Derivação implícita e Derivada da função inversa

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1

Referências:

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

Derivação implícita

- A maiorida das funções que vimos até agora são da forma

$$\boxed{y = f(x)}$$

onde y é expresso **explicitamente** em termos da variável x.

Derivação implícita

- Há casos onde a relação entre x e y é dada **implicitamente**, como no caso das equações abaixo

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad y^2 - x = 0, \qquad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

Derivação implícita

- Há casos onde a relação entre x e y é dada **implicitamente**, como no caso das equações abaixo

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad y^2 - x = 0, \qquad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

Em alguns casos, podemos expressar y com uma ou mais funções explícitas de x .

Derivação implícita

- Quando não podemos colocar uma função $F(x, y) = 0$ na forma $f(x) = y$ podemos determinar a derivada dy/dx por meio da **derivação implícita**

  - O processo de **derivação implícita** consiste em derivar os dois lados da equação em relação a variável x e, depois, determinar y' na equação resultante.

Derivação implícita

Exemplo:

$$y^2 = x$$

Derivação implícita

Exemplo: Qual o coeficiente angular do círculo

$$x^2 + y^2 = 25$$

no ponto (3,-4)?

Derivação implícita

Exemplo:

$$y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$$

Derivação implícita

Exemplo: Determinar o coeficiente angular da curva

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

no ponto (2,4).

Derivadas de ordem superior

A derivação implícita também pode ser usada para encontrar **derivadas de ordem superior.**

Exemplo: Calcular a segunda derivada de

$$2x^3 - 3y^2 = 8$$

Derivação implícita - Exemplos

- $x^3 + y^3 = 6xy;$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$
- $\operatorname{sen}(x+y) = y^2 \cos x;$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$
- $x^4 + y^4 = 16;$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$
- $y = \log_a x;$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = ?$

Derivação logarítmica

- As derivadas de **funções positivas** dadas por fórmulas que envolvem produtos, quocientes e potências muitas vezes podem ser encontradas mais rapidamente se calcularmos o logaritmo natural dos dois lados da equação antes de derivar.

Derivação logarítmica

Derivação logarítmica

Exemplo:

$$y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$$

Derivação logarítmica

Exemplos:

- $y = (x+1)^x$
- $y = (\sqrt{t})^t$
- $y = (\text{sen } x)^x$
- $y = x^{\ln x}$

Derivada da função inversa

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \qquad\qquad f^{-1}(x) = 2x - 2$$

Derivada da função inversa

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$$f^{-1}(x) = 2x - 2$$

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{df^{-1}(x)}{dx} = 2}$$

Derivada da função inversa

$$f(x) = x^2, \;\; x \geq 0 \qquad\qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Derivada da função inversa

$$f(x) = x^2, \;\; x \geq 0$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx} = 2x}$$

$$\boxed{\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2f^{-1}(x)}}$$

Derivada da função inversa

Teorema: Se f apresenta um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nula neste intervalo, então f^{-1} é derivável em qualquer ponto de seu domínio. O valor de $(f^{-1})'$ no ponto b do domínio de f^{-1} é a recíproca do valor de f' no ponto $a = f^{-1}(b)$

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

Derivada da função inversa

Teorema: Se f apresenta um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nula neste intervalo, então f^{-1} é derivável em qualquer ponto de seu domínio. O valor de $(f^{-1})'$ no ponto b do domínio de f^{-1} é a recíproca do valor de f' no ponto $a = f^{-1}(b)$

$$\boxed{\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}}$$

Derivada da função inversa

Exemplo:

$$f(x) = e^x, \quad f^{-1}(x) = \ln x$$

Derivada da função inversa de funções trigonométricas

- Para que uma função admita inversa, a função deve ser injetora.
  - Funções trigonométricas admitem inversas quando seu domínio é restingido

$$
\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &\to \mathrm{D}: & [-\pi/2, \pi/2] \\
\cos x &\to \mathrm{D}: & [0, \pi] \\
\operatorname{tg} x &\to \mathrm{D}: & (-\pi/2, \pi/2) \\
\operatorname{cotg} x &\to \mathrm{D}: & (0, \pi) \\
\sec x &\to \mathrm{D}: & [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \\
\operatorname{cossec} x &\to \mathrm{D}: & [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]
\end{aligned}}
$$

Derivada da função $y = \operatorname{sen}^{-1} u$

A função $x = \sin y$ é derivável no intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e sua derivada é não nula nesse intervalo.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivada da função $y = \operatorname{sen}^{-1} u$

A função $x = \sin y$ é derivável no intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e sua derivada é não nula nesse intervalo.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função $y = \operatorname{tg}^{-1} u$

- $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$

Derivada da função $y = \operatorname{tg}^{-1} u$

- $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{tg}^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função $y = \sec^{-1} u$

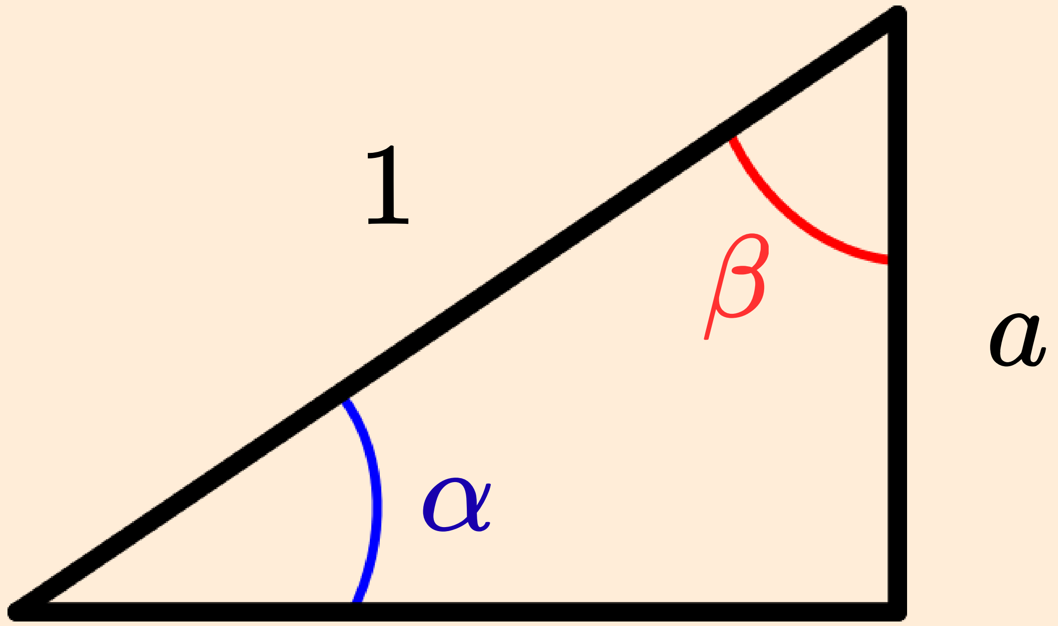
- $f(x) = \sec x, \quad f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$

Derivada da função $y = \sec^{-1} u$

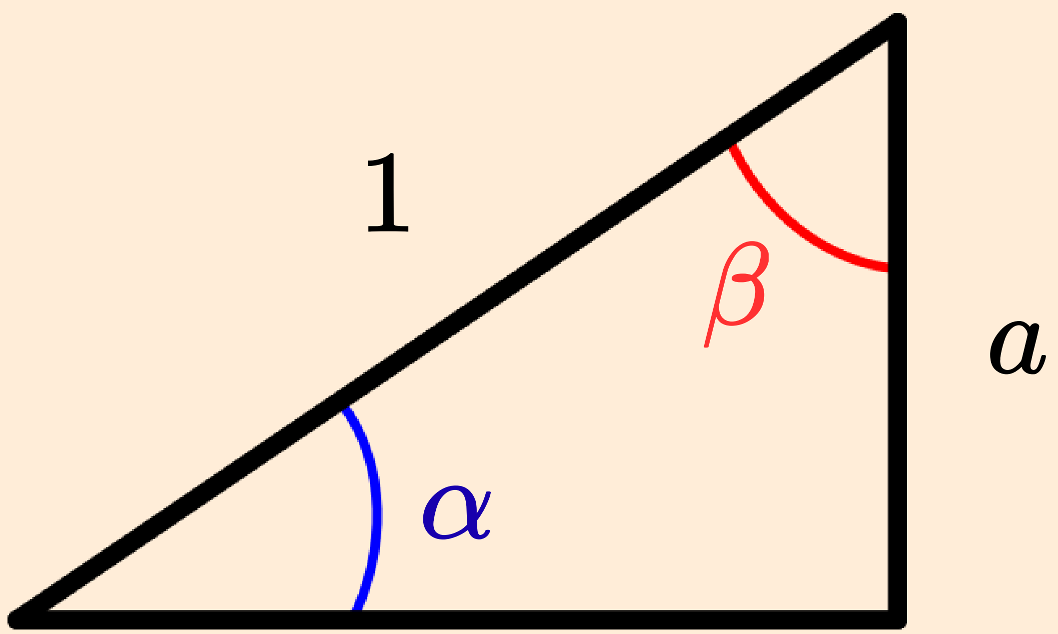
- $f(x) = \sec x, \quad f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função $y = \cos^{-1} u$

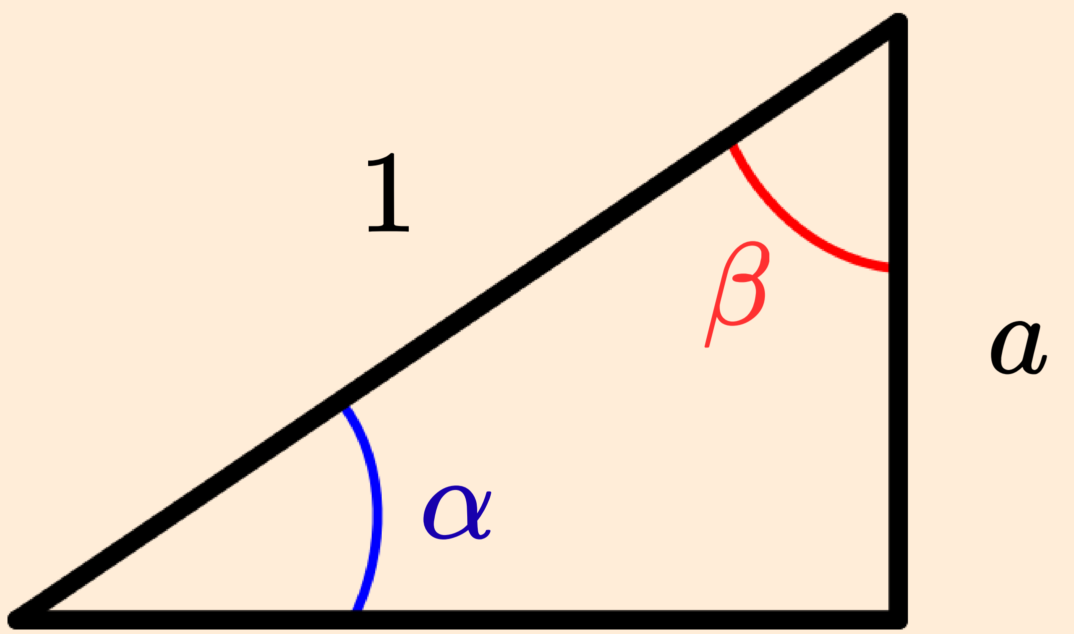


Derivada da função $y = \cos^{-1} u$



$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

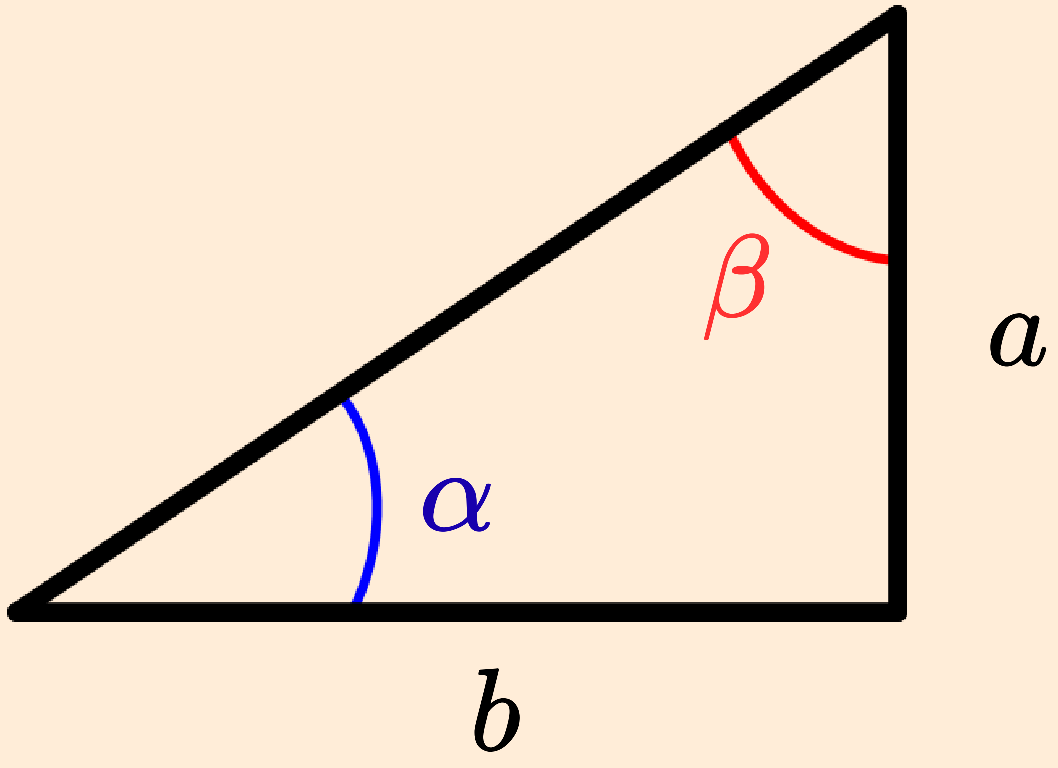
Derivada da função $y = \cos^{-1} u$



$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

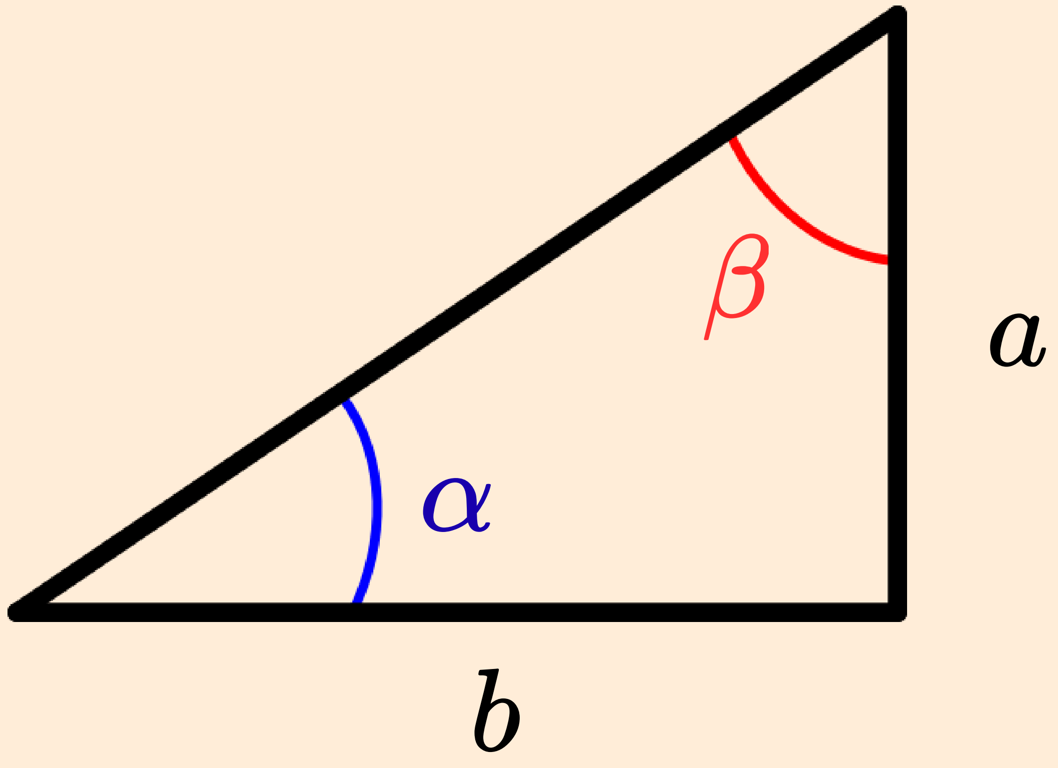
$$\boxed{\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função $y = \operatorname{cotg}^{-1} u$



$$\operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} x$$

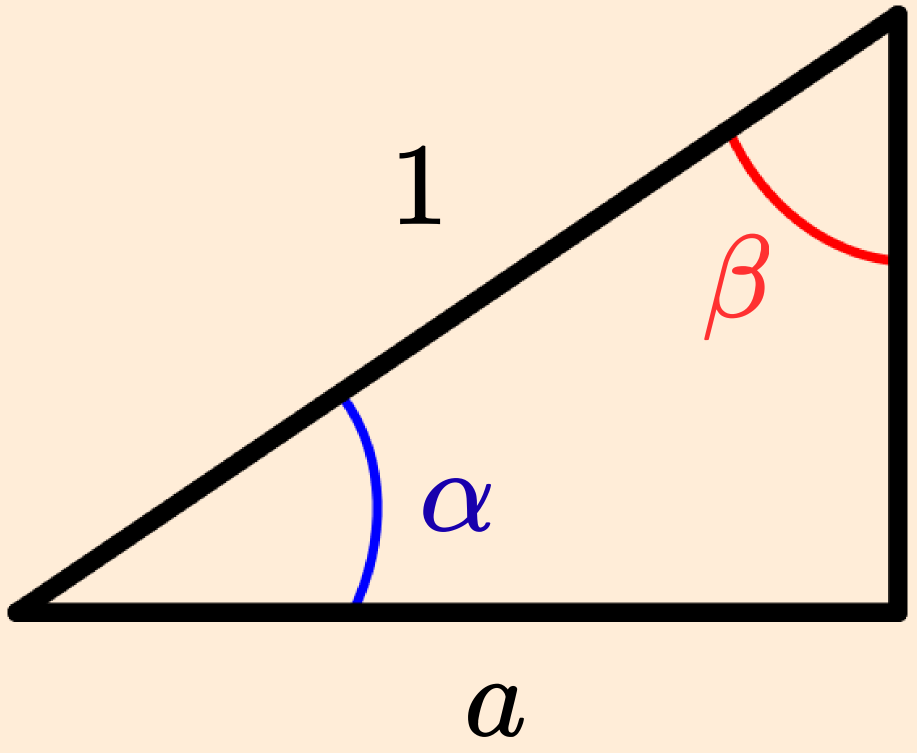
Derivada da função $y = \text{cotg}^{-1} u$



$$\text{cotg}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \text{tg}^{-1} x$$

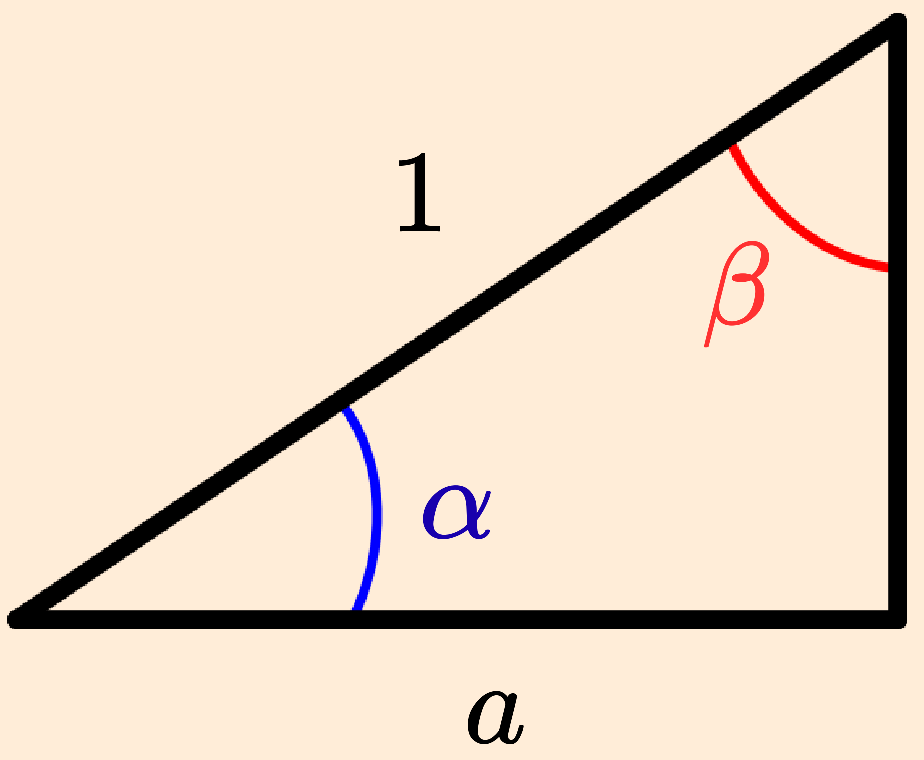
$$\boxed{\frac{d}{dx}\text{cotg}^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função $y = \operatorname{cosec}^{-1} u$



$$\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Derivada da função $y = \operatorname{cosec}^{-1} u$



$$\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}}$$

Derivada da função inversa de funções trigonométricas

Exemplos: Determinar a reta tangente a curva

$$y = \mathrm{cotg}^{-1} x$$

em x=-1.

Derivada da função inversa de funções trigonométricas

Exemplos:

- $y = \operatorname{sen}^{-1} x^2$

- $y = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{t}$

- $y = \sec(5x^4)$

- $y = x \operatorname{tg}^{-1} 3x$