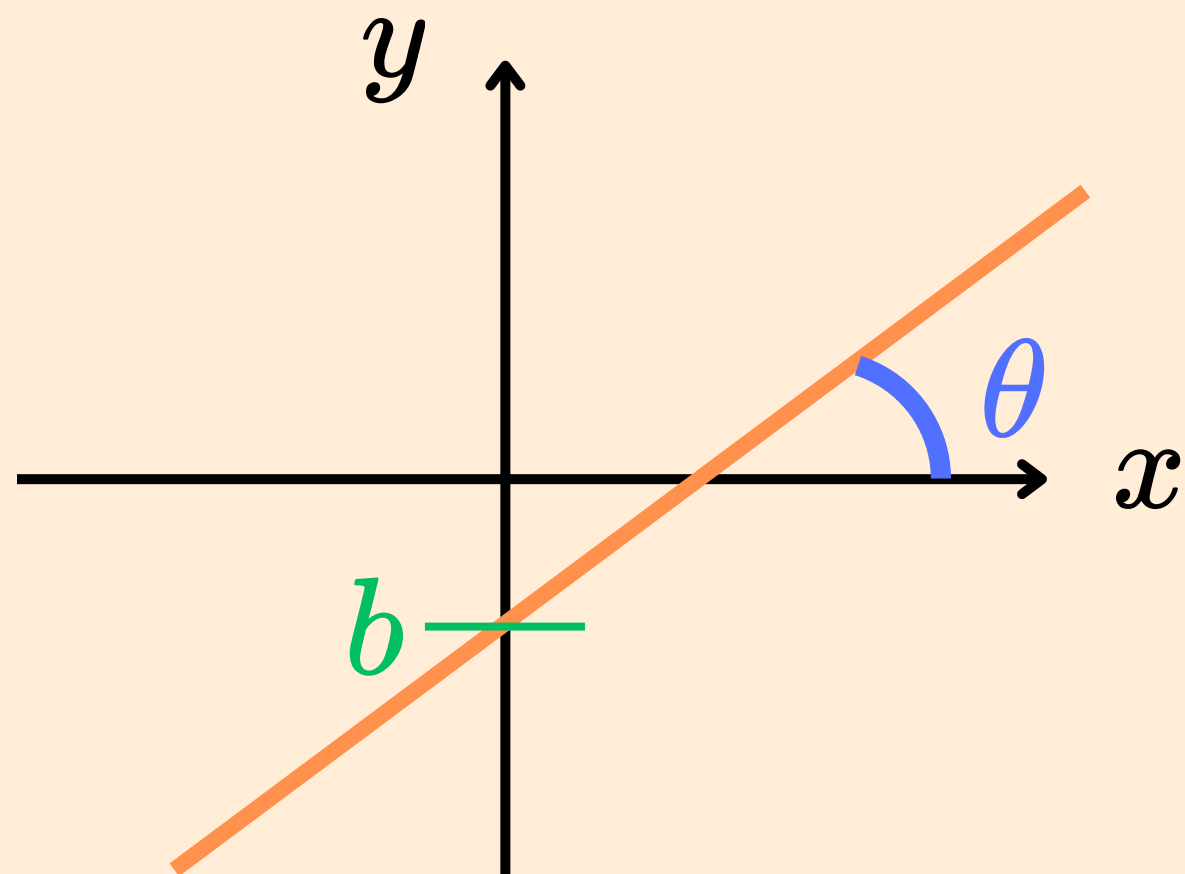
$$\longrightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\longrightarrow (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Algumas funções

Funções lineares:

$$y = mx + b$$

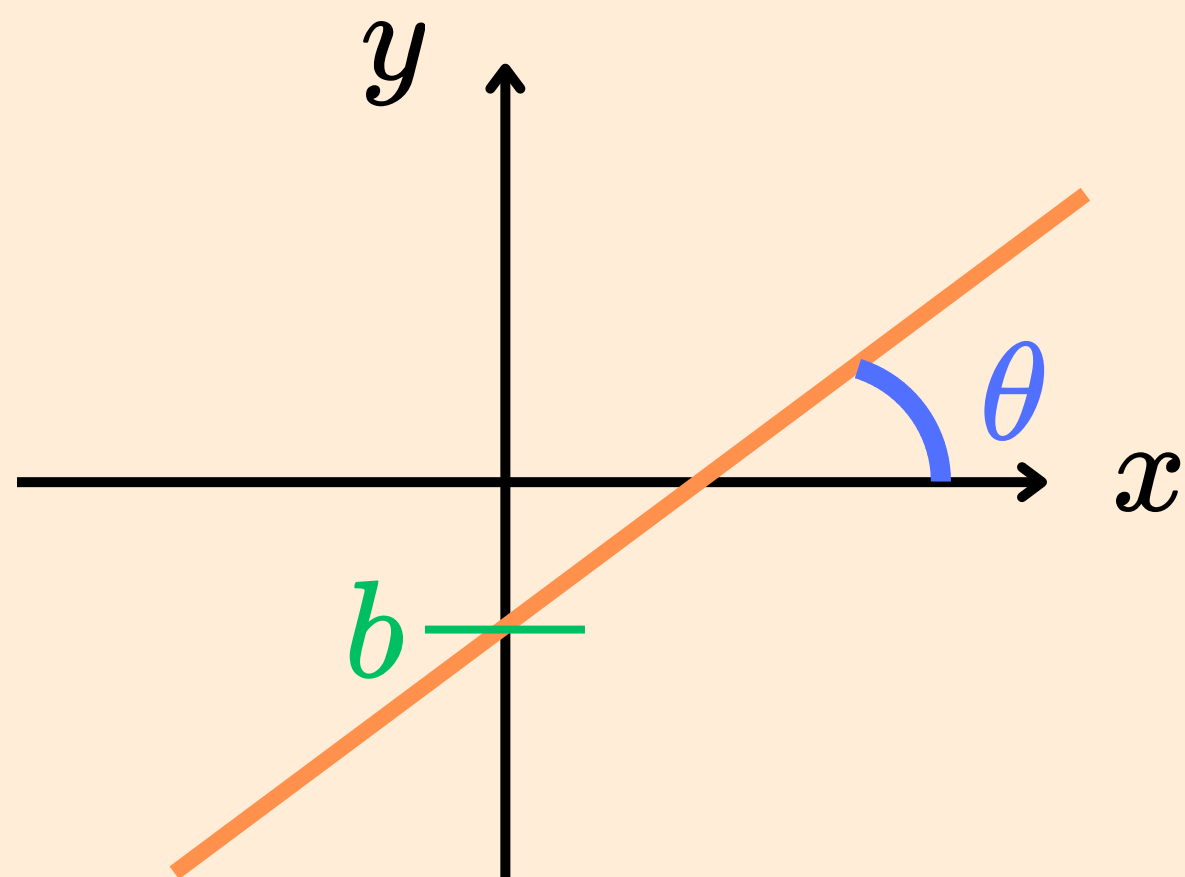


$$m = \operatorname{tg} \theta$$

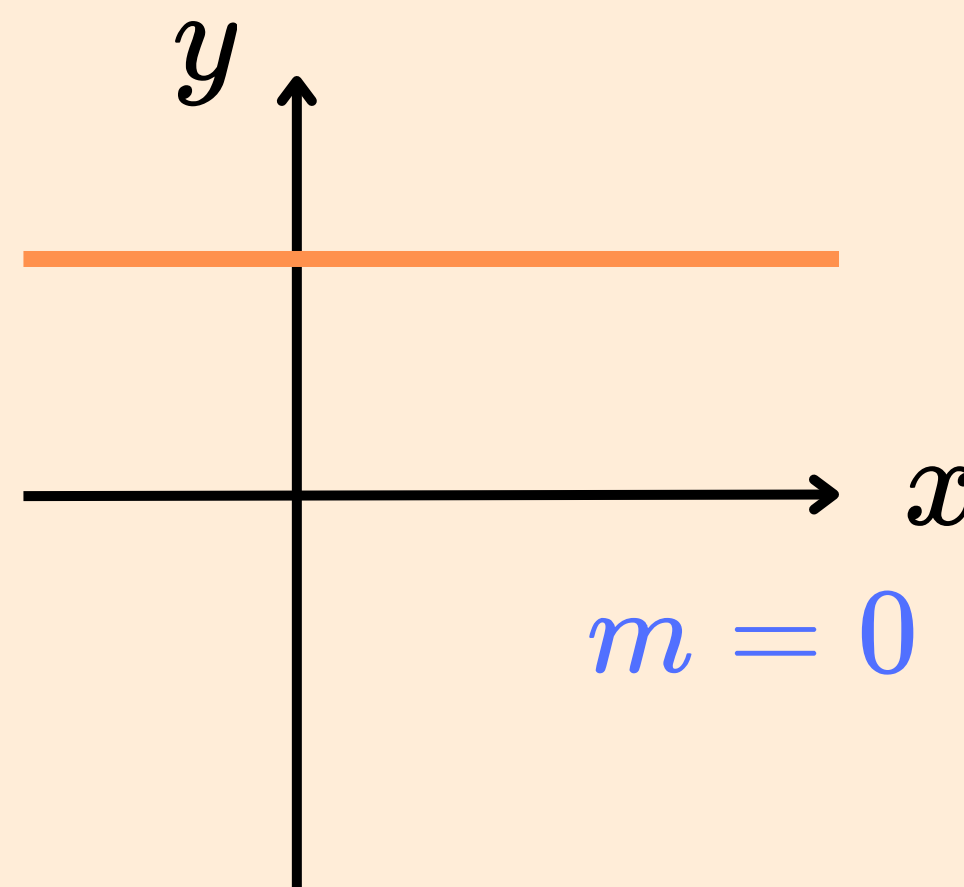
Algumas funções

Funções lineares:

$$y = mx + b$$



$$m = \operatorname{tg} \theta$$

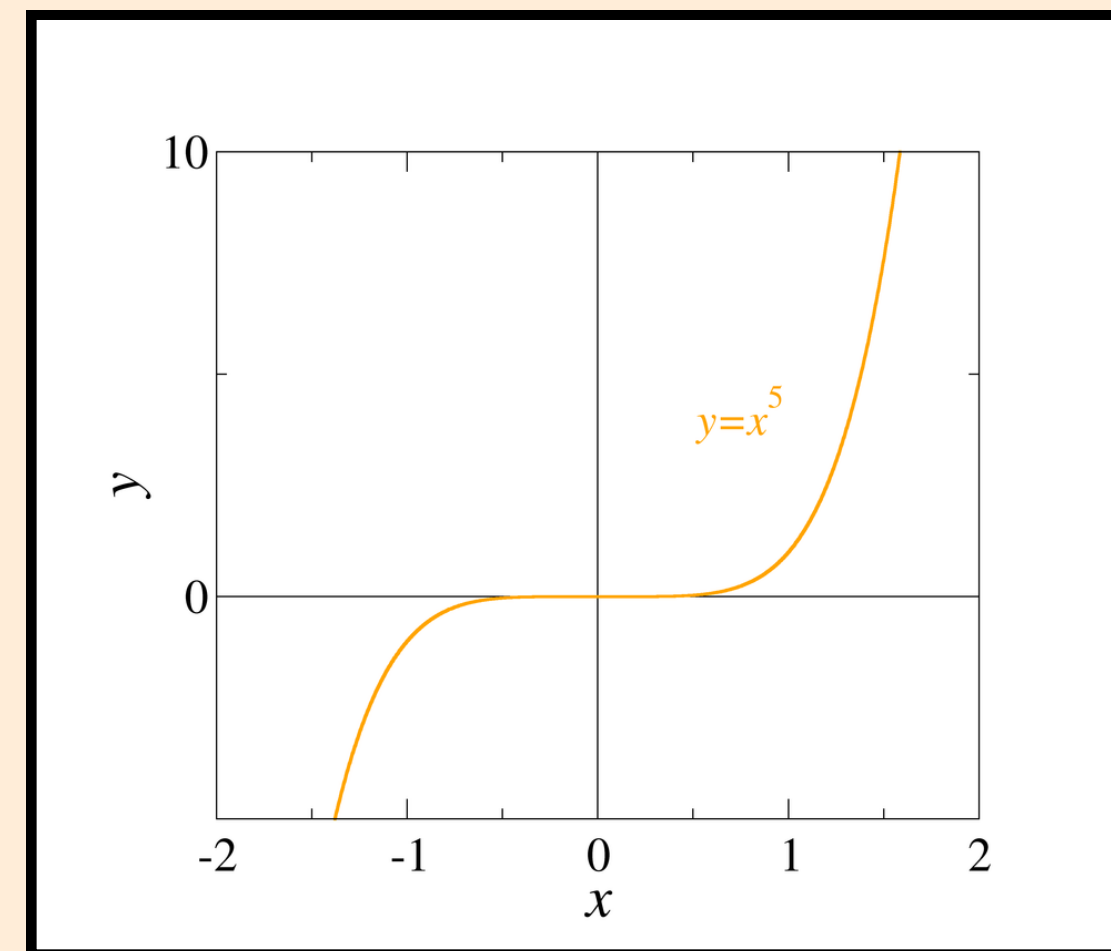
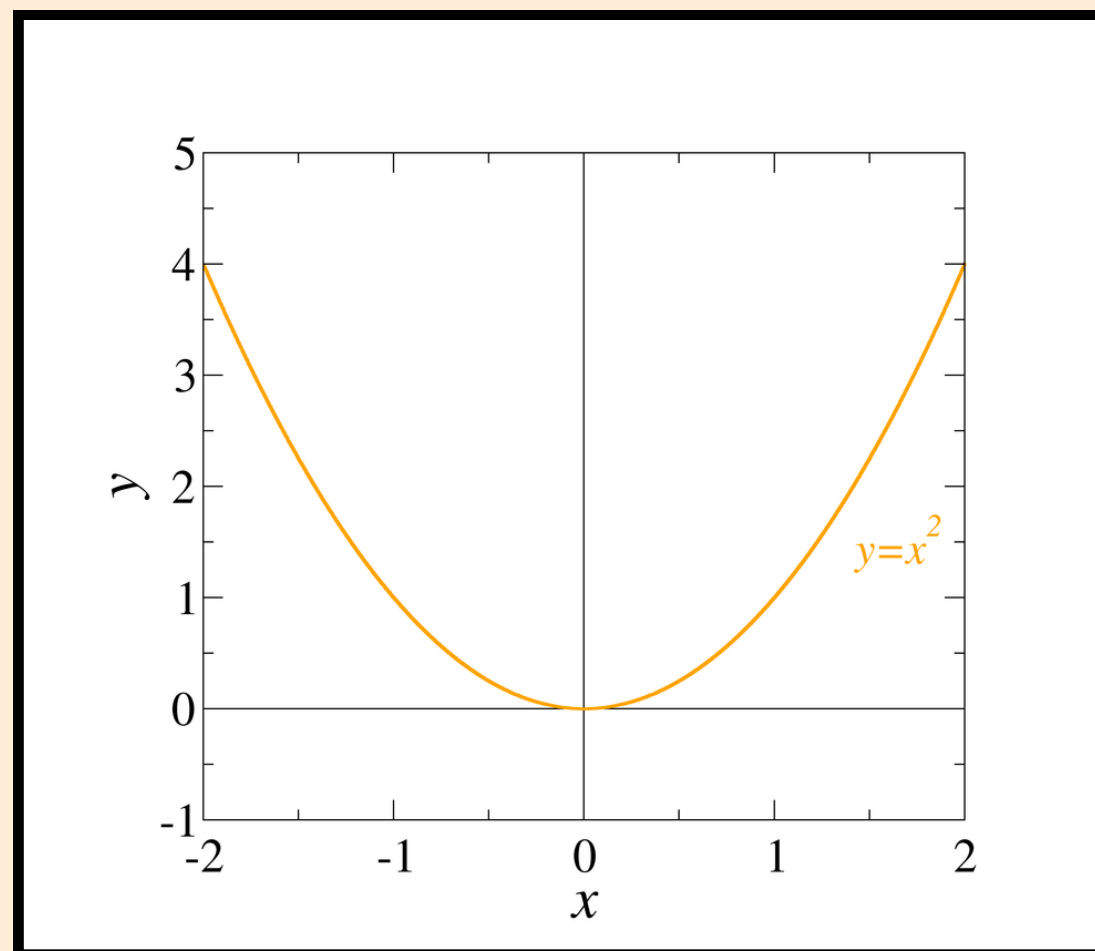


Algumas funções

Funções de potência:

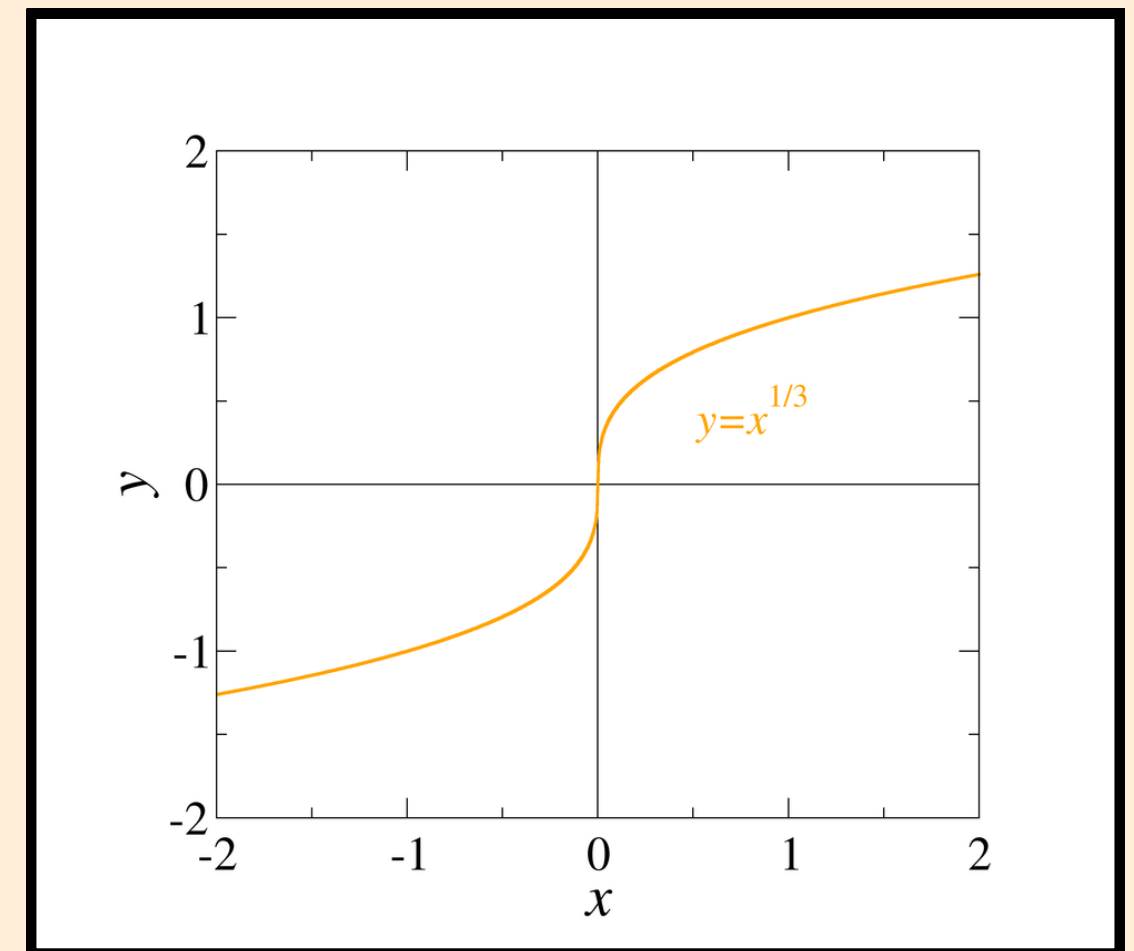
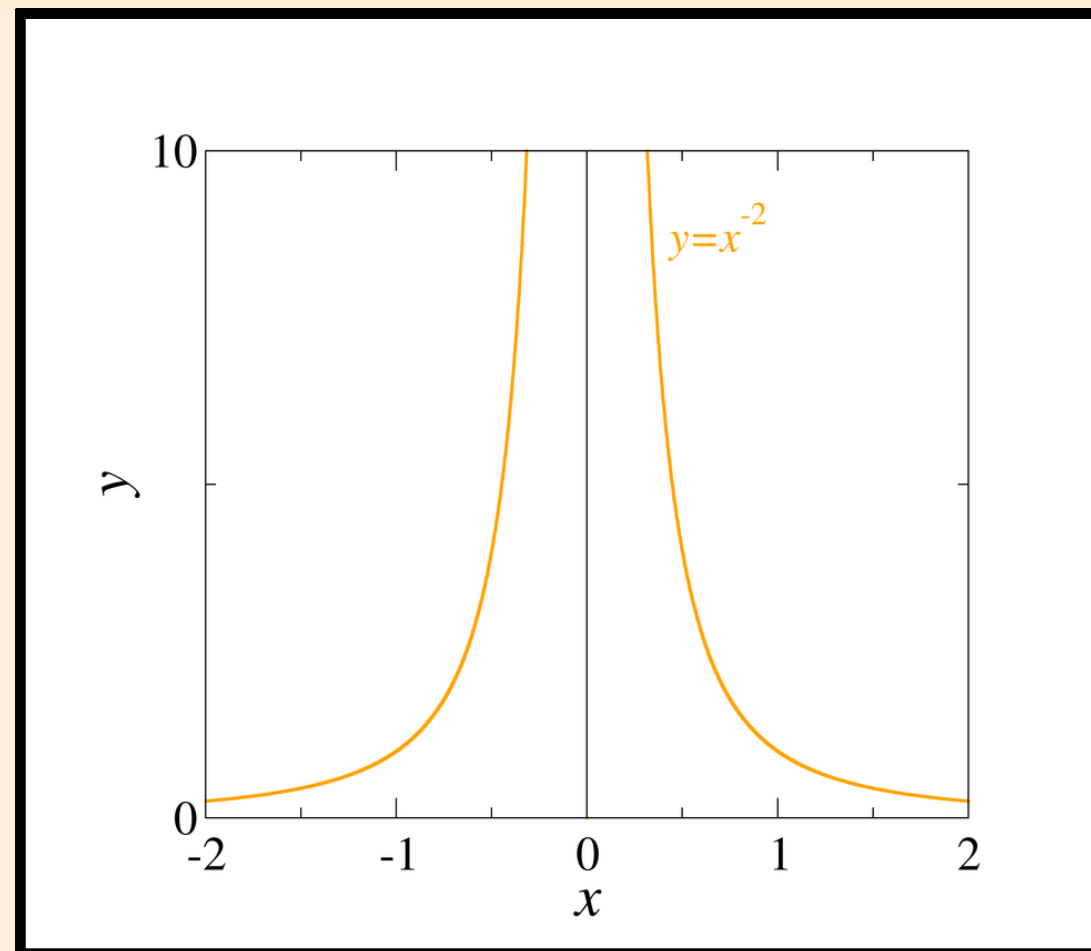
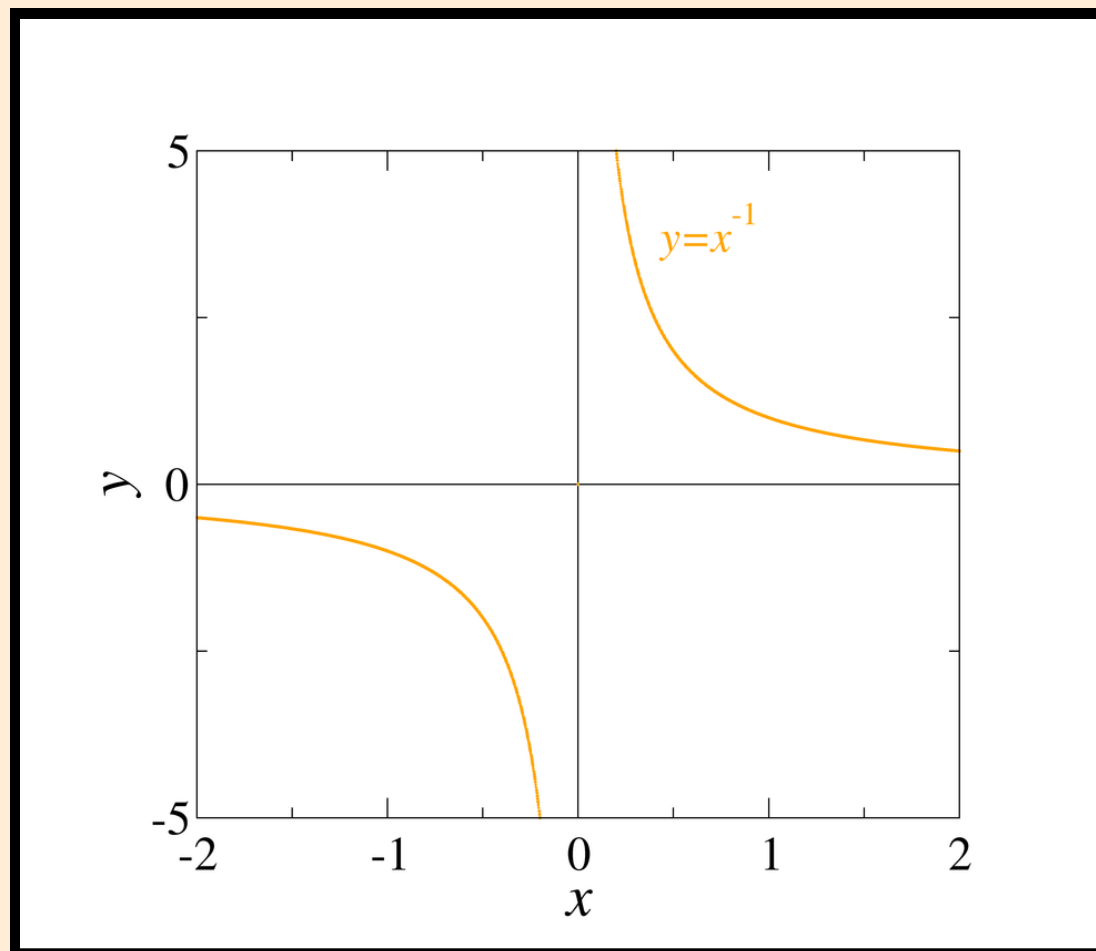
$$y = x^a$$

$$a \in \mathbb{R}$$



Algumas funções

Funções de potência:



Algumas funções

Funções de polinômios:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

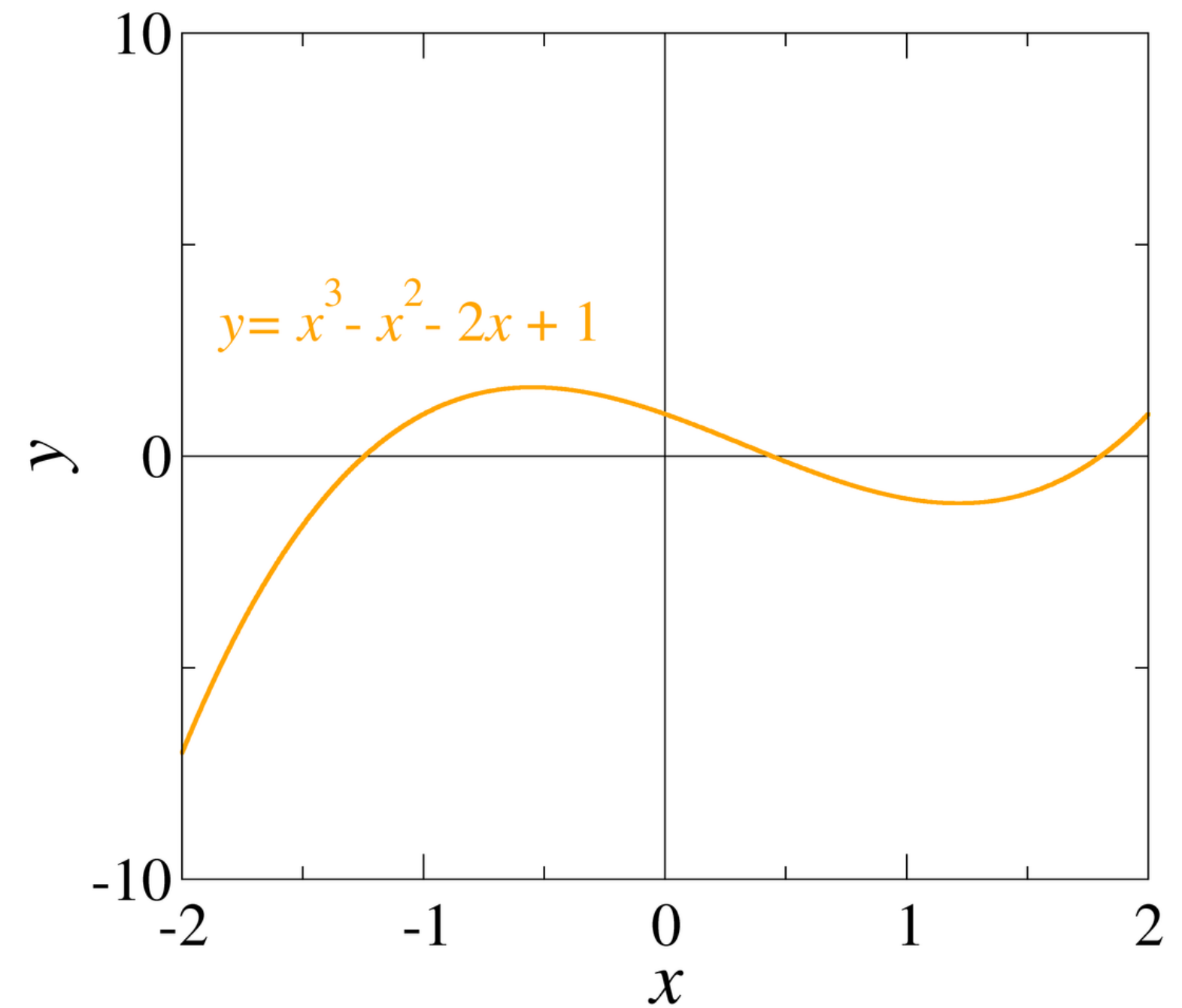
$$n \in \mathbb{N}$$

$$a_i \in \mathbb{R}$$

- Todo polinômio tem domínio $(-\infty, \infty)$
- n , o maior expoente, é denominado **grau** do polinômio

Algumas funções

Funções de polinômios:

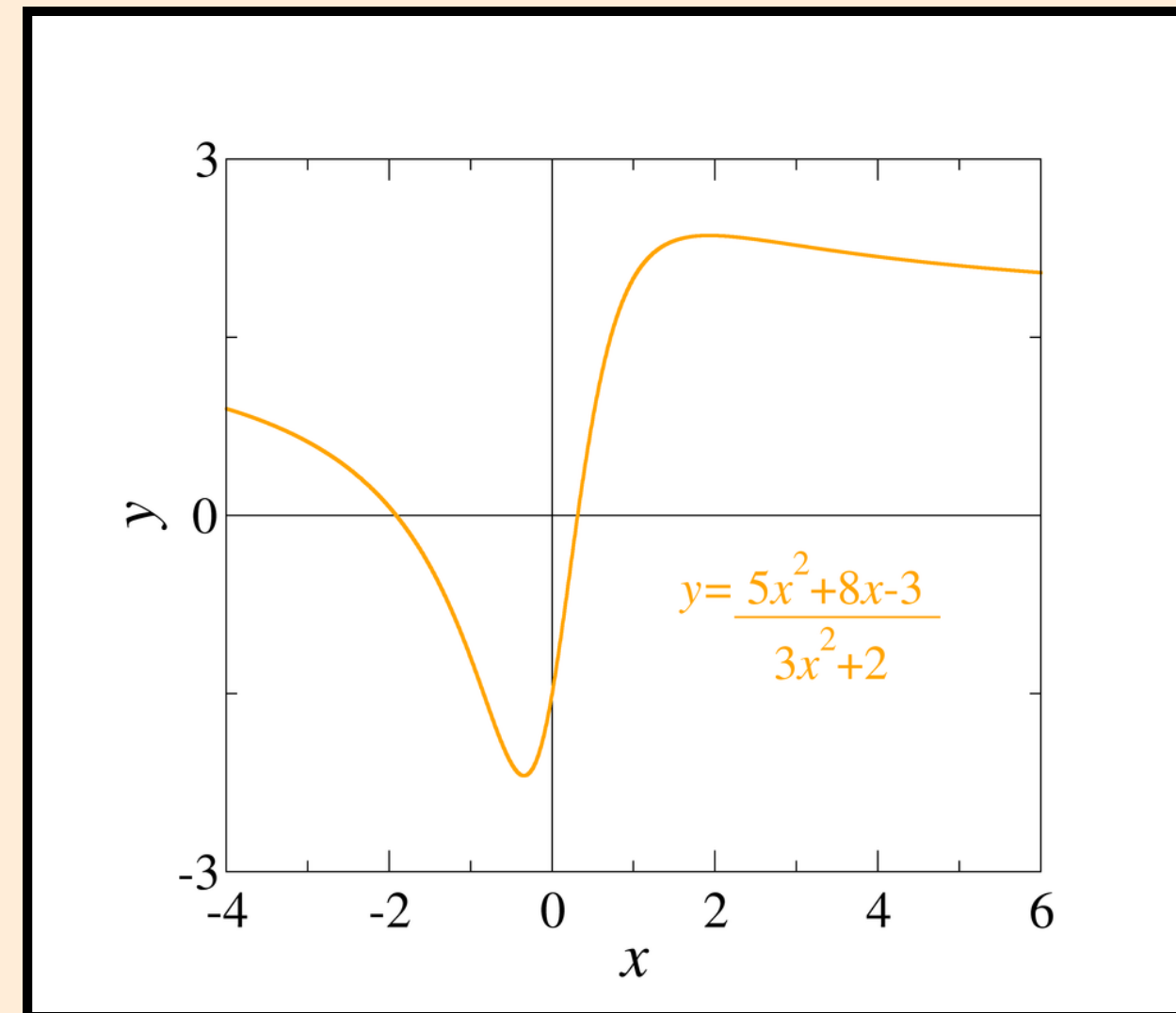


Algumas funções

Funções de racionais:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

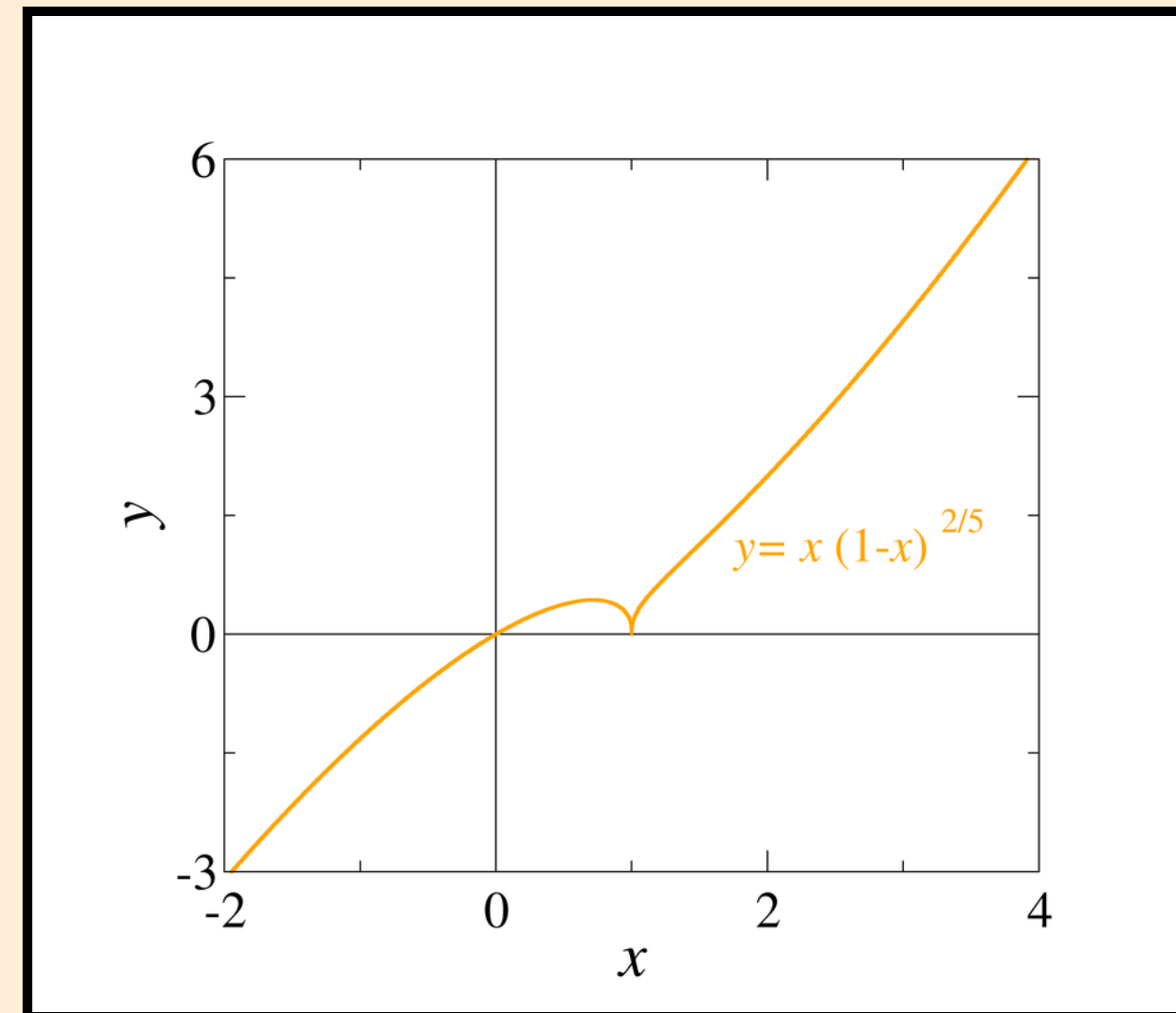
- Razão entre dois polinômios
- **Domínio:** conjunto onde $q(x) \neq 0$



Algumas funções

Funções algébricas:

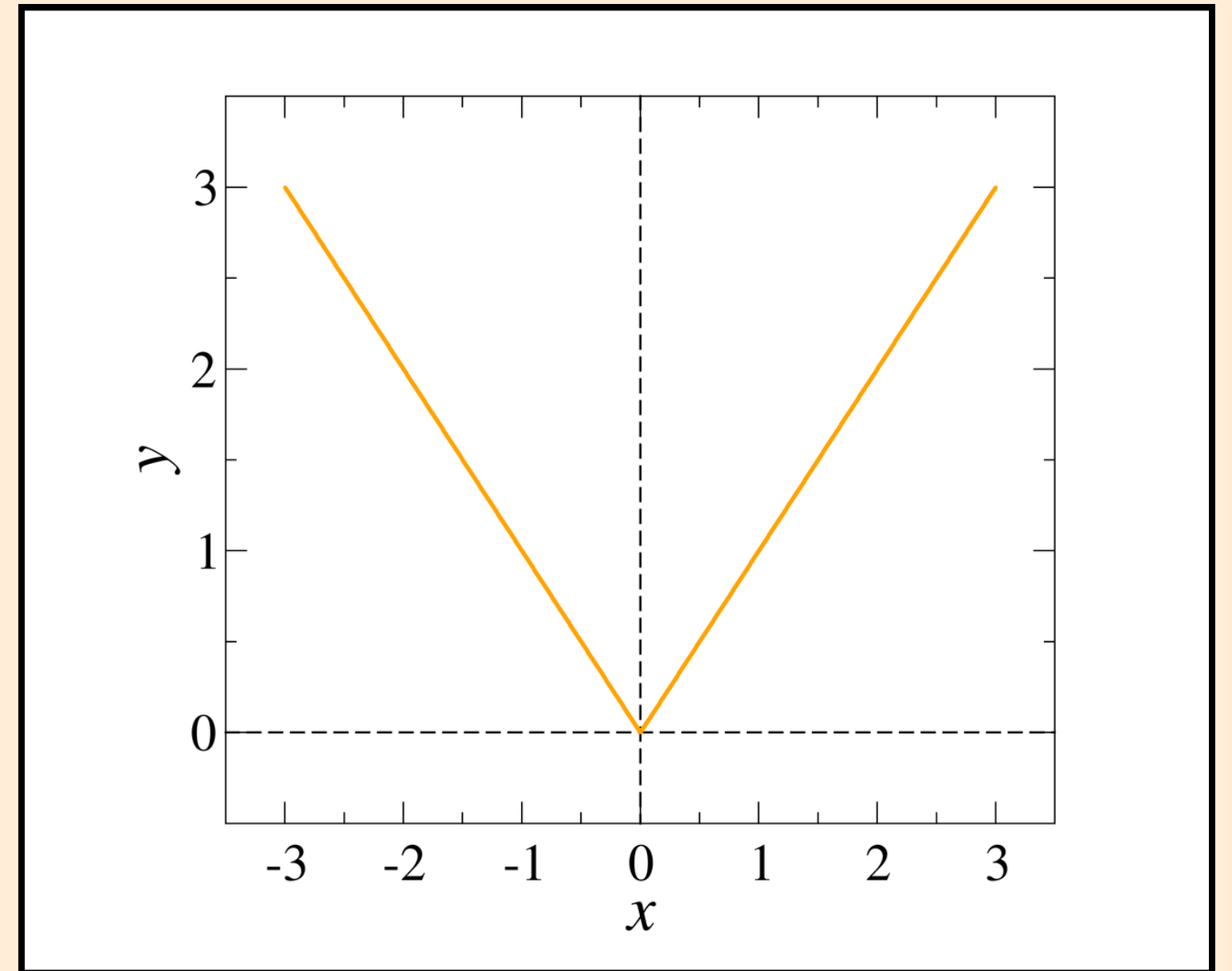
- Operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) de polinômios
- Funções racionais são exemplos de funções algébricas



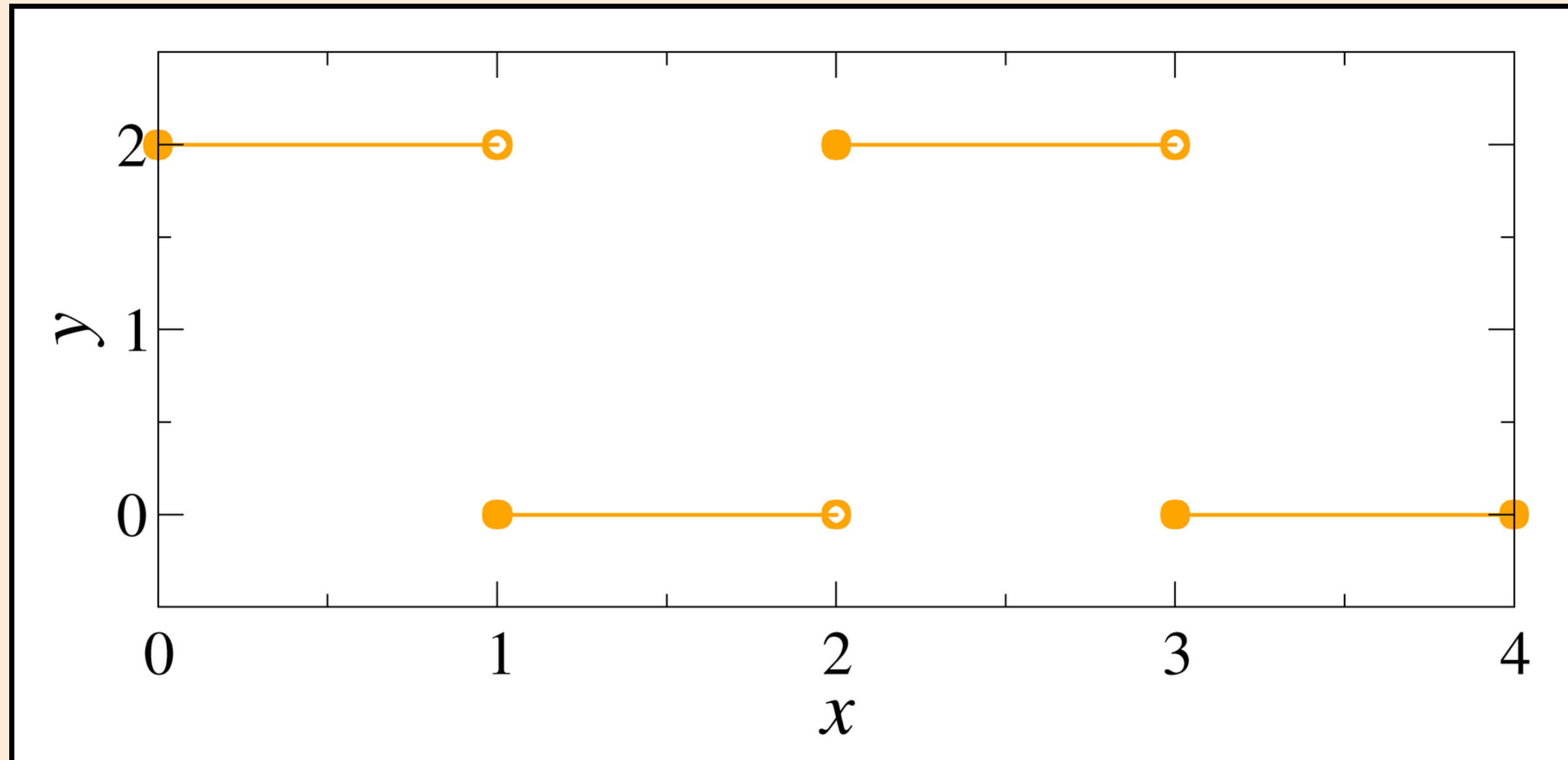
Algumas funções

Funções definidas por partes: fórmulas diferentes em partes diferentes do seu domínio.

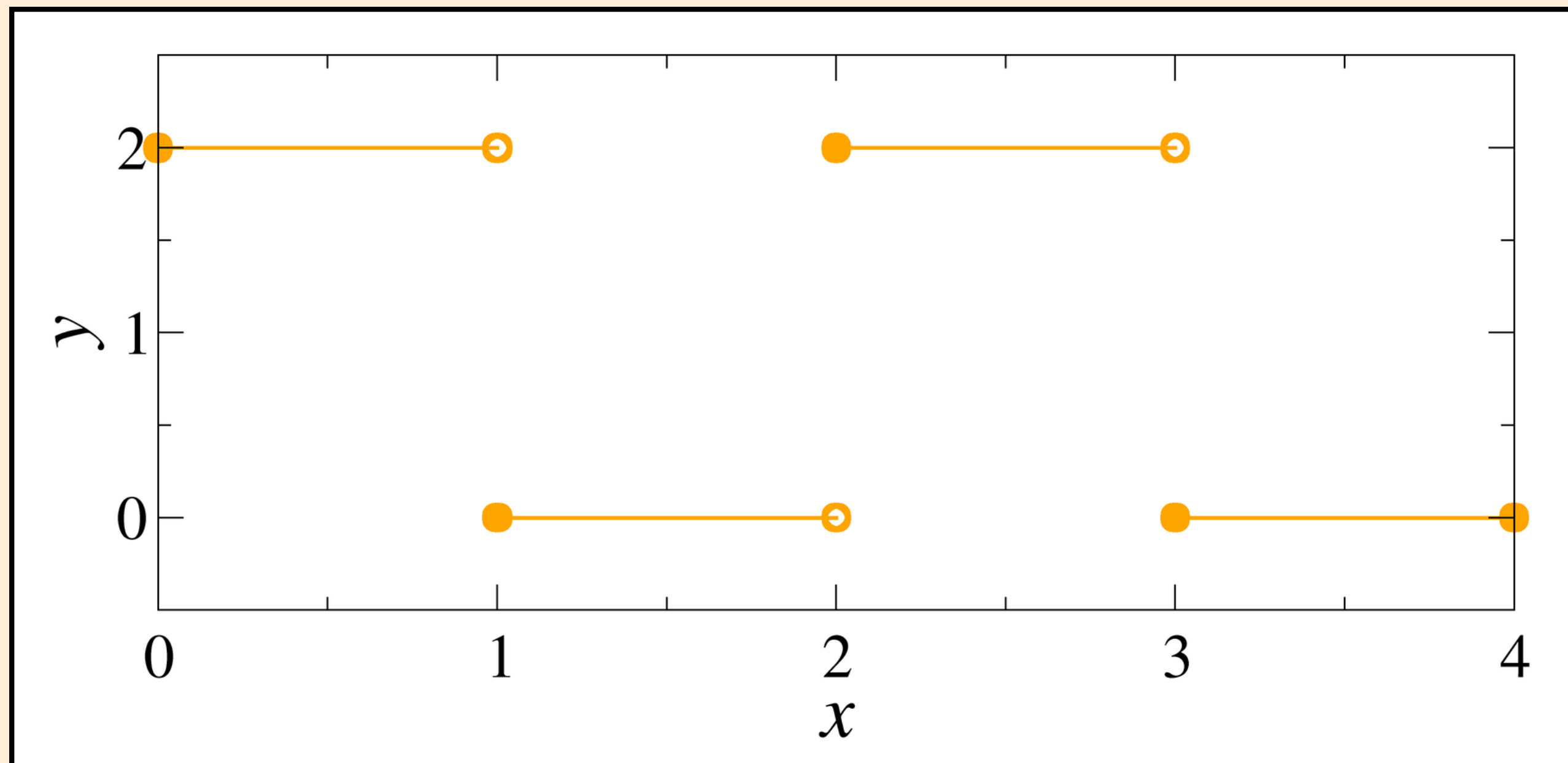
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funções definidas por partes

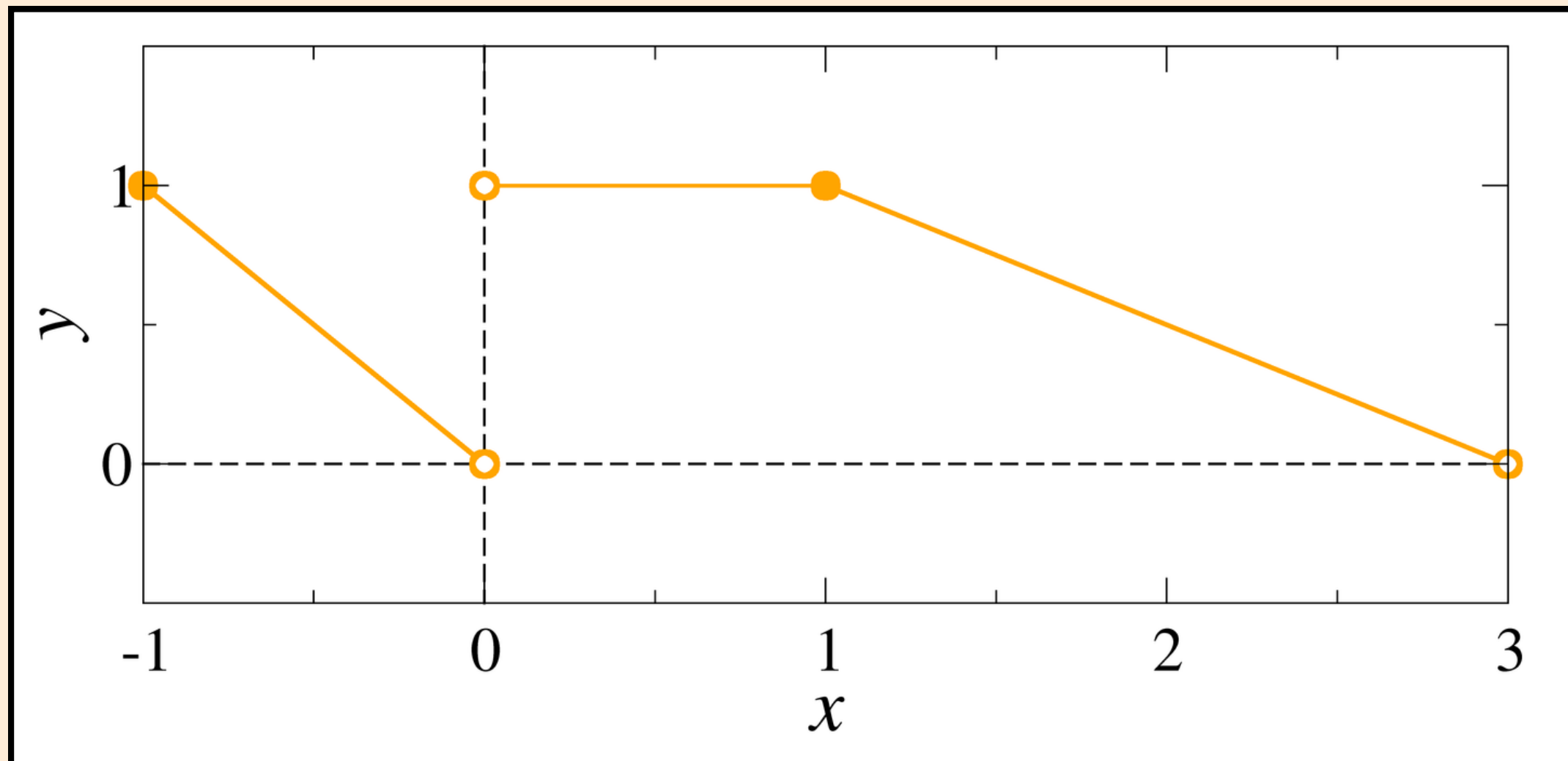


Funções definidas por partes



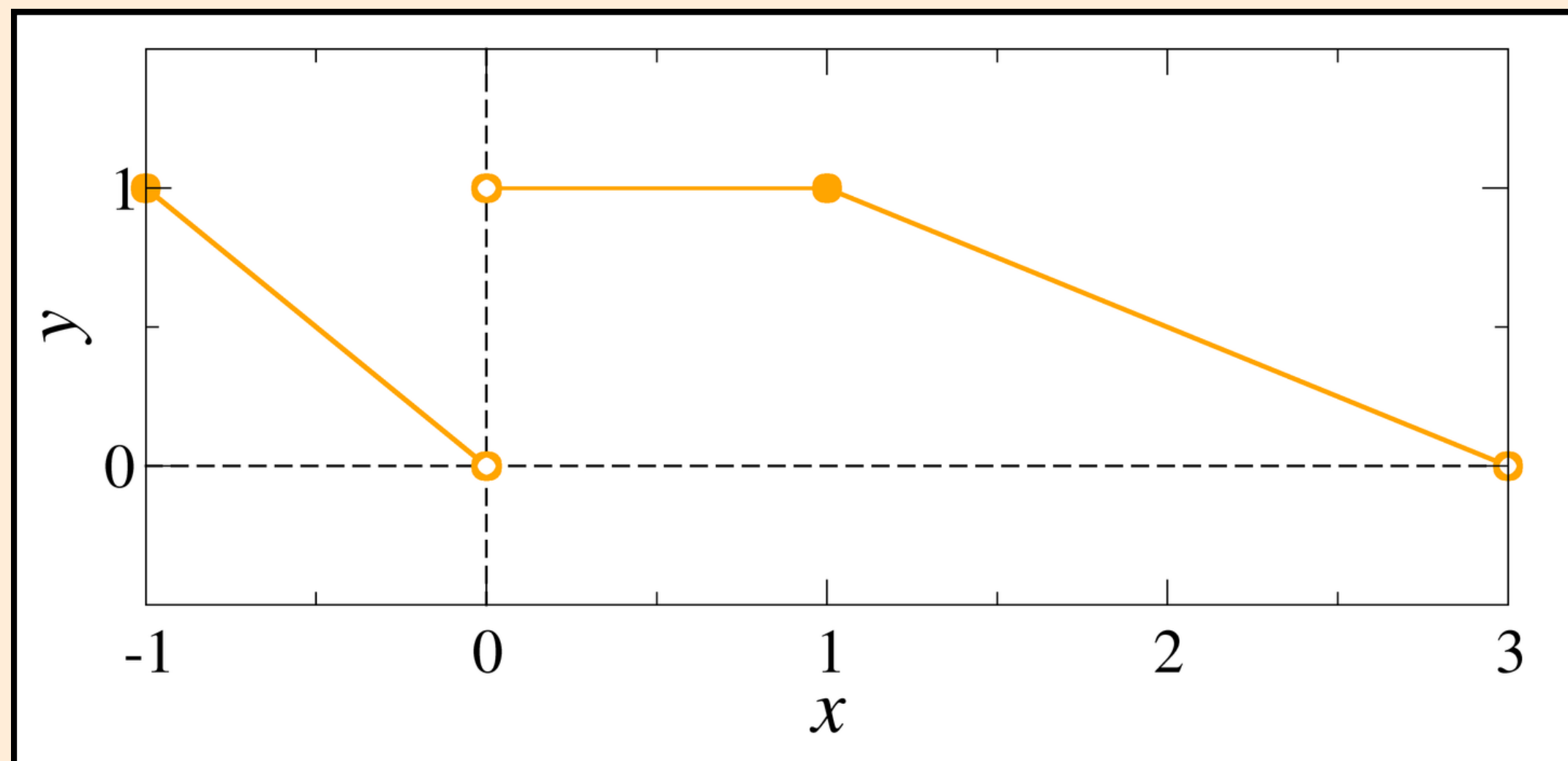
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \text{ e } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x < 2 \text{ e } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Funções definidas por partes



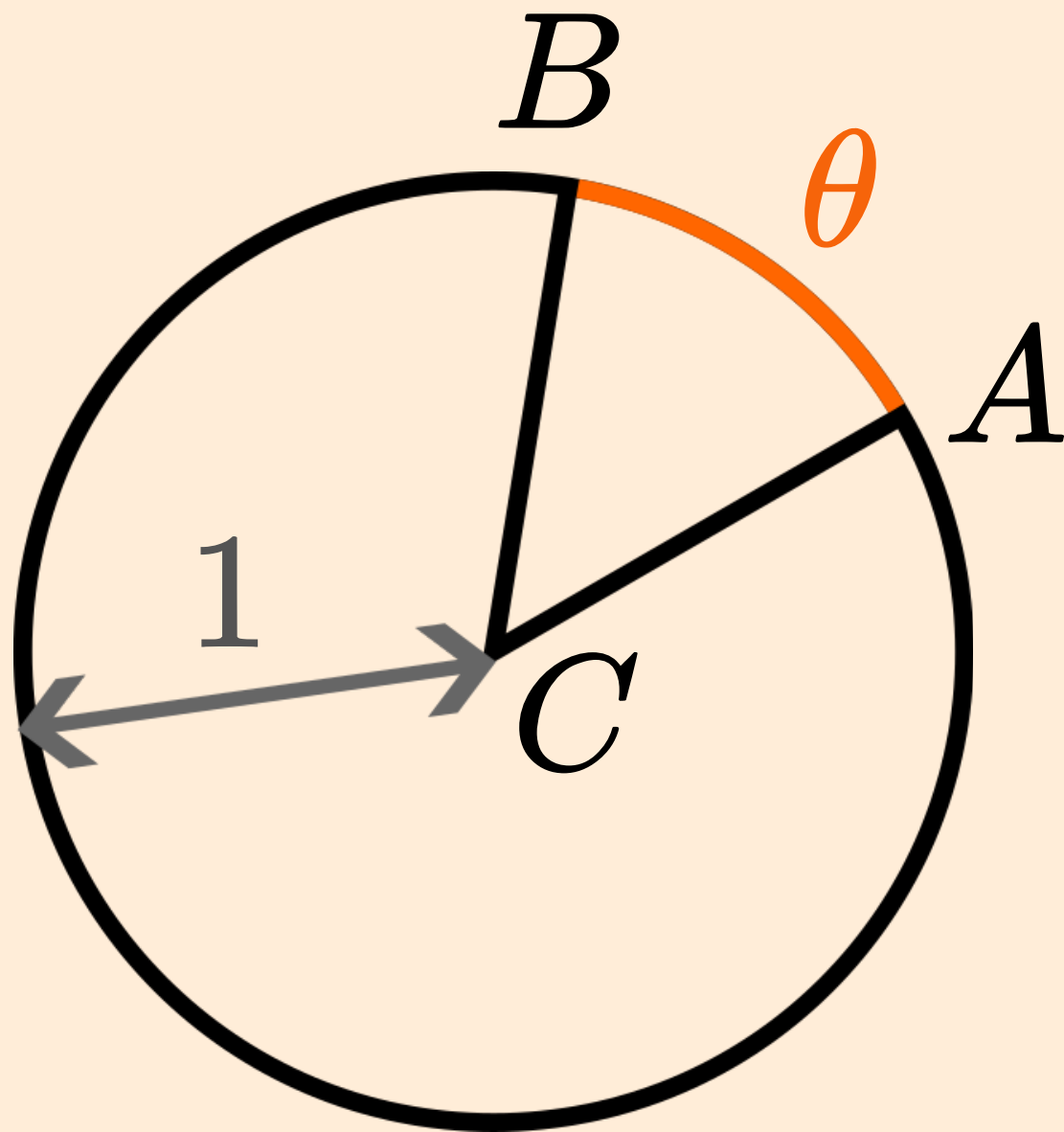
Funções definidas por partes

$$f(x) = \begin{cases} - & x, \text{ se } -1 \leq x \leq 0, \\ & 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ - & \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ se } 1 < x < 3 \end{cases}$$



Algumas funções

Radiano

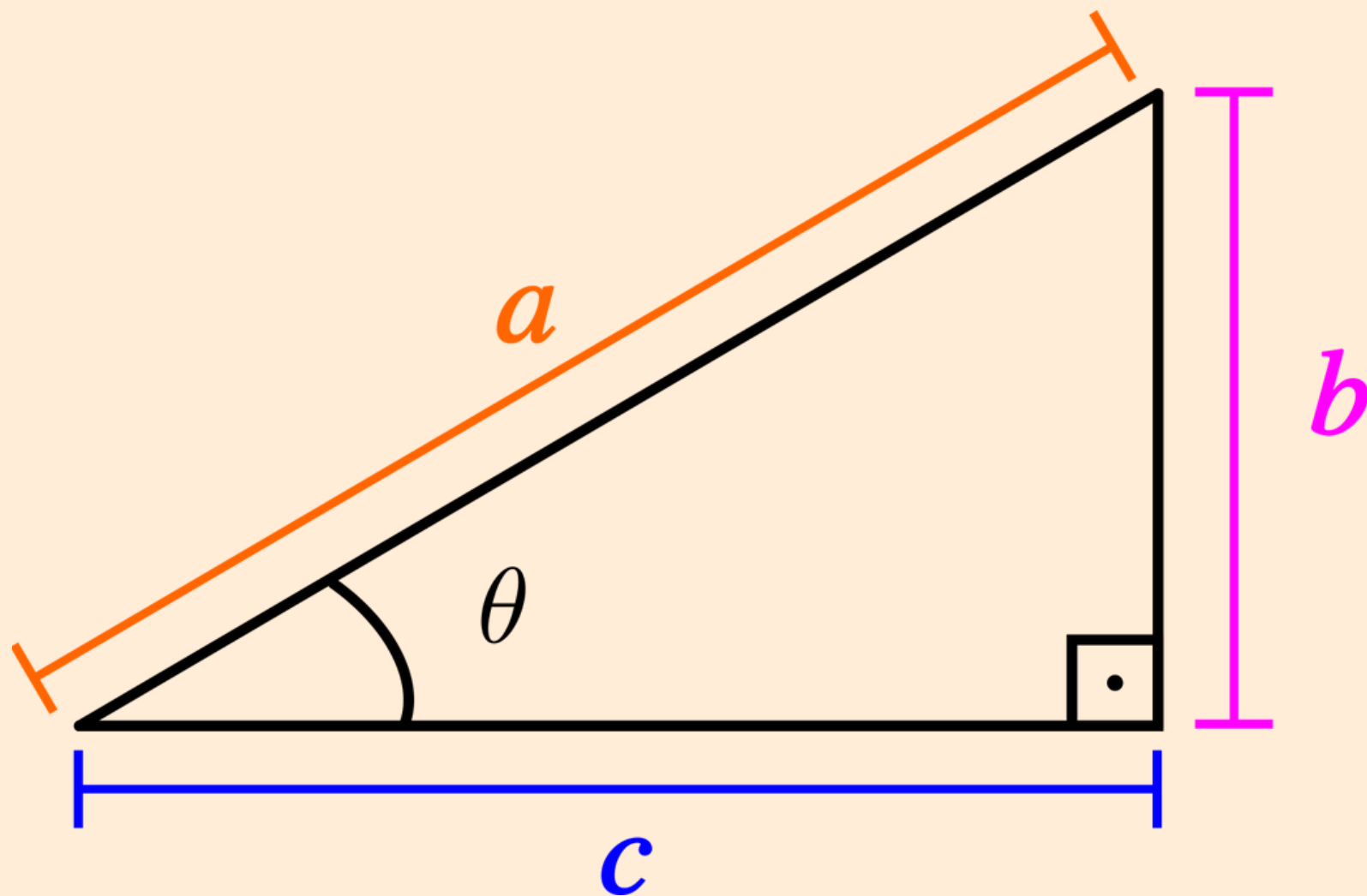


Definição: a medida, em radianos, do ângulo ACB é o comprimento θ do arco AB no círculo unitário de centro C .

Algumas funções

Funções trigonométricas

- Funções trigonométricas básicas: seno e cosseno



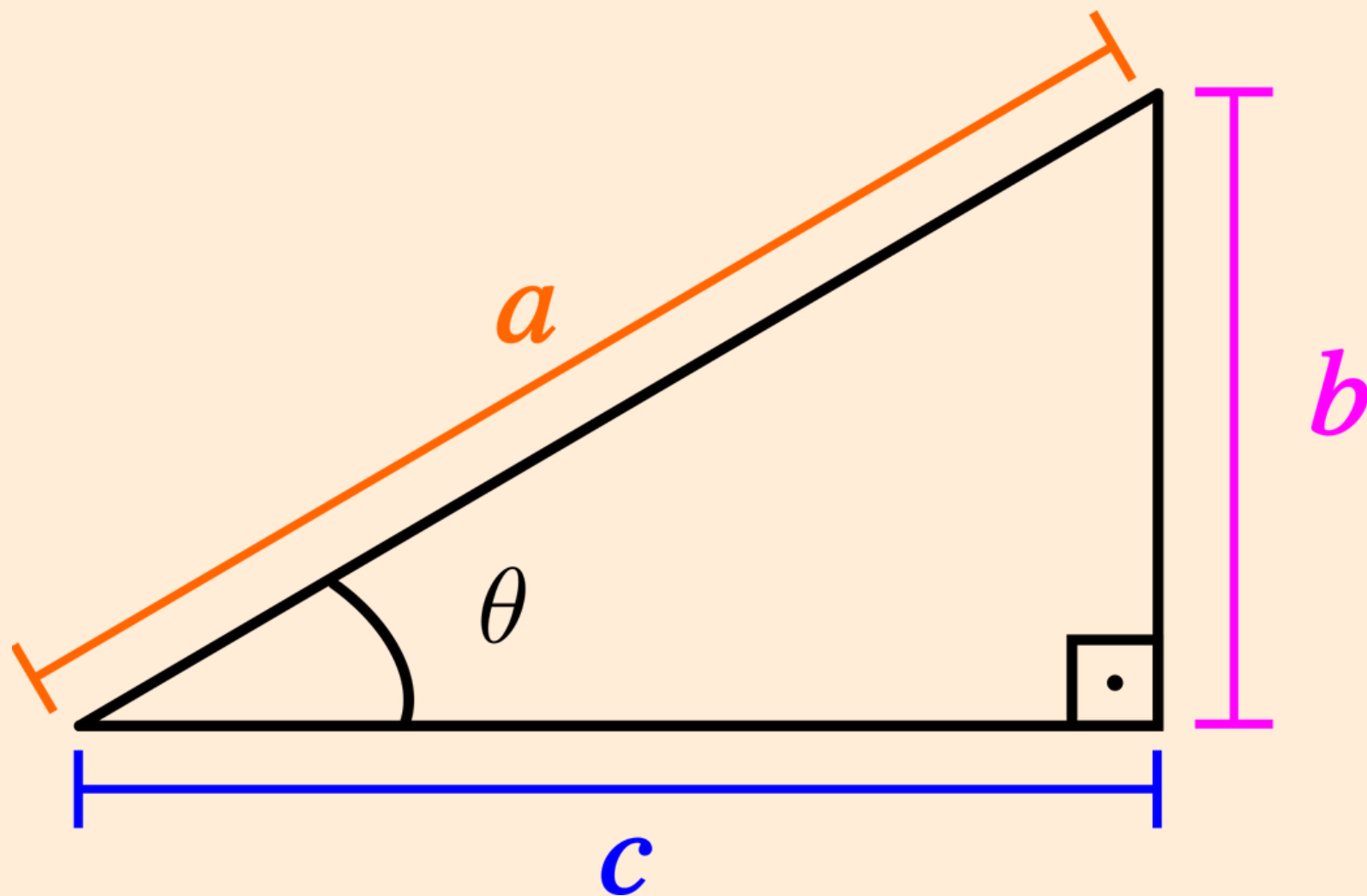
$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a}$$

Algumas funções

Funções trigonométricas

- Funções trigonométricas básicas: seno e cosseno



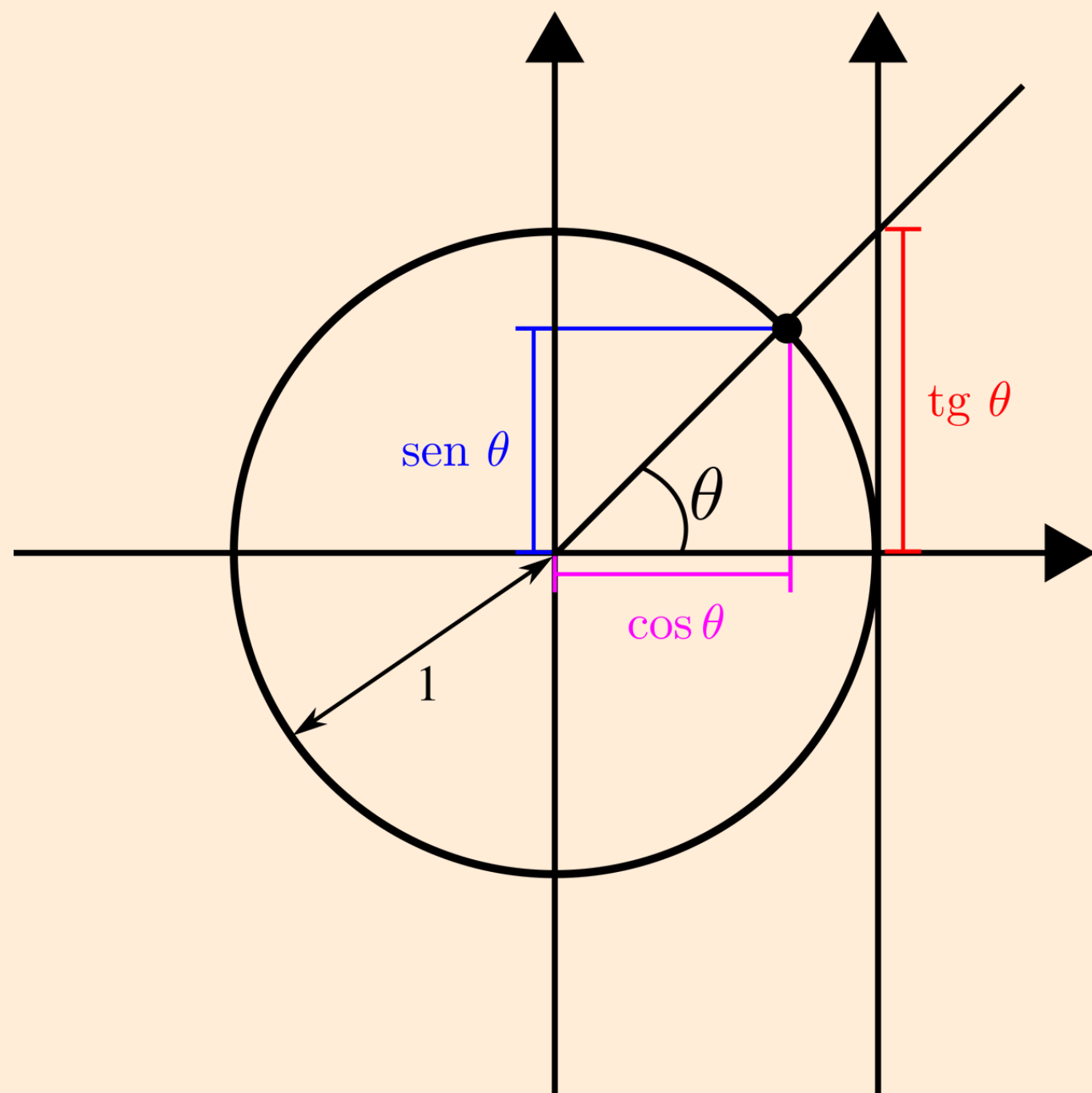
$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a}$$

Ângulo agudo

Algumas funções

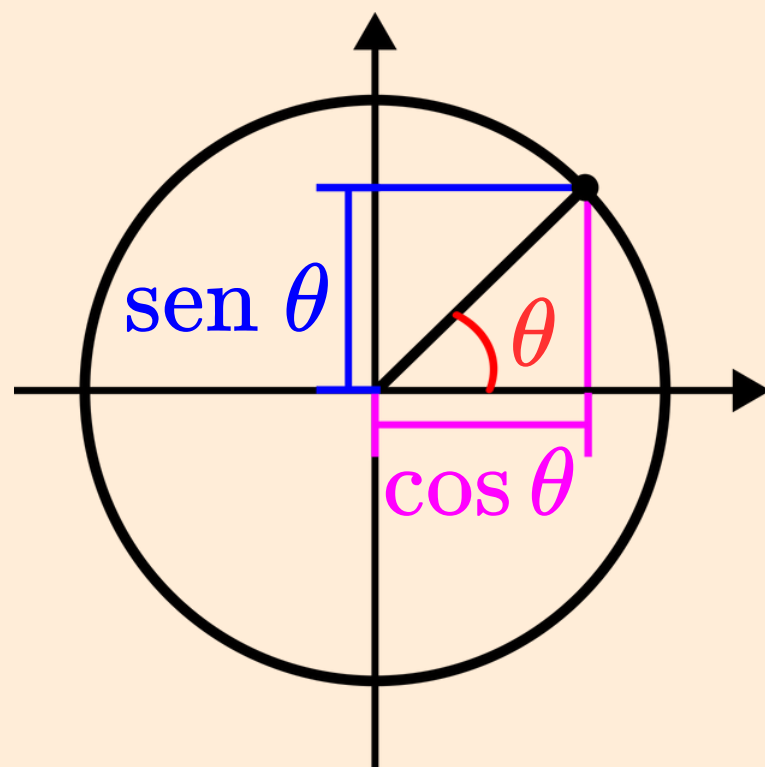
Funções trigonométricas



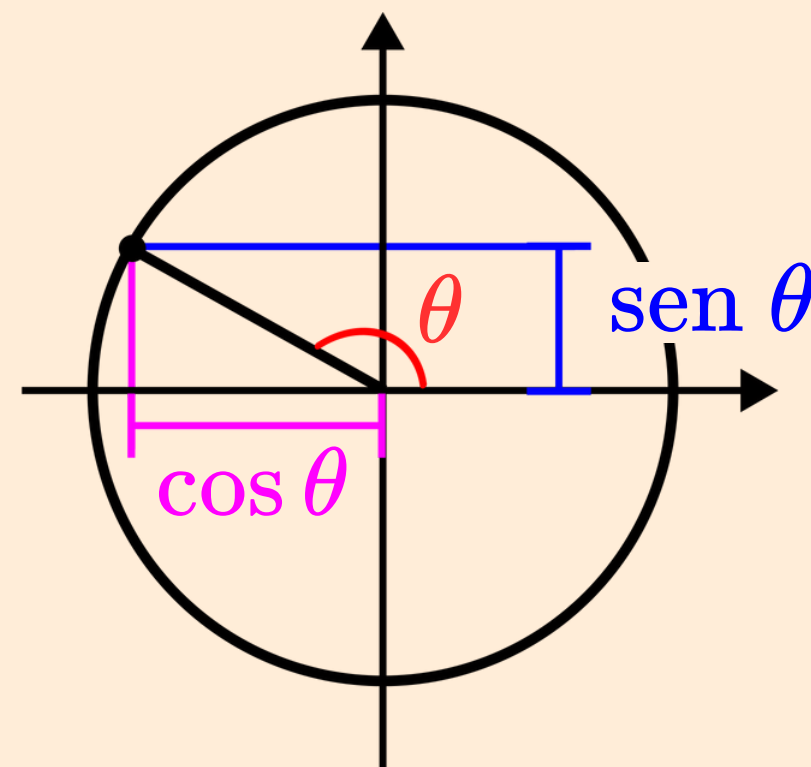
- As definições das funções seno e cosseno podem ser generalizadas para ângulos obtusos e negativos

Algumas funções

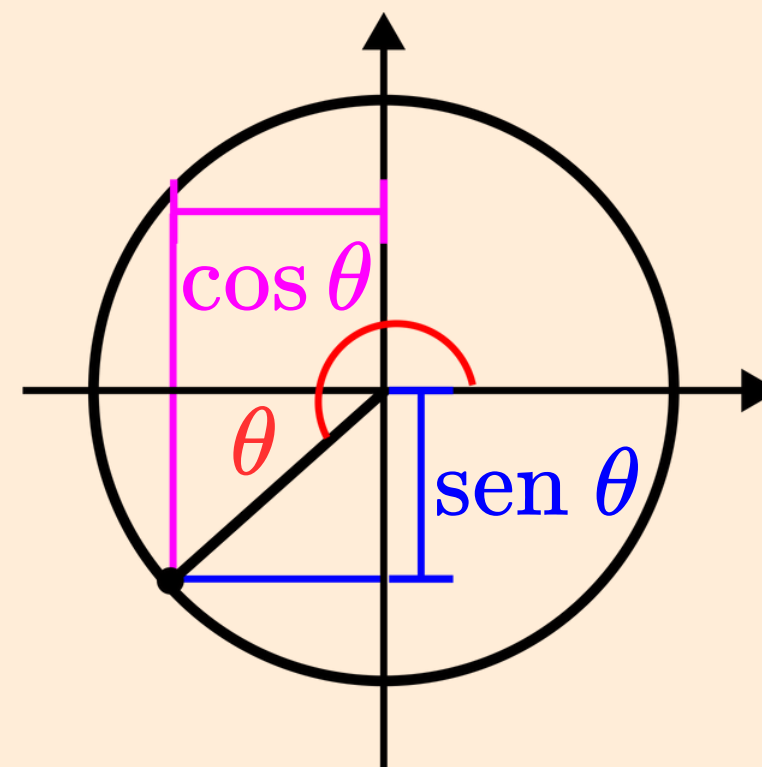
Funções trigonométricas



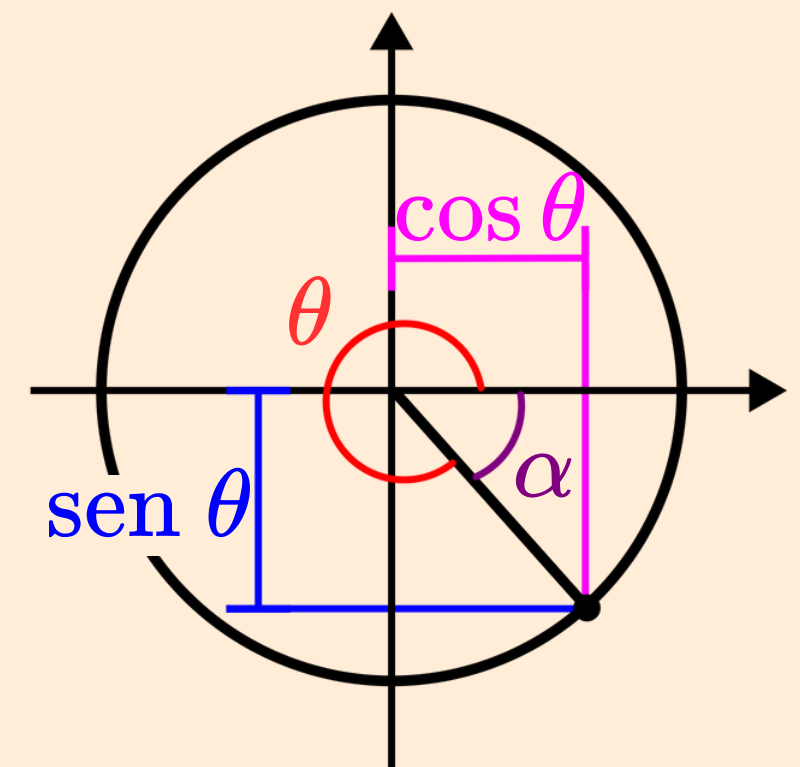
$$\begin{aligned}\theta &> 0 \\ \text{sen } \theta &> 0 \\ \text{cos } \theta &> 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta &> 0 \\ \text{sen } \theta &> 0 \\ \text{cos } \theta &< 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta &> 0 \\ \text{sen } \theta &< 0 \\ \text{cos } \theta &< 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\theta &> 0, \alpha < 0 \\ \text{sen } \theta &= \text{sen } \alpha < 0 \\ \text{cos } \theta &= \text{cos } \alpha < 0\end{aligned}$$

Algumas funções

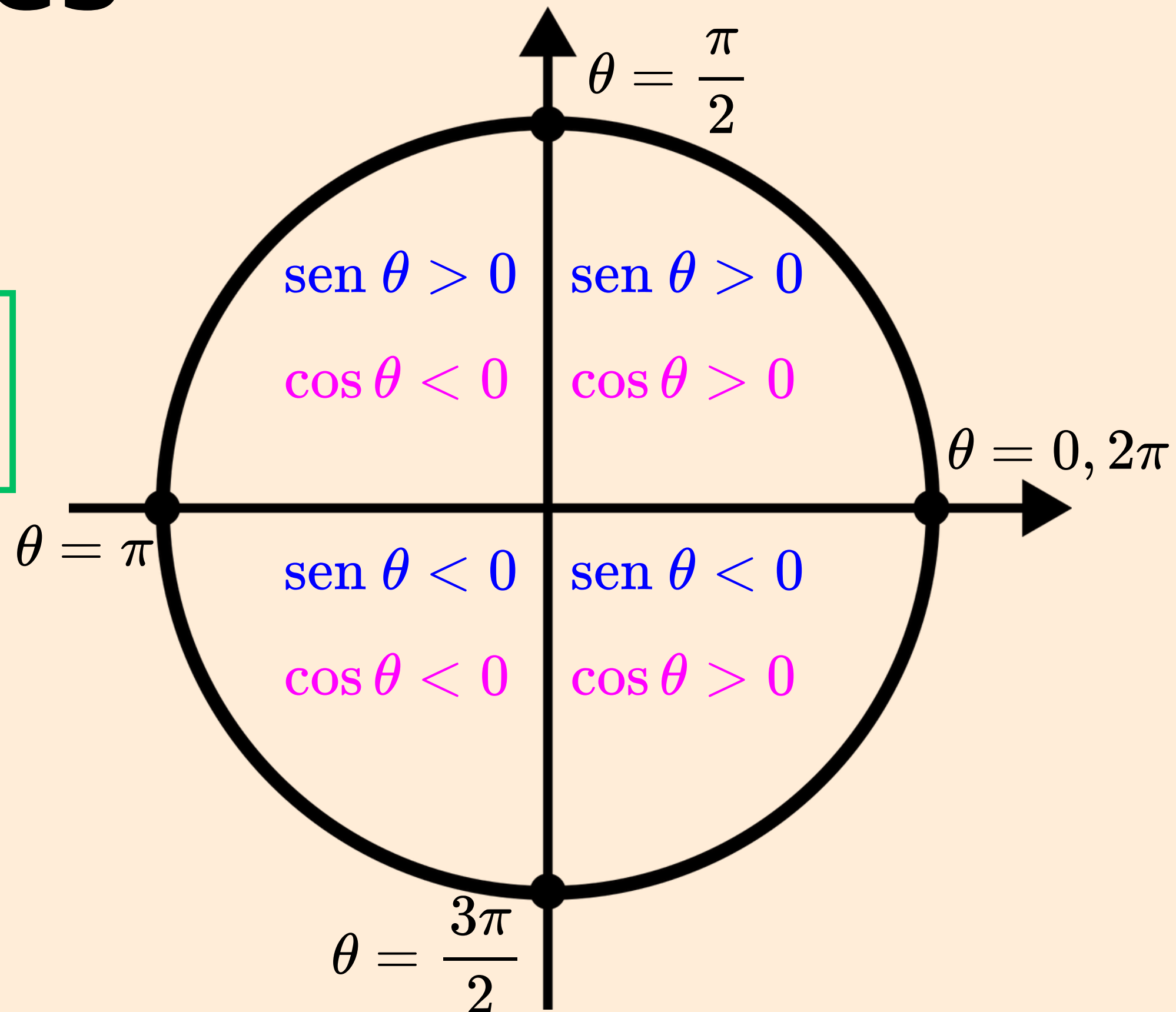
Funções trigonométricas

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

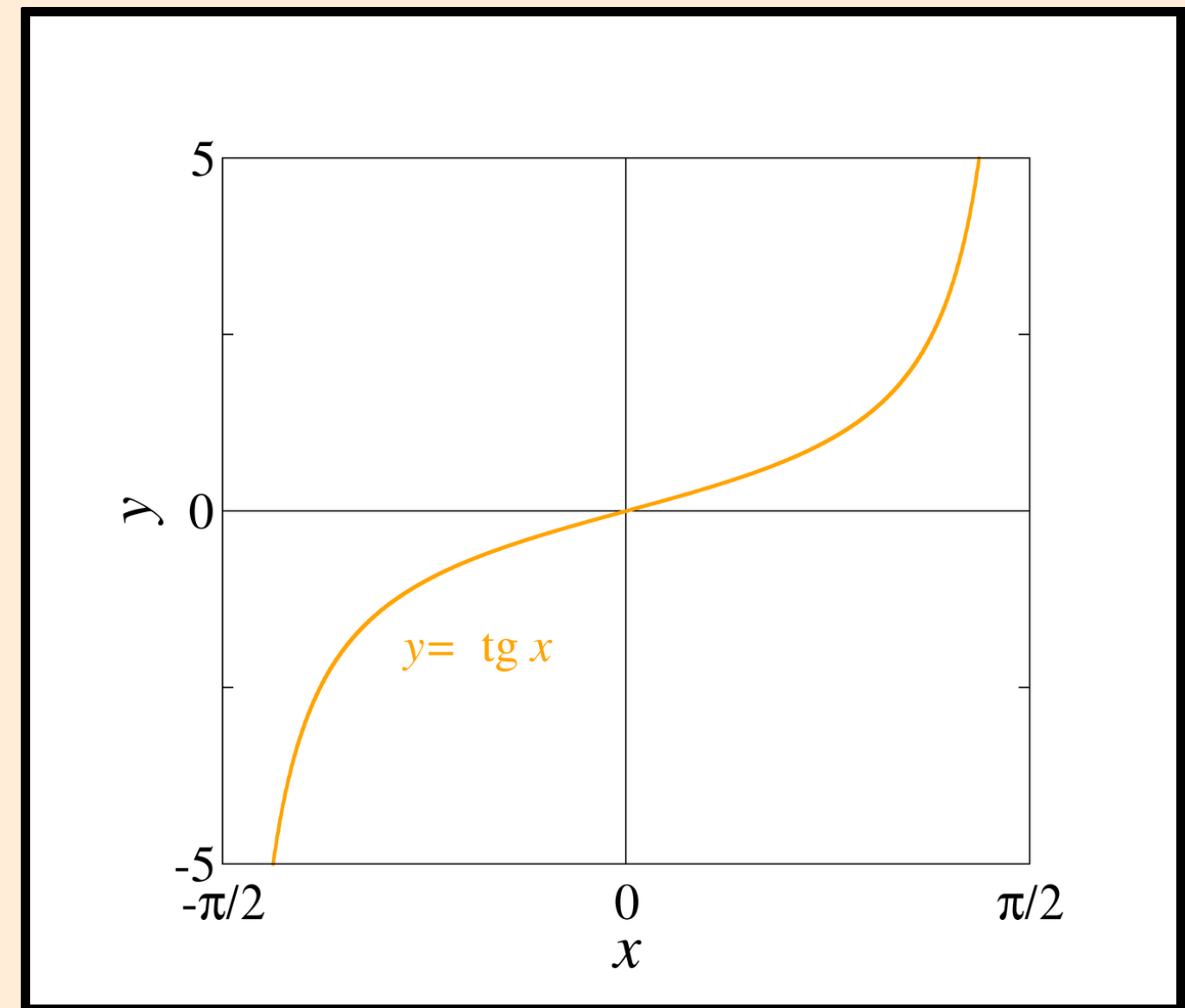
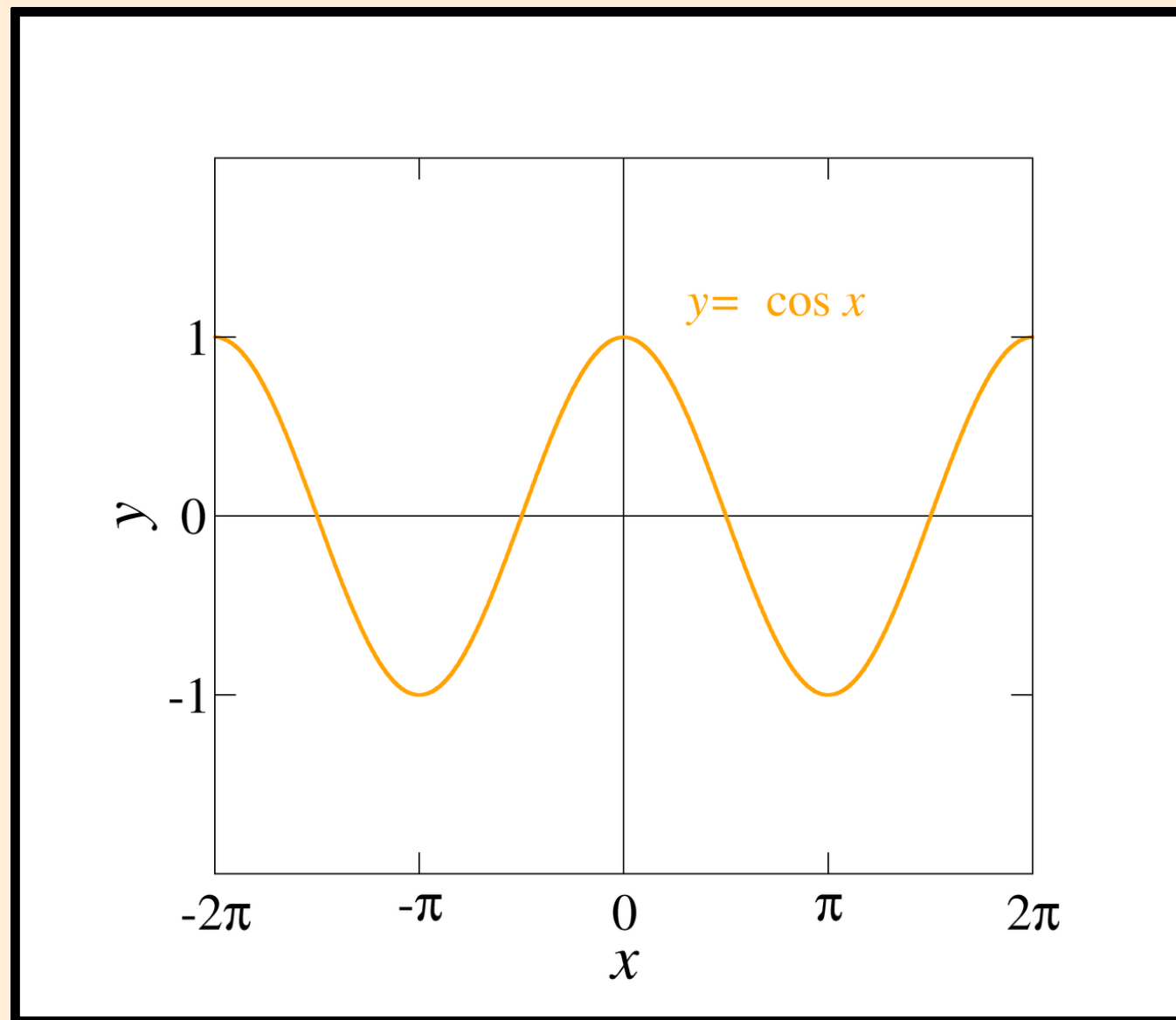
$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$



Algumas funções

Funções trigonométricas



Algumas funções

Funções trigonométricas: algumas relações

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$\cos(\pi + x) =$$

$$(\text{sen } t + \cos t)^2 - \text{sen } 2t =$$

Algumas funções

Funções trigonométricas: algumas relações

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 - \operatorname{sen} 2t = 1$$

Algumas funções

Funções exponenciais

$$f(x) = a^x$$

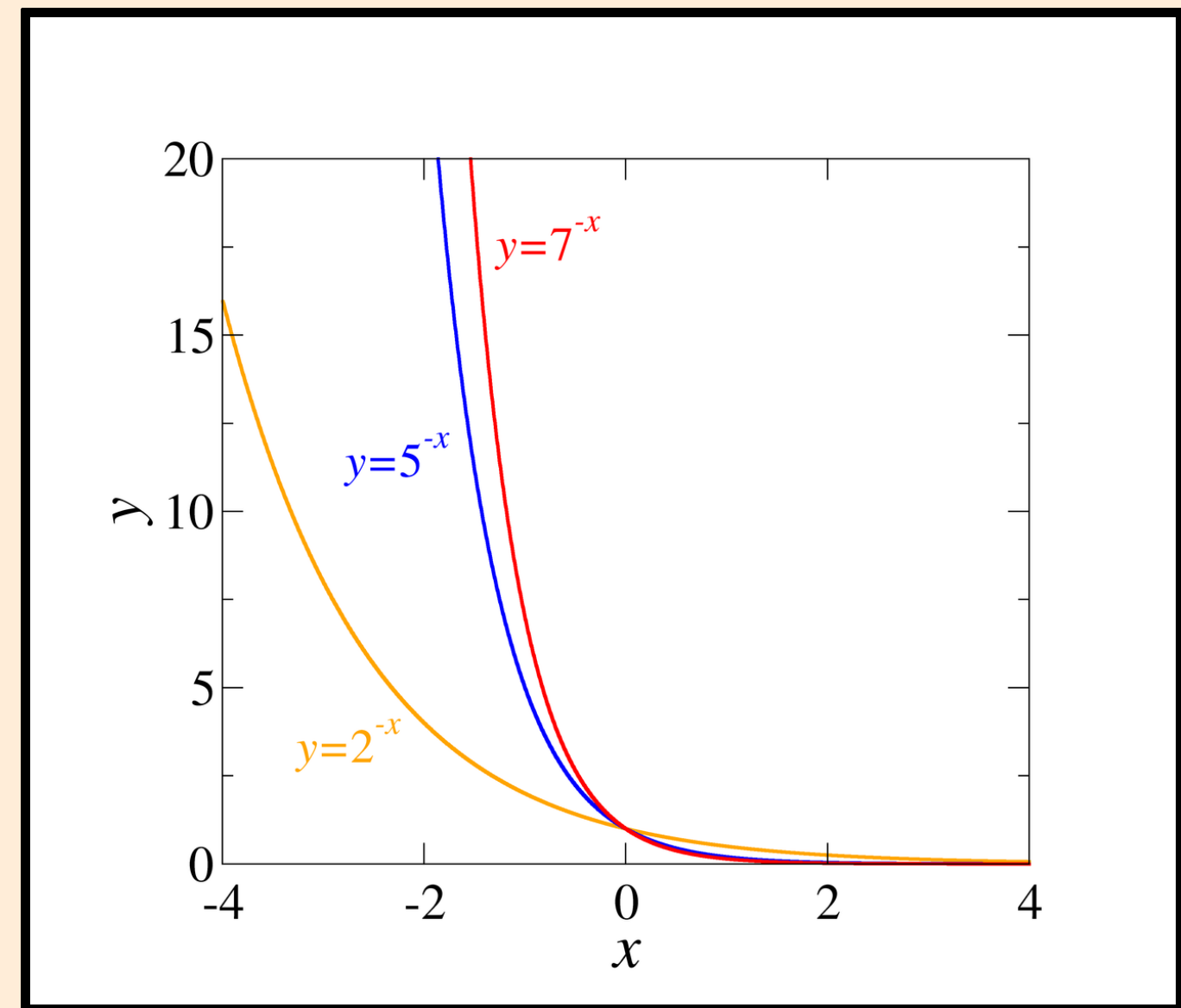
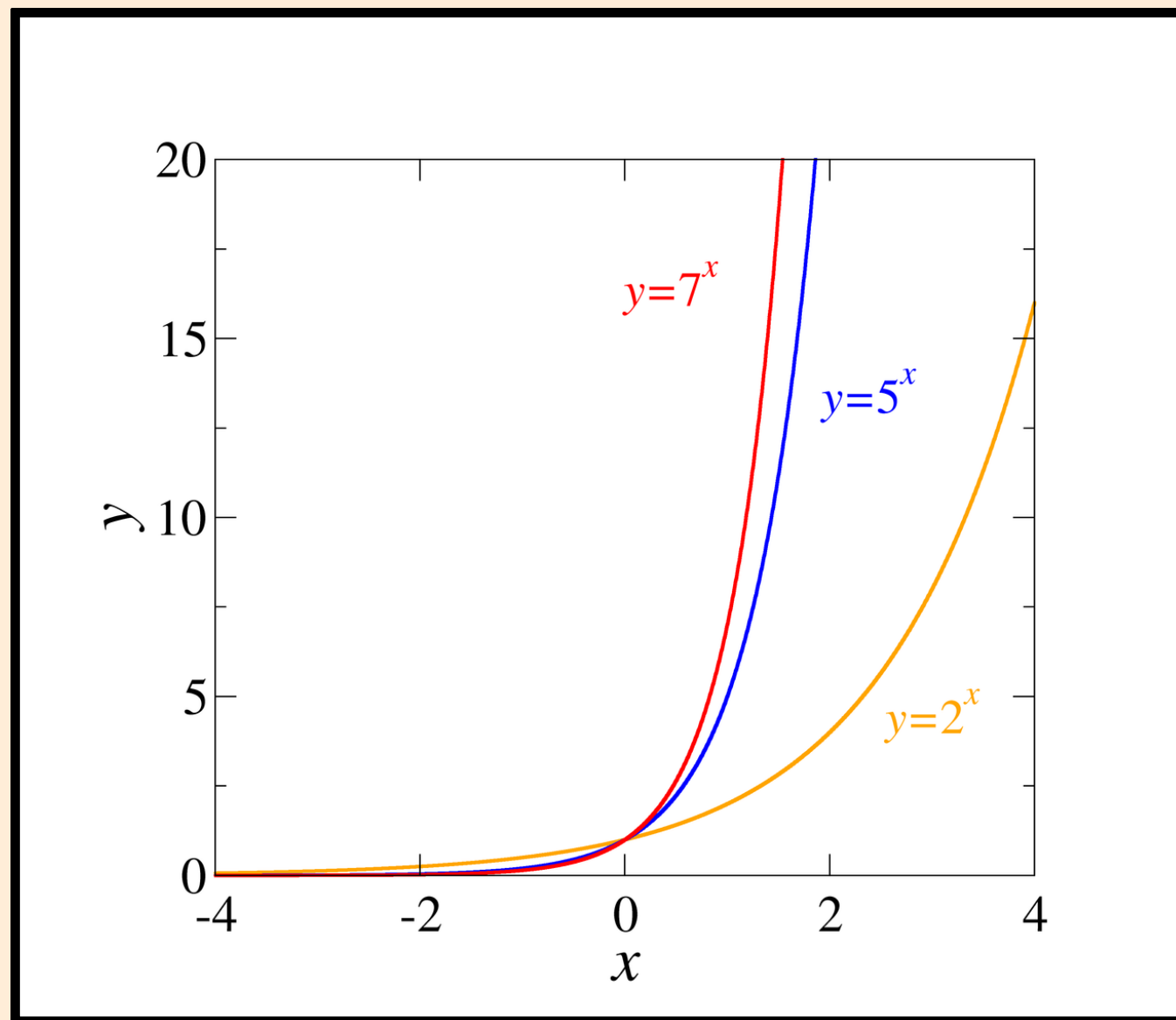
$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1$$

Domínio: $(-\infty, \infty)$

Imagem: $(0, \infty)$

Algumas funções

Funções exponenciais



Algumas funções

Função exponencial natural

$$f(x) = e^{kx}$$

$k > 0 \rightarrow$ **crescimento**

$k < 0 \rightarrow$ **decaimento**

Algumas funções

Função exponencial natural - Exemplo prático

Considerando que uma pessoa fez um depósito de 100 reais. A partir disso, este valor está sendo remunerado com juros cumulativos pagos anualmente a uma taxa de 5,5%. Pressupondo que esse foi o único depósito, determinar uma função que descreva a quantia A na conta em função de x anos transcorridos

Algumas funções

Função exponencial natural - Exemplo prático

Considerando que uma pessoa fez um depósito de 100 reais. A partir disso, este valor está sendo remunerado com juros cumulativos pagos anualmente a uma taxa de 5,5%. Pressupondo que esse foi o único depósito, determinar uma função que descreva a quantia A na conta em função de x anos transcorridos

$$A(x) = 100 \cdot (1,055)^x$$

Algumas funções

Função logarítmica

$$f(x) = \log_a x$$

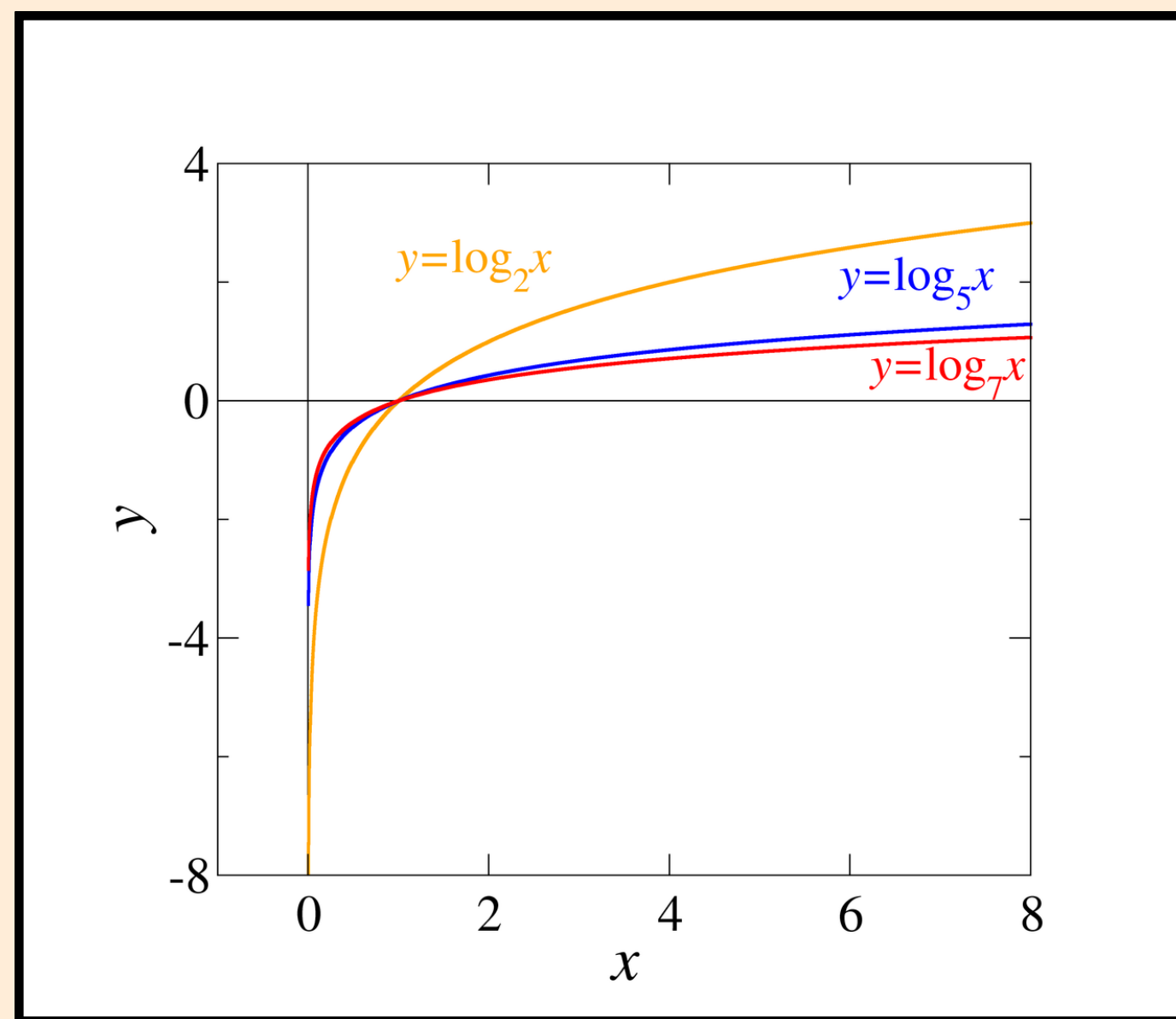
$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Domínio: $(0, \infty)$

Imagem: $(-\infty, \infty)$

Algumas funções

Função logarítmica



$$f(x) = \log_a x$$

Algumas funções

Função logarítmica: relembrando algumas regras de logaritmos

$$\frac{1}{3} \ln(x+2)^3 + \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$$

Algumas funções

Função logarítmica: relembrando algumas regras de logaritmos

$$\frac{1}{3}\ln(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2+3x+2)^2] = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$$

Função composta

- A composição é um método de combinar funções

Definição: Se f e g são funções, a **função composta**, representada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Função composta

Exemplo

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$(f \circ f)(x) =$$

$$(g \circ g)(x) =$$

Função composta

Exemplo

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

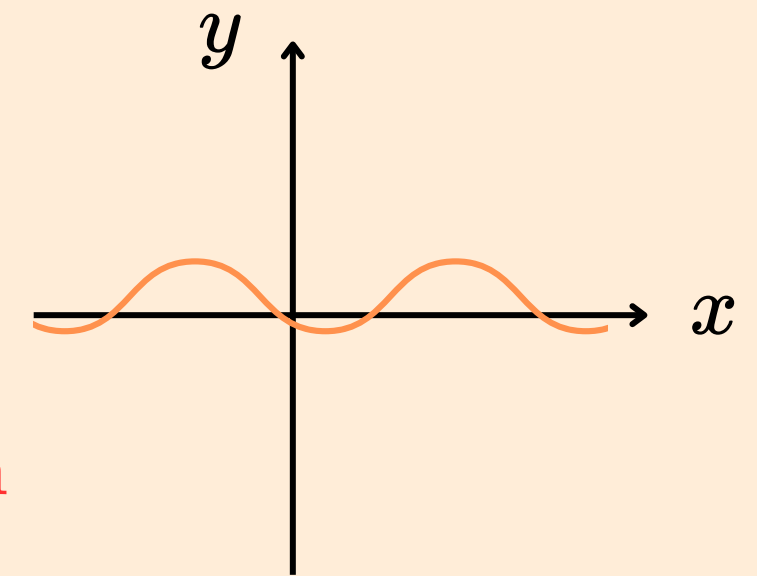
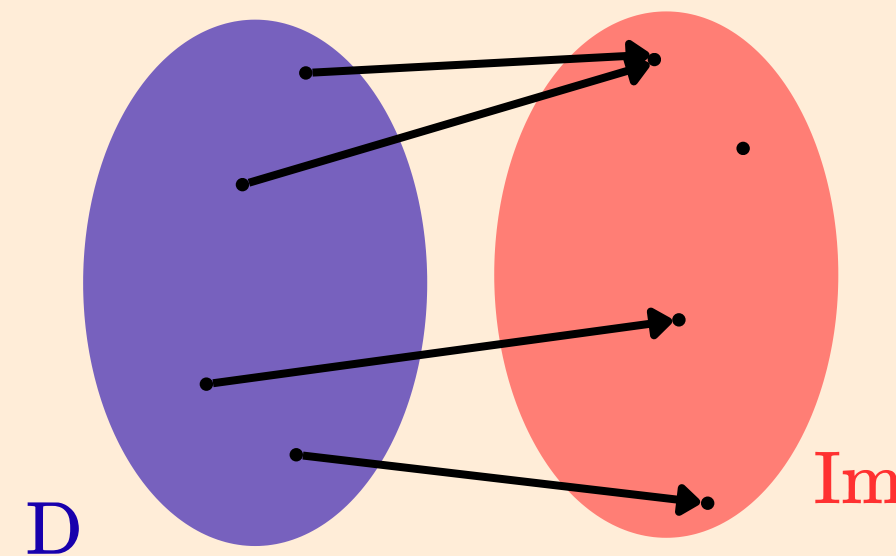
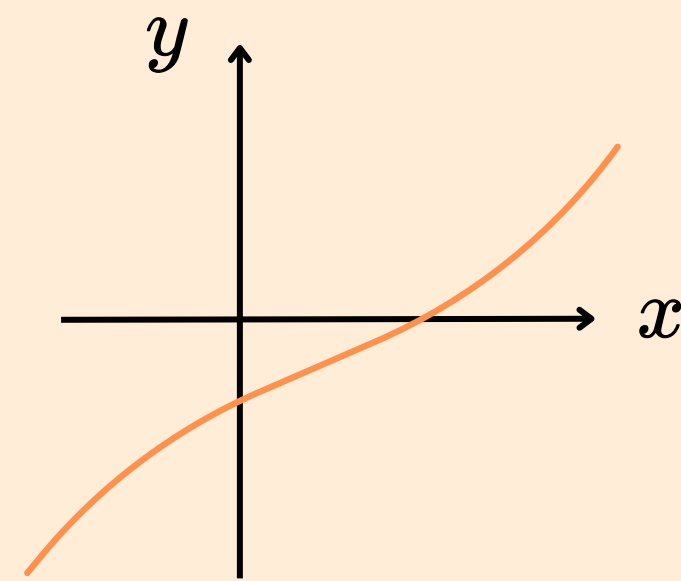
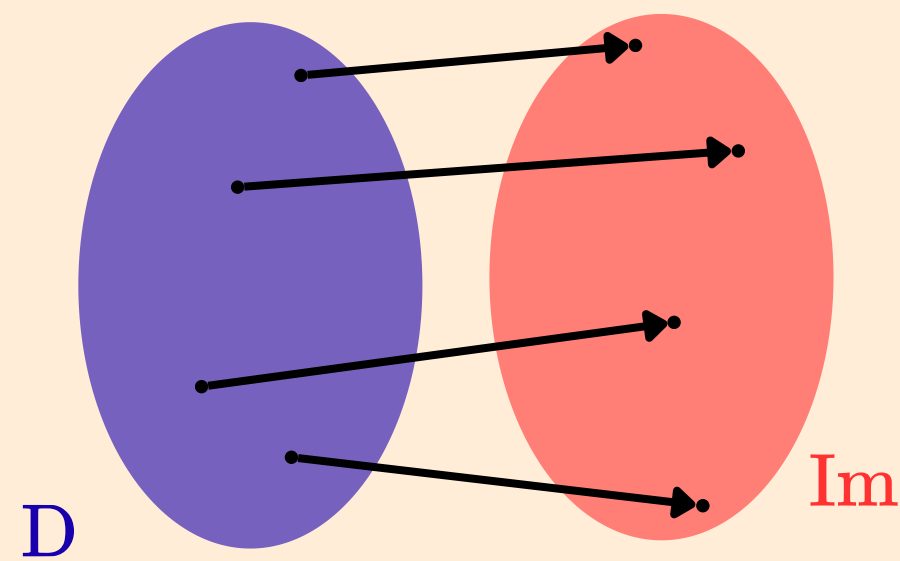
$$(f \circ f)(x) = x^{1/4}$$

$$(g \circ g)(x) = x + 2$$

Função inversa

Funções injetoras

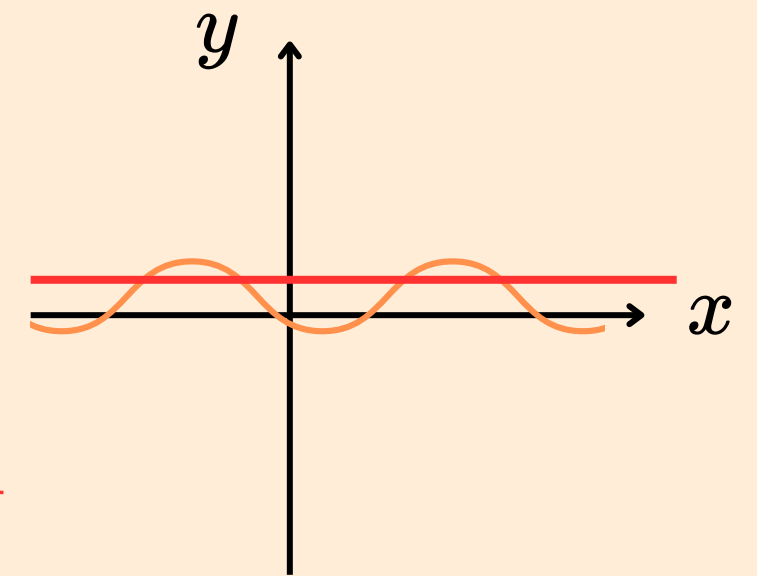
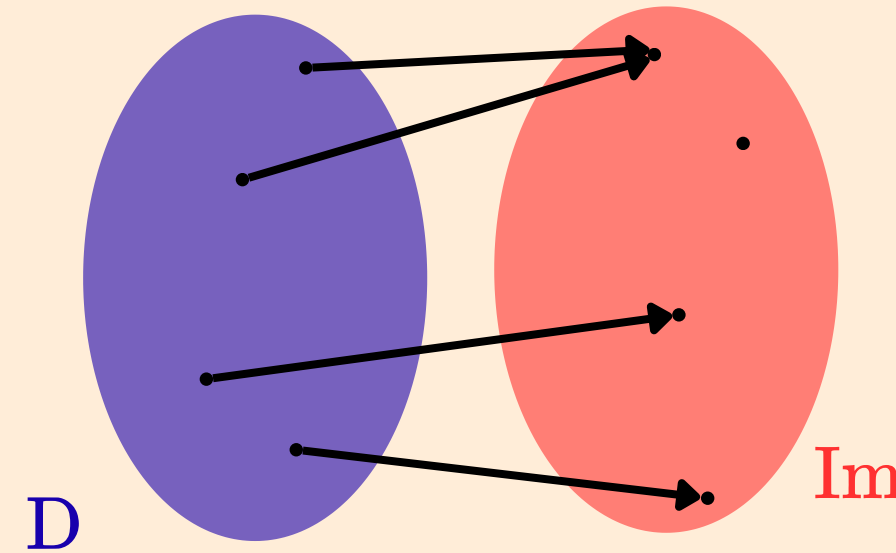
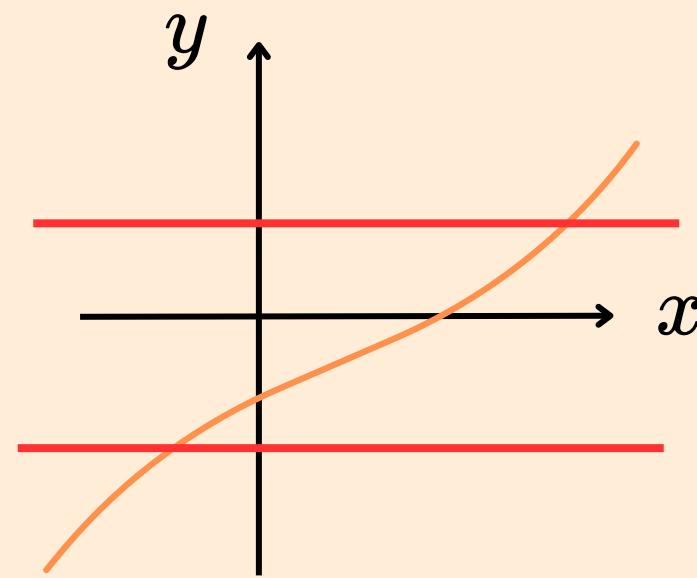
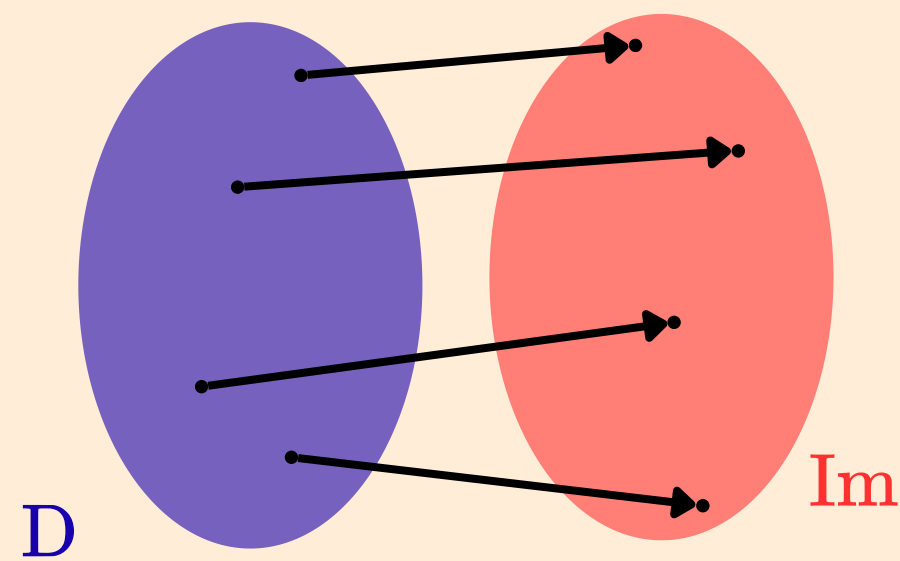
Definição: Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D



Função inversa

Funções injetoras

Definição: Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D



Função inversa

Definição: Seja $f(x)$ uma função **injetora** em um domínio D com imagem Im . A **função inversa** f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{se} \quad f(b) = a$$

Domínio: Im de f

Imagem: D de f

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{e} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 \quad \longrightarrow \quad f^{-1}(x) = 2x - 2$$

Função inversa

A função **logarítmica** é a função inversa da função **exponencial**

$$f(x) = \log_a x, \quad f^{-1}(x) = a^x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \log_a a^x = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = a^{\log_a x} = x$$

Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$\operatorname{sen} x \rightarrow D : \quad \left[-\pi/2, \pi/2\right]$$

$$\operatorname{cos} x \rightarrow D : \quad [0, \pi]$$

$$\operatorname{tg} x \rightarrow D : \quad \left(-\pi/2, \pi/2\right)$$

$$\operatorname{cotg} x \rightarrow D : \quad (0, \pi)$$

$$\operatorname{sec} x \rightarrow D : \quad \left[0, \pi/2\right) \cup \left(\pi/2, \pi\right]$$

$$\operatorname{cossec} x \rightarrow D : \quad \left[-\pi/2, 0\right) \cup \left(0, \pi/2\right]$$

Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{sen} y$$

$$y = \operatorname{cos}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{cos} y$$

$$y = \operatorname{tg}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{tg} y$$

$$y = \operatorname{cotg}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{cotg} y$$

$$y = \operatorname{sec}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{sec} y$$

$$y = \operatorname{cossec}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{cossec} y$$

Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{sen} y$$

$$\cos^{-1} x \neq (\cos x)^{-1}$$

$$y = \operatorname{sec}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{sec} y$$

$$y = \operatorname{cossec}^{-1} x \rightarrow x = \operatorname{cossec} y$$

Função inversa

Exemplo

$$z = \text{sen} \left(\text{tg}^{-1} x \right)$$

Função inversa

Exemplo

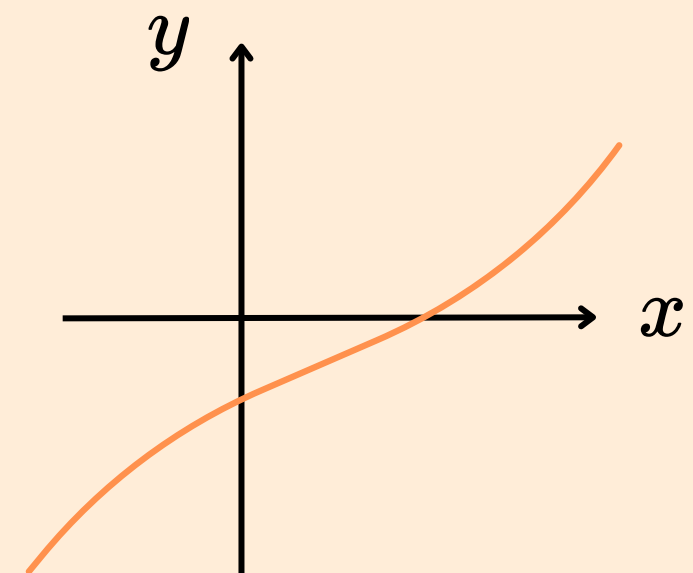
$$z = \operatorname{sen} (\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Propriedades das funções

Função crescente e decrescente

Definição: Uma função definida em um intervalo será **crescente** nesse intervalo se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

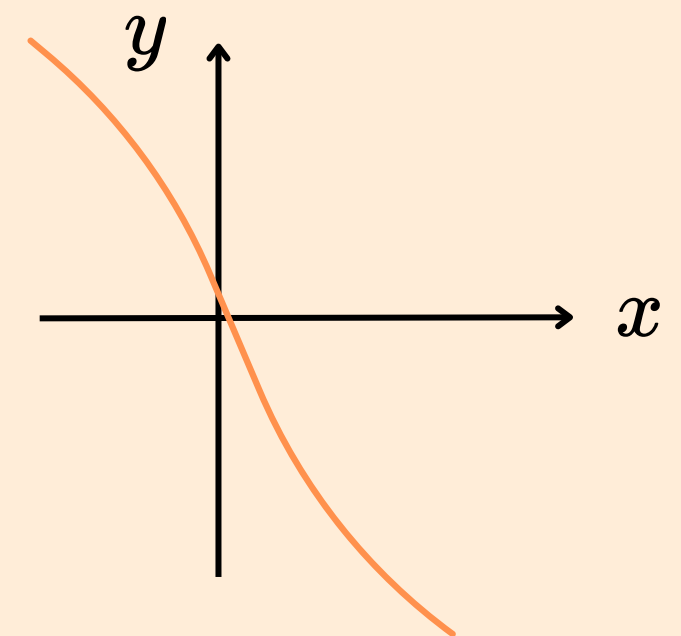


Propriedades das funções

Função crescente e decrescente

Definição: Uma função definida em um intervalo será **decrescente** nesse intervalo se e somente se

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ sempre que } x_1 < x_2$$



Propriedades das funções

Funções pares e ímpares

Definição: Uma função $y = f(x)$ é uma

Função par: $f(-x) = f(x)$

Função ímpar: $f(-x) = -f(x)$

Propriedades das funções

Funções periódicas

Definição: Uma função $y = f(x)$ é periódica se existir um número real p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

Translação de gráficos

Translação vertical $y = f(x) + k$

$k > 0$: **Translação para cima**

$k < 0$: **Translação para baixo**

Translação horizontal $y = f(x + h)$

$h > 0$: **Translação para a esquerda**

$h < 0$: **Translação para a direita**

Translação de gráficos

Translação vertical

$$y = f(x) + k$$

Translação horizontal

$$y = f(x + h)$$

