

Derivadas de funções reais

<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1>

Referências:

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

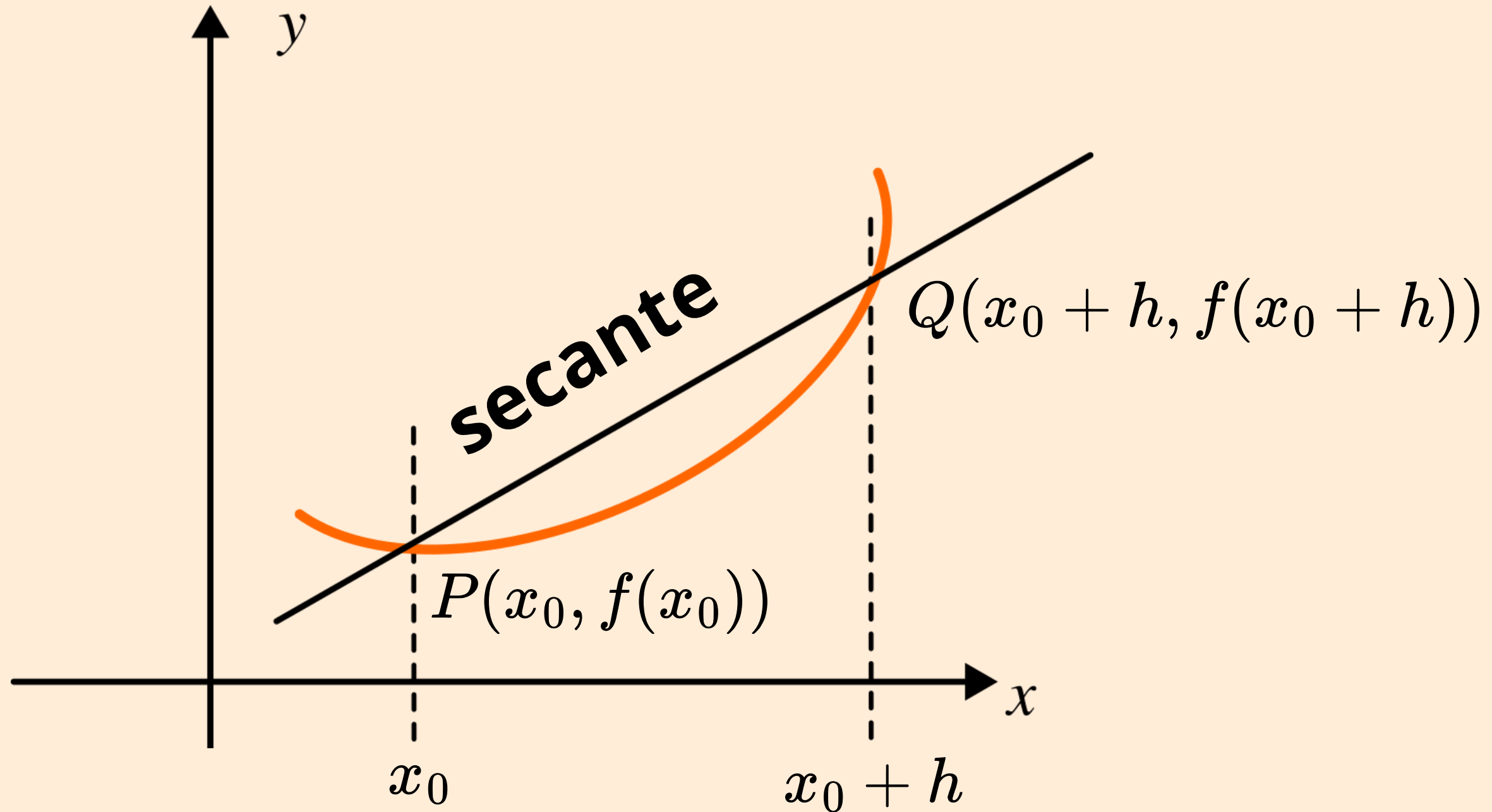
Derivadas de funções reais

Limites típicos na geometria, física e outras áreas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

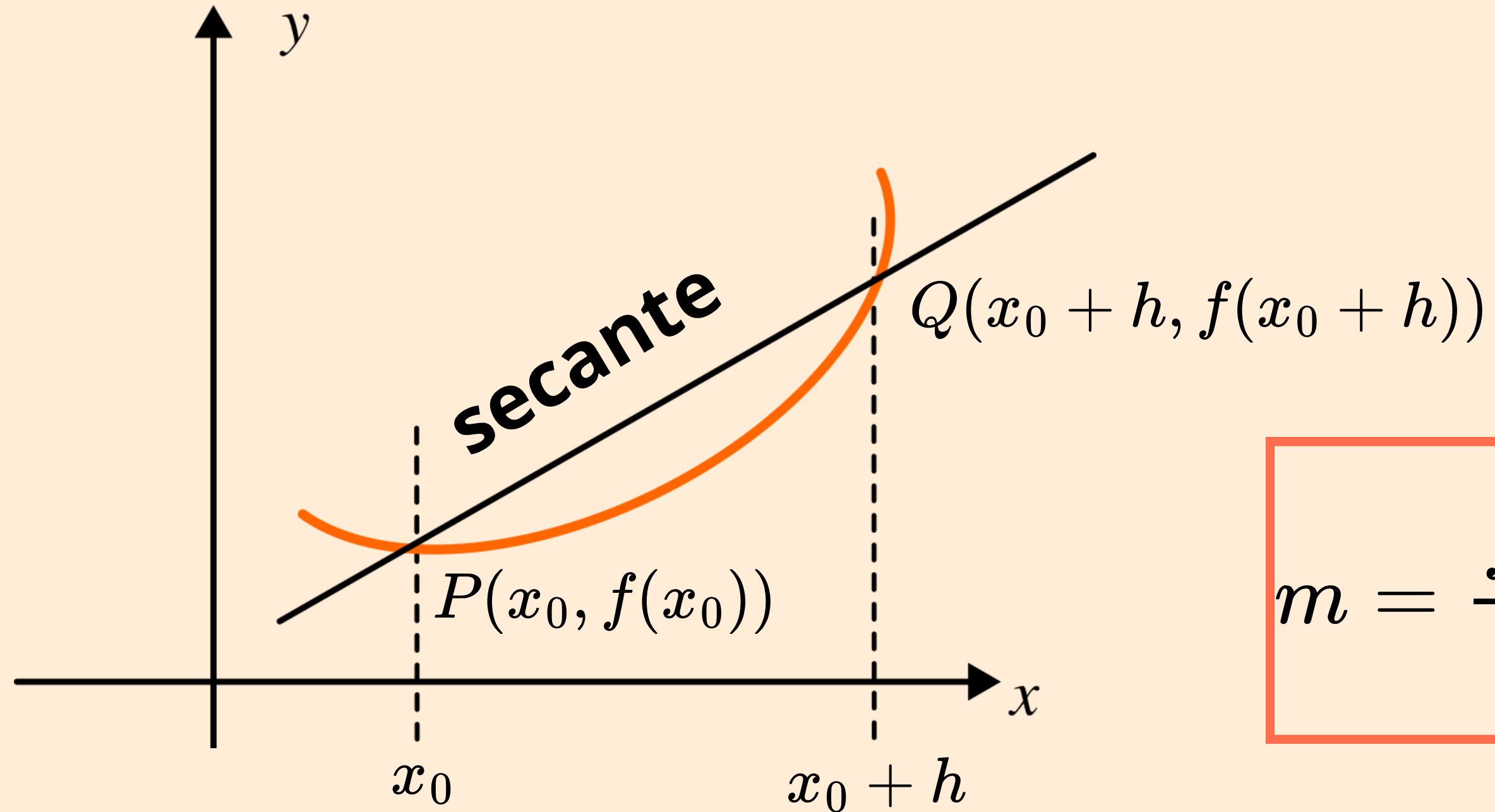
Reta tangente

Limites típicos na geometria, física e outras áreas



Reta tangente

Limites típicos na geometria, física e outras áreas



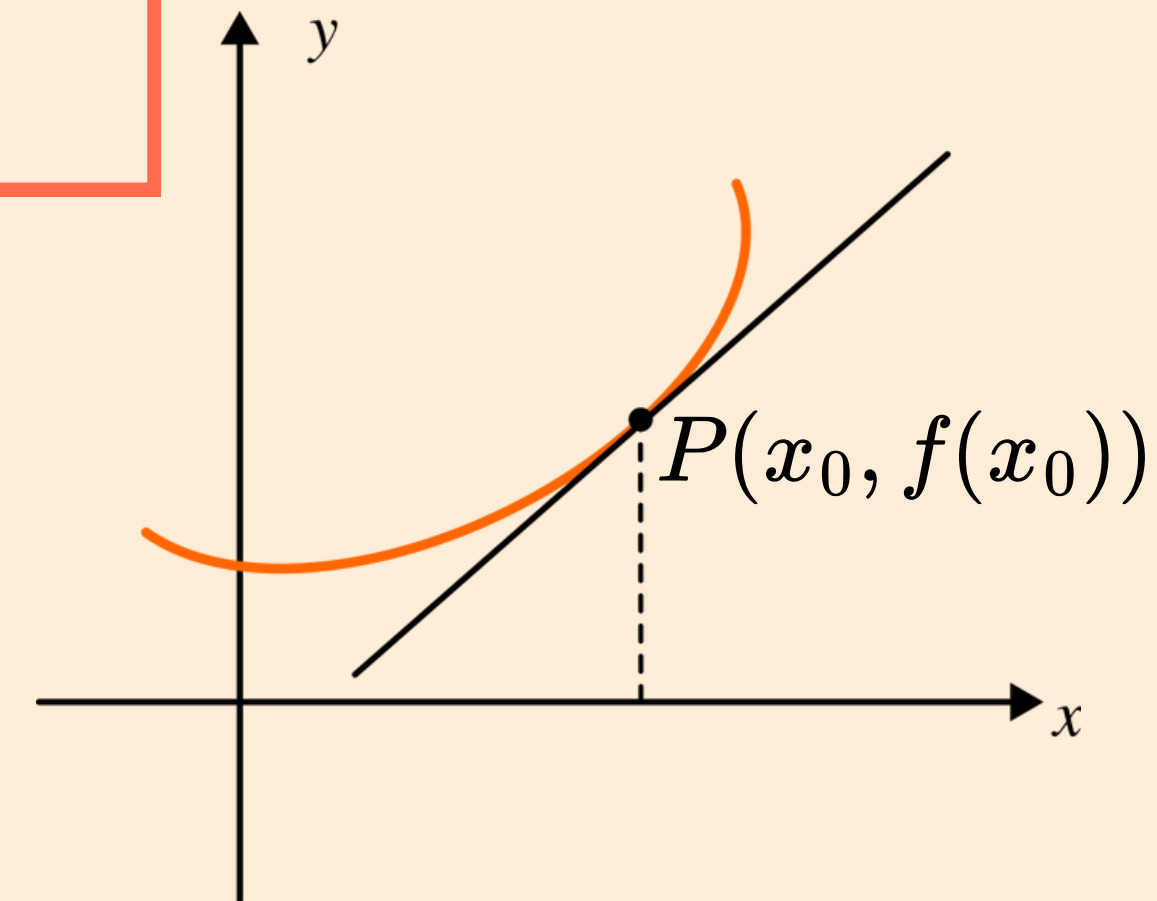
$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Reta tangente

Definição: O **coeficiente angular da curva** $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.



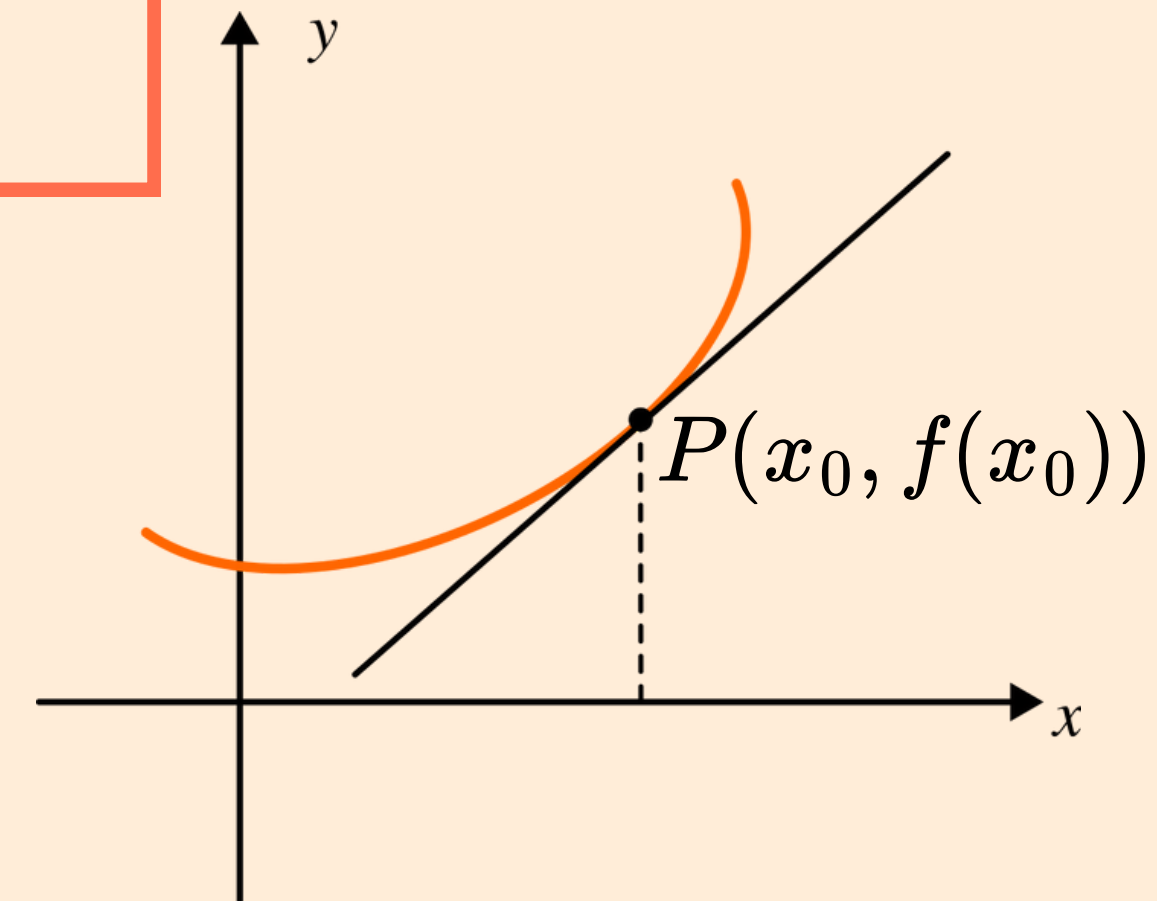
Reta tangente

Definição: O **coeficiente angular da curva** $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

A **reta tangente** à curva é a reta que passa por P e tem esse coeficiente angular



Reta tangente

Exemplo: Determinar o coeficiente angular da curva $y = \frac{1}{x}$ em $x = a \neq 0$

Taxa instantânea de variação

Definição: A **taxa média de variação** de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

Taxa instantânea de variação

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

Esta expressão também é chamada de **razão incremental** ou **diferenças dividida de f em x_0 com incremento h** .

Taxa instantânea de variação

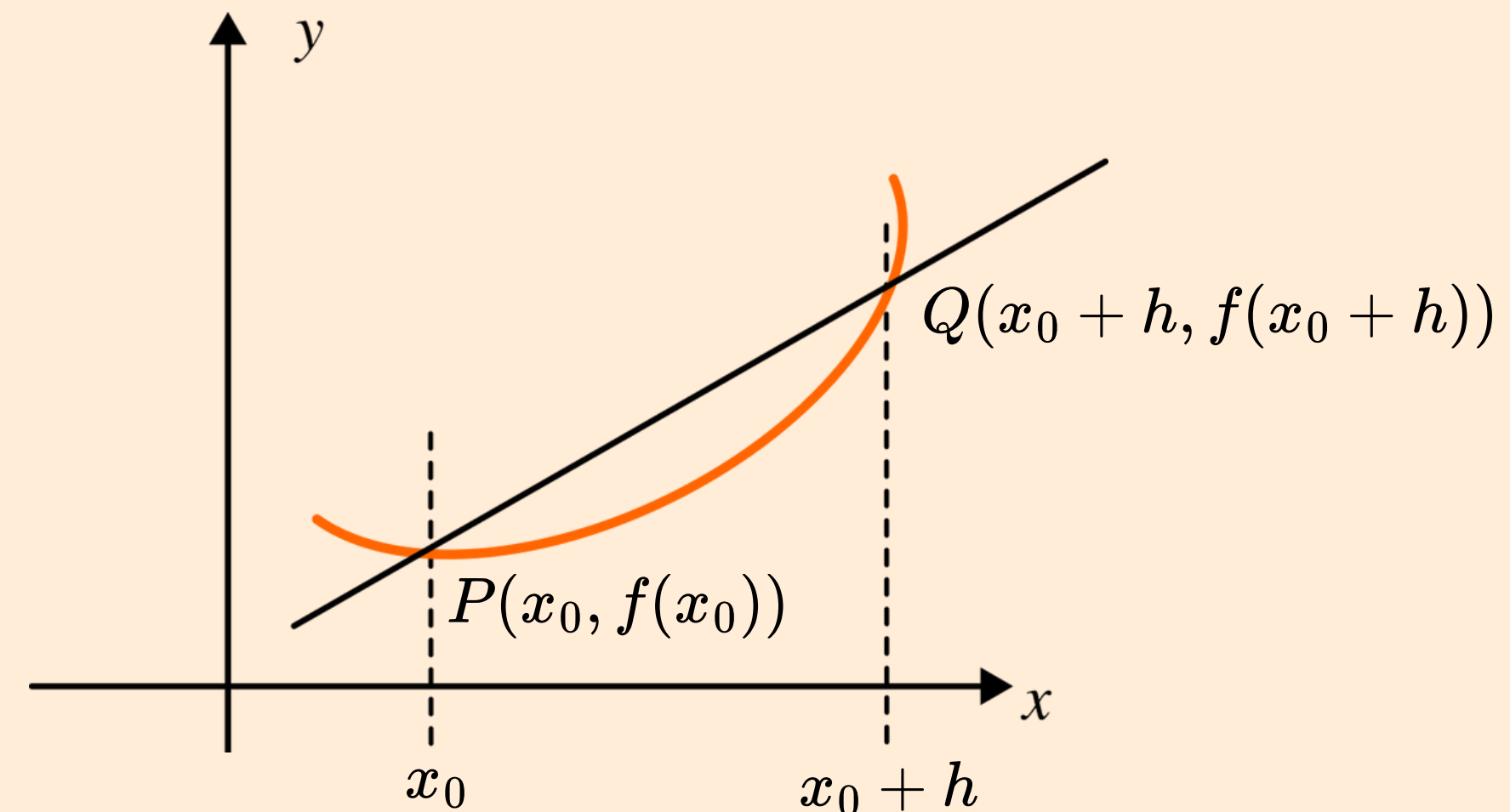
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

Esta expressão também é chamada de **razão incremental** ou **diferenças dividida de f em x_0 com incremento h** .

- Se a razão incremental tem um limite finito definido, esse limite é denominado **derivada de f em x_0**

Derivada

- Tanto o coeficiente da reta tangente quanto a taxa de variação instantânea estão relacionadas com a derivada de f em x_0 .
 - Agora, vamos estudar a derivada como uma **função** derivada de f , considerando o limite em cada ponto do domínio de f .



Derivada

Definição: A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- O **domínio** de f' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe
- Se f' existe para determinado valor de x dizemos que f é **derivável em x**
 - Se f' existe em qualquer ponto no domínio, dizemos que f é **derivável**

Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Se escrevemos $z = x + h$, então $h = z - x$ e $z \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$. Assim, temos a fórmula alternativa

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Derivada

Exemplos:

- $f(x) = \frac{x}{x-1}$

- $f(x) = \sqrt{x}$

Derivada

Notações:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f(x)) = D_x f(x)$$

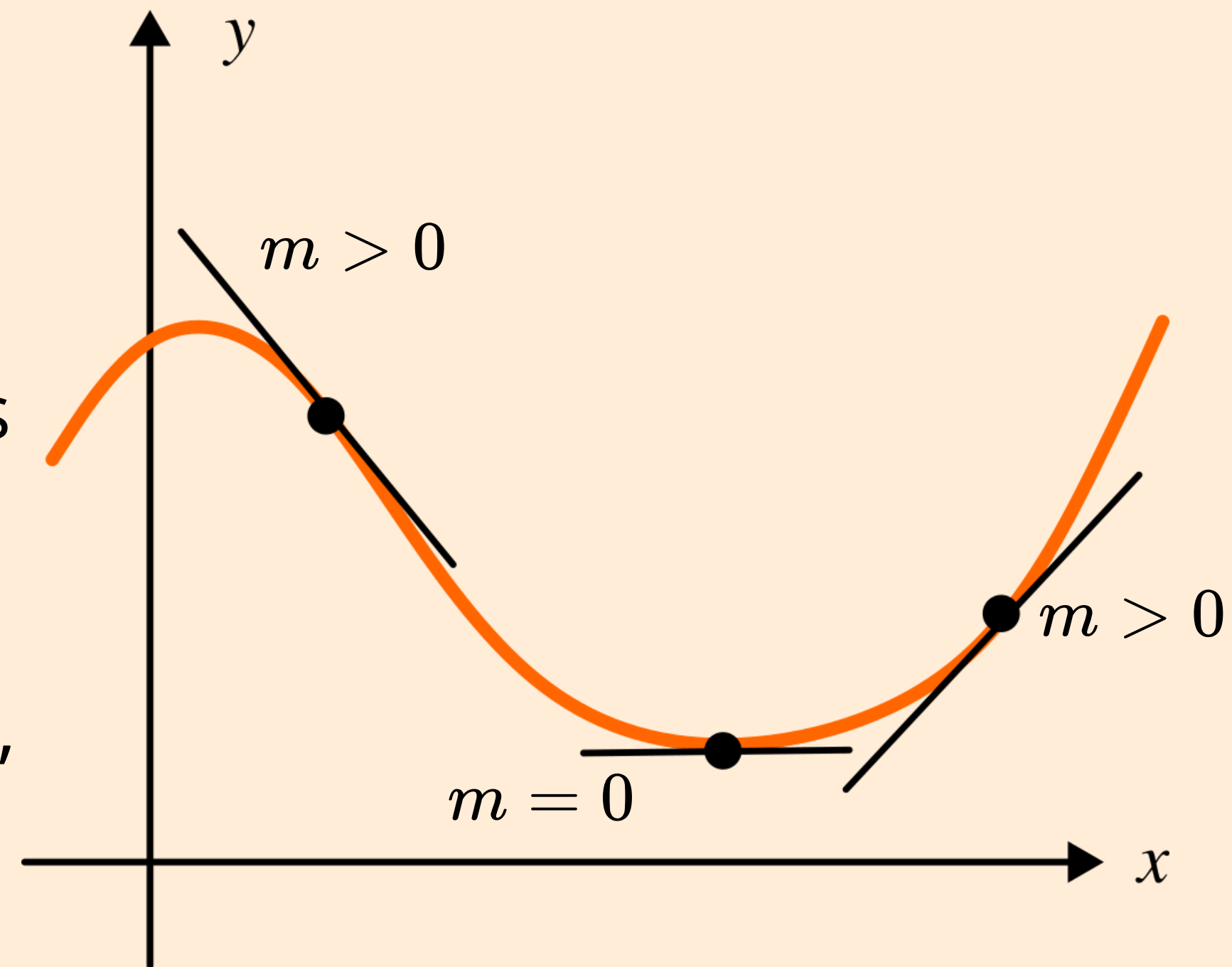
Derivada

Notações: para indicar o valor de uma derivada em um número específico, escrevemos

$$f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

Derivada

Representação gráfica: para representar derivadas, esboçamos retas tangentes em pequenos intervalos. Observando os coeficientes angulares destas retas, verificamos onde a taxa de variação é negativa, positiva ou nula e, conseqüentemente, identificamos onde a taxa de variação é crescente ou decrescente



Derivadas laterais

- Uma função $y = f(x)$ será **derivável** em um intervalo **aberto**, finito ou infinito, se tiver uma derivada em cada ponto do intervalo
- Uma função será **derivável** em um intervalo **fechado** $[a, b]$ se for derivável no interior (a, b) e se os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

existirem nas extremidades.

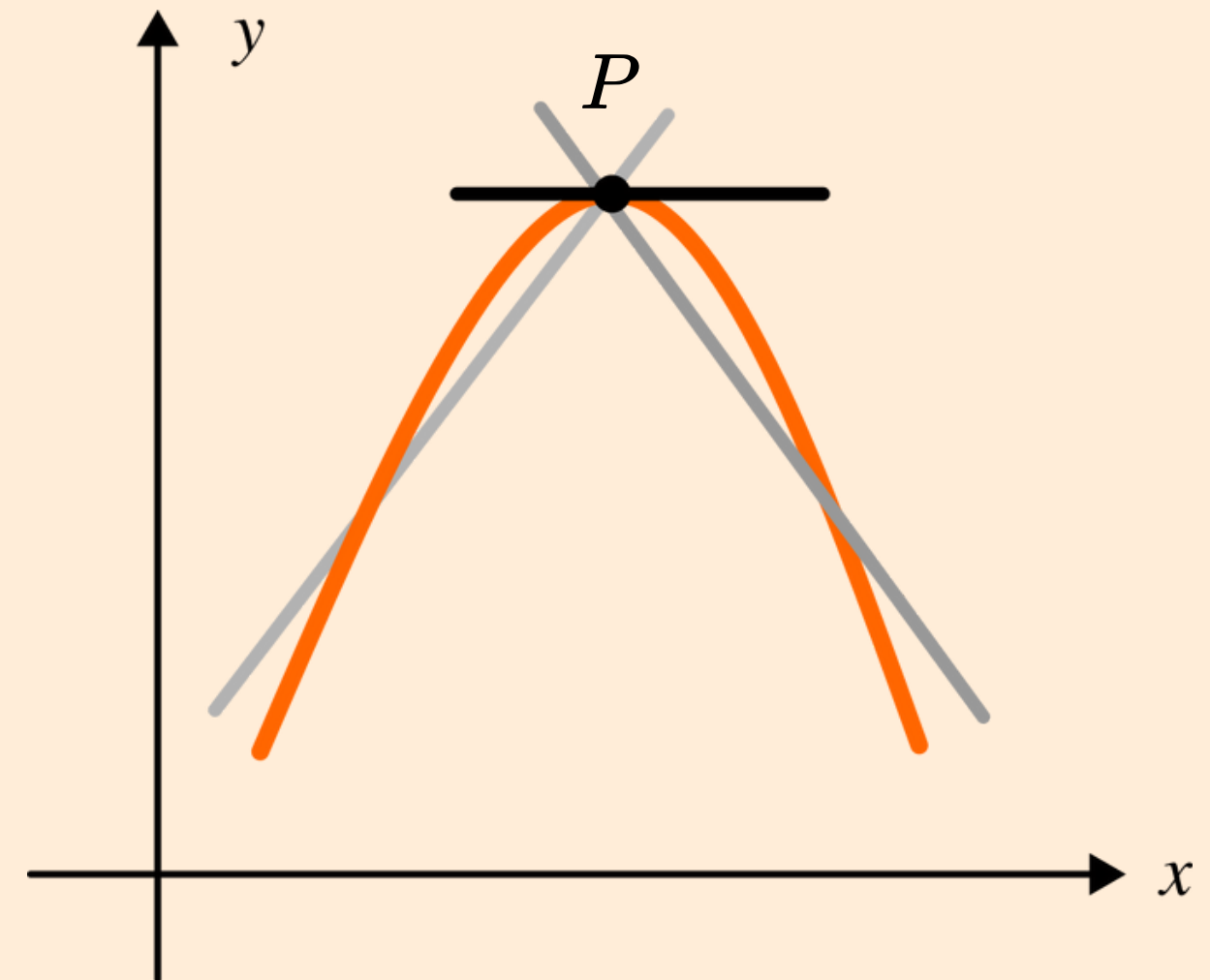
Derivadas laterais

- Derivadas à direita e à esquerda poder definidas em qualquer ponto do domínio de uma função.
 - Uma função terá uma derivada em um ponto se e somente se tiver derivadas à direita e à esquerda nesse ponto e se estas **derivadas laterais forem iguais**.

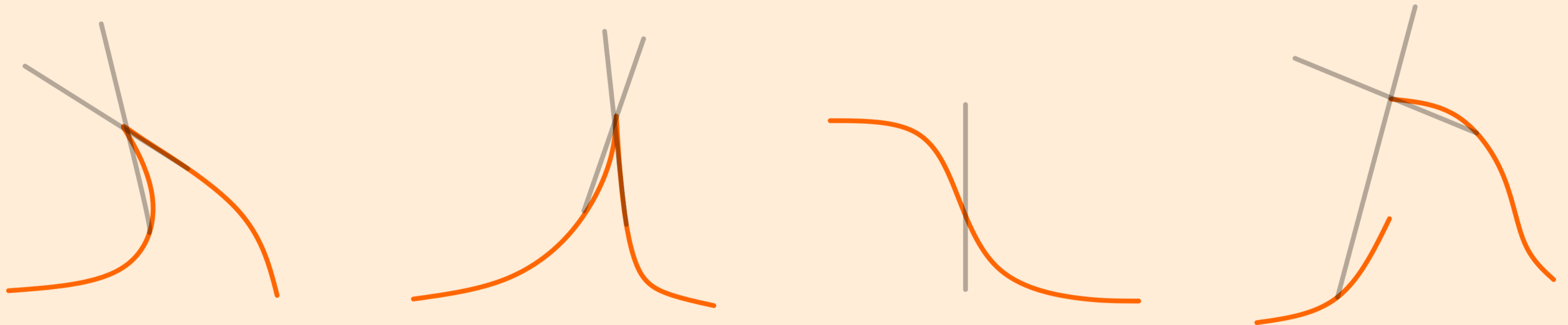
Exemplo: $f(x) = |x|$

Não existência de derivadas em um ponto

- Uma função terá derivada em um ponto x_0 se os coeficientes angulares das retas secantes que passam pelo ponto $P(x_0, f(x_0))$ e um ponto Q próximo no gráfico tenderem a um limite à medida que Q se aproxima de P.



Não existência de derivadas em um ponto

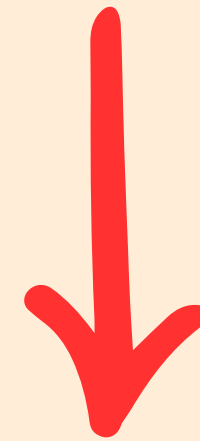


Funções deriváveis e continuidade

Teorema: Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em c .

Funções deriváveis e continuidade

Teorema: Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em c .



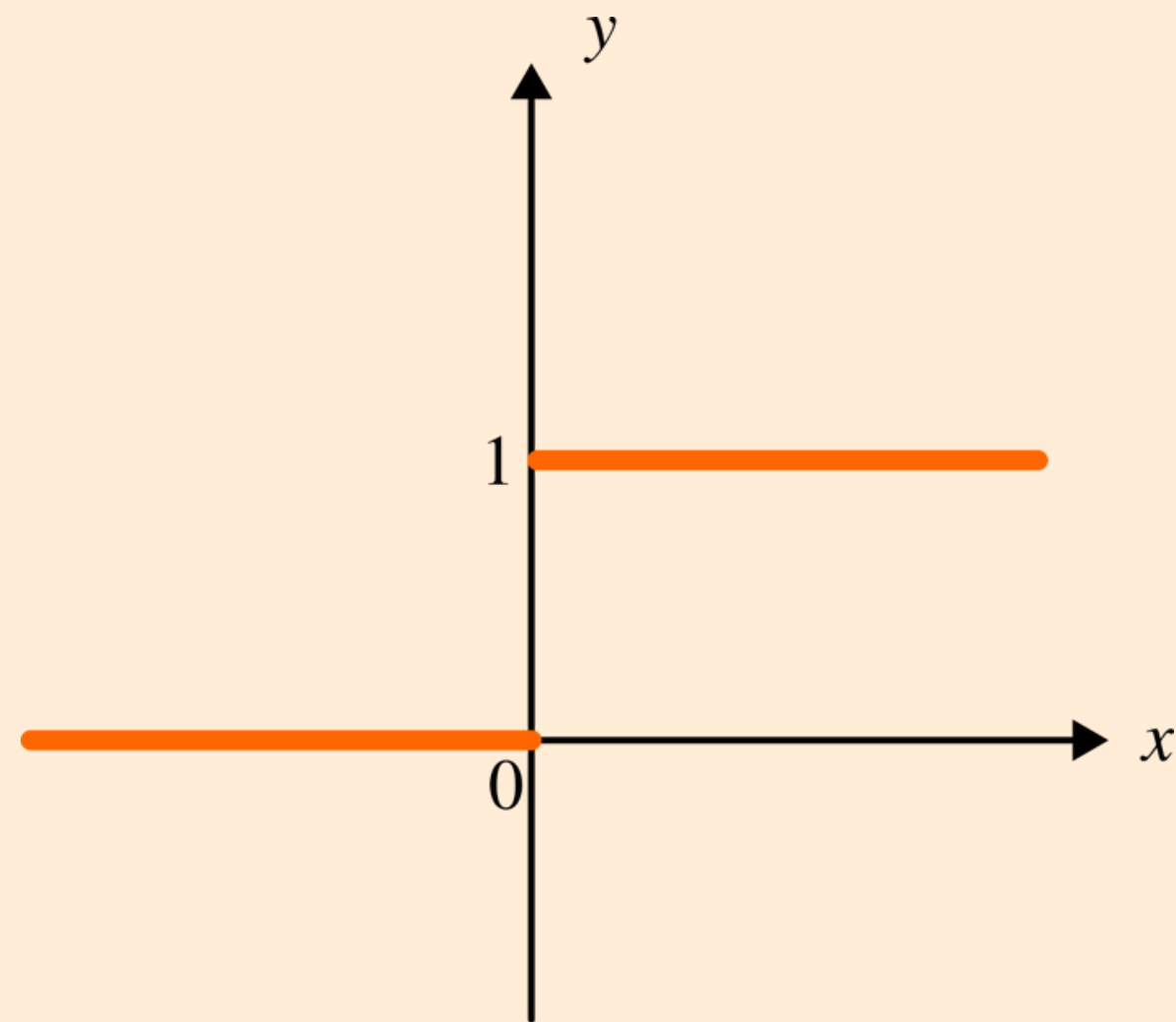
A recíproca não é verdadeira

Funções deriváveis e continuidade

Teorema (Propriedade do valor intermediário): Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f derivável, então sua derivada assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Funções deriváveis e continuidade

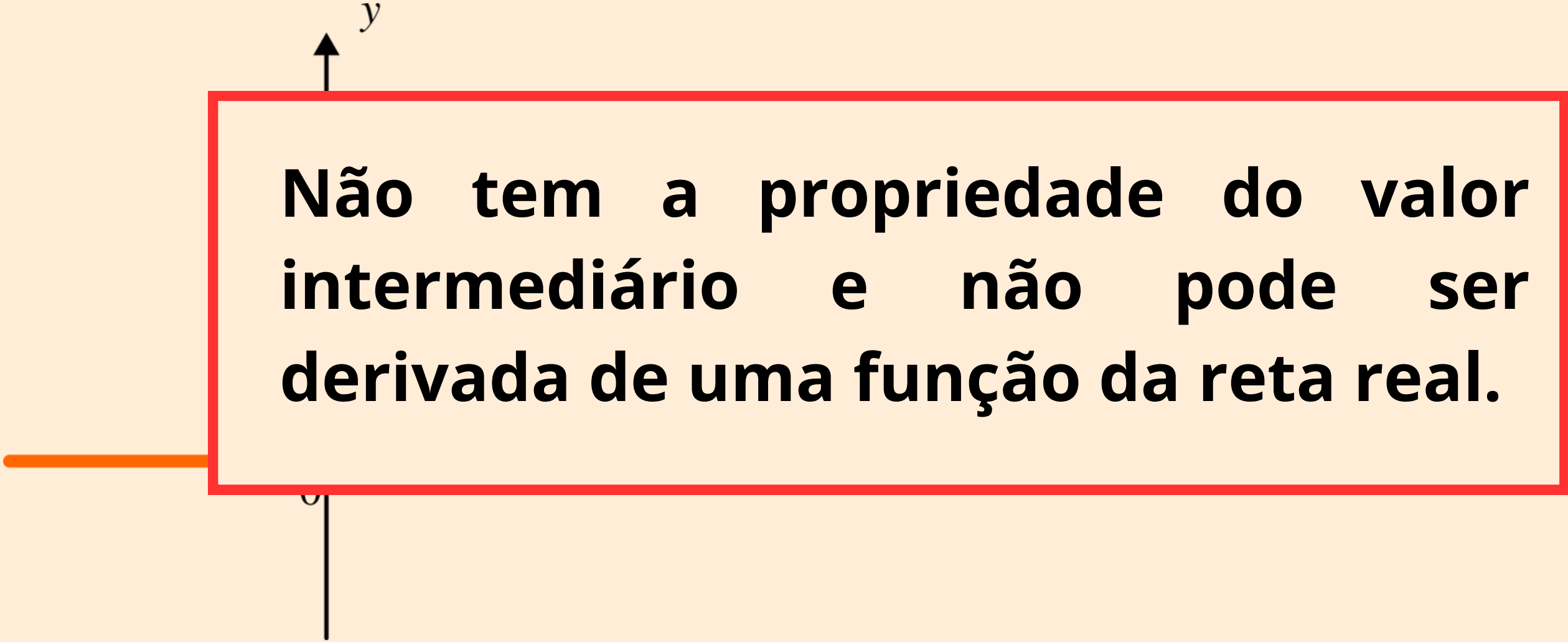
Teorema (Propriedade do valor intermediário): Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f derivável, então sua derivada assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Funções deriváveis e continuidade

Teorema (Propriedade do valor intermediário): Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f derivável, então sua derivada assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.



Não tem a propriedade do valor intermediário e não pode ser derivada de uma função da reta real.

Regras de derivação

Regra 1: Função constante

- Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}c = 0$$

Regras de derivação

Regra 2: Potenciação para inteiros positivos

- Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Regras de derivação

Regra 3: Multiplicação por uma constante

- Se f é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$$

Regras de derivação

Regra 4: Derivada da soma/diferença

- Se u e v são funções deriváveis de x , então a soma/diferença das duas, $u \pm v$, também é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Regras de derivação

Exemplo:

$$y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$$

Regras de derivação

Regra 5: Função exponencial natural

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Regras de derivação

Regra 6: Produto de funções

- Se u e v são funções deriváveis de x , então o produto $u \cdot v$ também é, e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

Regras de derivação

Regra 6: Produto de funções

- Se u e v são funções deriváveis de x , então o produto $u \cdot v$ também é, e

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Regras de derivação

Regra 6: Produto de funções

Exemplo:

$$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$$

Regras de derivação

Regra 7: Quociente de funções

- Se u e v são funções deriváveis de x , e se $v \neq 0$, então o quociente $\frac{u}{v}$ também é derivável em x e

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\frac{du}{dx} v - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Regras de derivação

Regra 8: Potenciação para inteiros negativos

- Se u é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Regras de derivação

Exemplos:

- $y = \frac{4}{x^3}$

- $y = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x)}{x^4}$

Derivadas de ordem superior

- Se $y = f(x)$ é uma função derivável, então sua derivada também é uma função
 - Se $f'(x)$ também for derivável, podemos derivá-la a fim de obter uma nova função, denotada por $f''(x)$ e denominada **segunda derivada**.
 - Assim, podemos obter a **n-ésima derivada**

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo:

- $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Resumo

$$\rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} c = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} cf = c \frac{d}{dx} f$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} (u \cdot v) = u'v + uv'$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$