Derivadas da função logaritmo, funções trigonométricas e regra da cadeia

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1

Referências:

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

Derivadas de e^x e $\ln x$

- **Função** e^x

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

Derivadas de e^x e $\ln x$

- **Função** $\ln x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0}$$

Derivada da função seno

- **Se** $f(x) = \text{sen } x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen } x = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } (x+h) - \text{sen } x}{h}$$

Derivada da função seno

- **Se** $f(x) = \text{sen}\ x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen}\ x = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\ (x+h) - \text{sen}\ x}{h}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\text{sen}\ x = \cos x}$$

Derivada da função cosseno

- **Se** $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Derivada da função cosseno

- **Se** $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\ x}$$

Derivada da função tangente

- **Se** $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{d}{dx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Derivada da função tangente

- **Se** $f(x) = \text{tg } x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{tg } x = \frac{d}{dx}\frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\text{tg } x = \sec^2 x}$$

Derivada da função secante

- **Se** $f(x) = \sec x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}$$

Derivada da função secante

- **Se** $f(x) = \sec x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \ \sec x}$$

Derivada da função cossecante

- **Se** $f(x) = \text{cosec } x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cosec } x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\text{sen } x}$$

Derivada da função cossecante

- **Se** $f(x) = \text{cosec}\ x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cosec}\ x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\text{sen}\ x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cosec}\ x = -\text{cotg}\ x\ \text{cosec}\ x}$$

Derivada da função cotangente

- **Se** $f(x) = \text{cotg}\, x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cotg}\, x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

Derivada da função cotangente

- **Se** $f(x) = \text{cotg}\, x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cotg}\, x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\text{cotg}\, x = -\text{cosec}^2 x}$$

Exemplos

- $$y = x^2 \text{sen } x$$
- $$y = \frac{\sec x}{1 + \text{tg } x}$$
- $$y = \frac{\text{sen } x}{x + 1}$$
- $$y = x^2 \text{sen } x + \cos x$$

Exemplos

$$y = x^2 \operatorname{sen} x \qquad y' = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

$$y = \frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x} \qquad y' = \frac{\sec x(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x + 1} \qquad y' = \frac{(x+1)\cos x - \operatorname{sen} x}{(x+1)^2}$$

$$y = x^2 \operatorname{sen} x + \cos x \qquad y' = (2x - 1)\operatorname{sen} x + x^2 \cos x$$

Regra da cadeia

Sabemos diferenciar $y = f(u) = \text{sen}\, u$ e $u = g(x) = x^2 - 4$ mas como diferenciar uma função composta do tipo

$$F(x) = f(g(x)) = \text{sen}\,(x^2 - 4)$$

Regra da cadeia

Exemplo 1: A função $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ pode ser escrita como a composição de duas funções

$$y = \frac{1}{2}u, \quad u = 3x$$

Regra da cadeia

Exemplo 1: A função $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ pode ser escrita como a composição de duas funções

$$y = \frac{1}{2}u, \quad u = 3x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}; \quad \frac{du}{dx} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

Regra da cadeia

Exemplo 2: A função $y = 9x^4 + 6x^2 + 1$ pode ser escrita como

$y = (3x^2 + 1)^2$ e como uma função composta

$$y = u^2, \quad u = 3x^2 + 1$$

Regra da cadeia

Exemplo 2: A função $y = 9x^4 + 6x^2 + 1$ pode ser escrita como

$y = (3x^2 + 1)^2$ e como uma função composta

$$y = u^2, \quad u = 3x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 6x^2 + 2; \quad \frac{du}{dx} = 6x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

Regra da cadeia

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}; \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 6x^2 + 2; \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

Regra da cadeia

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}; \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$y = 9x^4 + 6x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{du} = 6x^2 + 2; \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

Regra da cadeia

Regra da cadeia

Teorema: Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, temos

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Em notação de Leibniz

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

onde $y = f(u), u = g(x)$

Regra da cadeia - exemplos

- $y = \cos(t^2 - 1)$

- $y = \operatorname{sen}(x^2 + e^x)$

- $y = e^{\cos x}$

- $y = \operatorname{tg}(5 - \operatorname{sen} 2t)$

- $y = (5x^3 - x^4)^7$

Regra da cadeia - exemplos

- $$y = \frac{1}{3x - 2}$$

- $$y = \ln(x^2 + 3)$$

- $$y = x\, e^{-2x}$$

- $$y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4$$

Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Seja $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis em um mesmo conjunto A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in$ A. Consideramos uma função definida em A e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados, chegamos a

$$y = e^{g(x) \ln f(x)}$$

Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Derivando $y = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\boxed{y' = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \frac{d}{dx}[g(x)\ln f(x)]}$$

Derivada de $f(x)^{g(x)}$

$$\boxed{y' = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \frac{d}{dx}\left[g(x)\ln f(x)\right]}$$

- $y = x^x$
- $y = 3^x$
- $y = 8^x + \log_2 x$

Equações paramétricas

Em vez de descrever uma curva expressando a ordenada em um ponto $P(x, y)$ da curva em função de x , as vezes é mais conveniente descrever a curva expressando **ambas** as coordenadas em função de uma terceira variável t .

Equações paramétricas

Definição: Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \qquad\qquad y = g(t)$$

ao longo de um intervalo, então o conjunto de pontos

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

definido por essas equações é uma **curva parametrizada**. As equações são **equações paramétricas** para a curva.

Equações paramétricas

Uma curva parametrizada

$$x = f(t) \qquad\qquad y = g(t)$$

será derivável em t se x e y forem deriváveis em t.

- Em um ponto de uma curva parametrizada derivável, onde y também é função derivável de x, as derivadas estão relacionadas por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Equações paramétricas

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Se $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

Equações paramétricas

Exemplo: Seja a curva parametrizada

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\, t, \qquad\qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

encontre a reta tangente à curva no ponto $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ onde

$a > 0, b > 0$ quando $t = \pi/4$.