

Funções hiperbólicas, taxas relacionadas, linearização e diferenciais

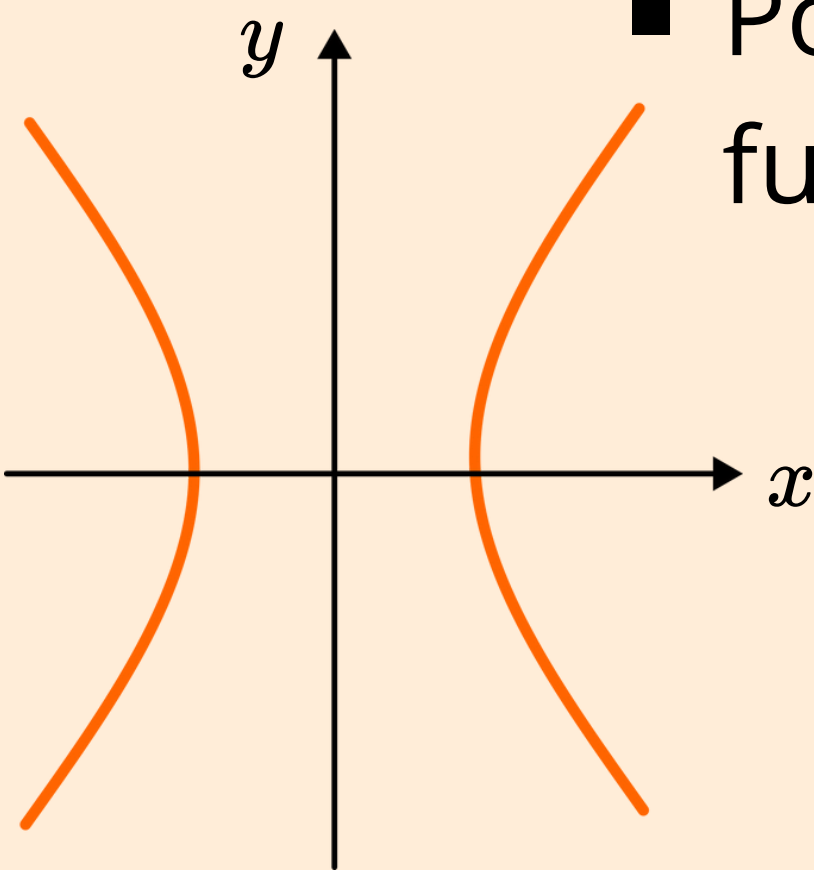
<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1>

Referências:

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1.
- STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v.1
- LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Habra Ltda., 1994. v.1.

Funções hiperbólicas

- Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente na matemática e suas aplicações
 - Elas são análogas, de muitas formas, à funções trigonométricas
 - Possuem a mesma relação com a **hipérbole** que as funções trigonométricas têm com o círculo.



Funções hiperbólicas

- **Seno hiperbólico**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **Cosseno hiperbólico**

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- **Tangente hiperbólica**

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **Secante hiperbólica**

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

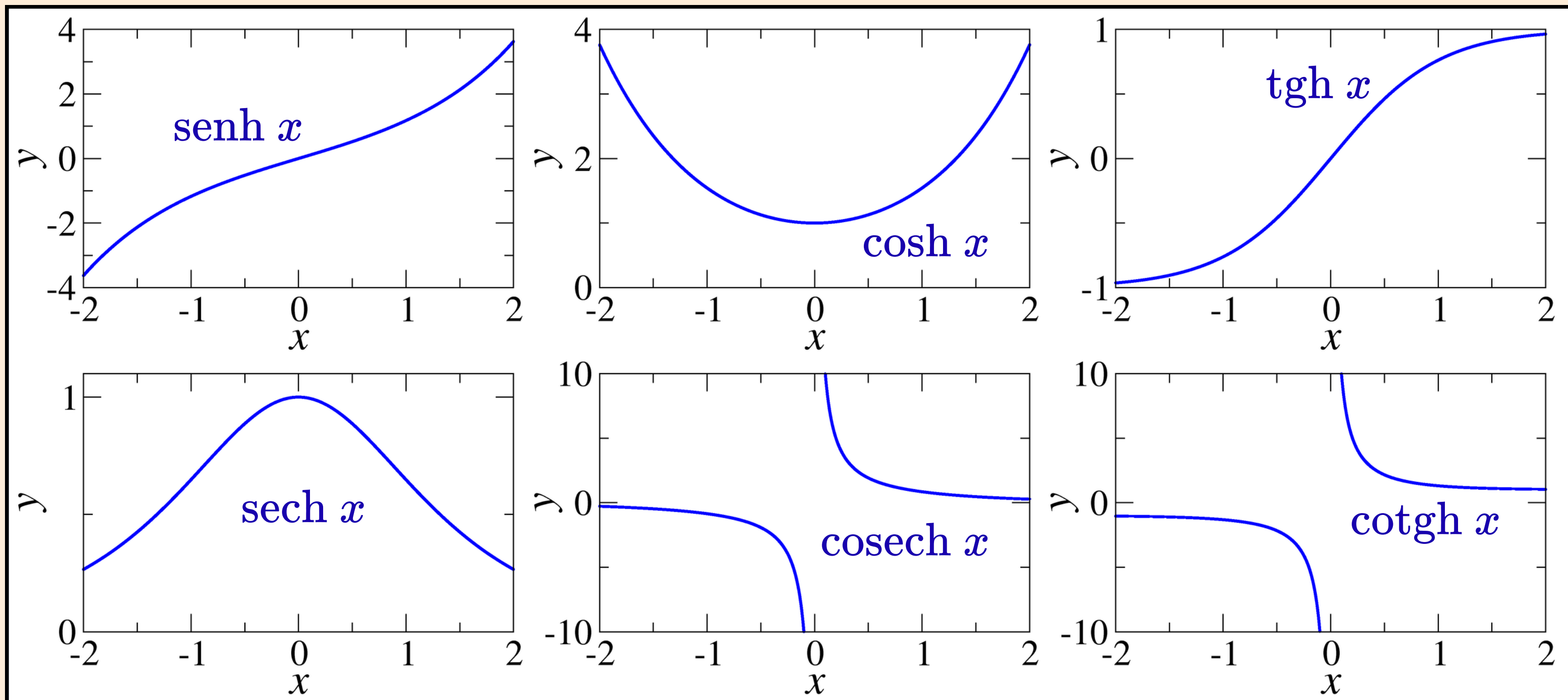
- **Cossecante hiperbólica**

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

- **Cotangente hiperbólica**

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Funções hiperbólicas



Funções hiperbólicas

Identidades hiperbólicas

→ $\sinh(-x) = -\sinh x$

→ $\cosh(-x) = \cosh x$

→ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

→ $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

Derivadas de funções hiperbólicas

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh(x)$$

Derivadas de funções hiperbólicas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh}(x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotgh}(x) = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh}(x)$$

Funções hiperbólicas inversas

→ $y = \sinh^{-1} x \longrightarrow \sinh y = x$

→ $y = \cosh^{-1} x \longrightarrow \cosh y = x$

→ $y = \operatorname{tgh}^{-1} x \longrightarrow \operatorname{tgh} y = x$

Derivada de funções hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgch}^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

Derivada de funções hiperbólicas inversas

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}^{-1}(\sinh x))$$

Taxas relacionadas

Taxas relacionadas

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis **relacionadas** é chamado de problema de **taxas relacionadas**.

- Nestes problemas, as variáveis tem uma relação específica para valores de tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação.

Taxas relacionadas

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis **relacionadas** é chamado de problema de **taxas relacionadas**.

- Nestes problemas, as variáveis tem uma relação específica para valores de tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação.

A taxa em que alguma variável varia é obtida a partir da **derivada** da equação que relaciona as variáveis envolvidas

Taxas relacionadas

Exemplo 1: A que taxa o nível do líquido diminui dentro de um tanque cilíndrico vertical se bombearmos o líquido para fora a uma taxa de 3000 L/min?

Taxas relacionadas

Exemplo 1: A que taxa o nível do líquido diminui dentro de um tanque cilíndrico vertical se bombearmos o líquido para fora a uma taxa de 3000 L/min?

Resposta: $\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi r^2}$

Taxas relacionadas

Exemplo 2: Uma escada de 25 unidades de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

Taxas relacionadas

Exemplo 2: Uma escada de 25 unidades de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

Resposta: $-9/4$

Taxas relacionadas

Exemplo 3: Sendo

$$x \cos y = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável t . Se $\frac{dx}{dt} = -4$ ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \pi/3$.

Taxas relacionadas

Exemplo 3: Sendo

$$x \cos y = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável t . Se $\frac{dx}{dt} = -4$ ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \pi/3$.

Resposta: $-\frac{2}{15}\sqrt{3}$

Taxas relacionadas

Exemplo 4: Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16m de altura e uma base com 4m de raio. A água flui no tanque a uma taxa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5m?

Taxas relacionadas

Exemplo 4: Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16m de altura e uma base com 4m de raio. A água flui no tanque a uma taxa de 2 m³/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5m?

Resposta: $\frac{32}{25\pi}$

Taxas relacionadas

Exemplo 5: Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2km do cruzamento e o segundo a 0,15km?

Taxas relacionadas

Exemplo 5: Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2km do cruzamento e o segundo a 0,15km?

Resposta: -108

Taxas relacionadas

Exemplo 6: Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de caixas sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta é

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa os preços estarão variando quando o fornecimento diário for de 5000 caixas?

Taxas relacionadas

Exemplo 6: Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de caixas sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta é

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa os preços estarão variando quando o fornecimento diário for de 5000 caixas?

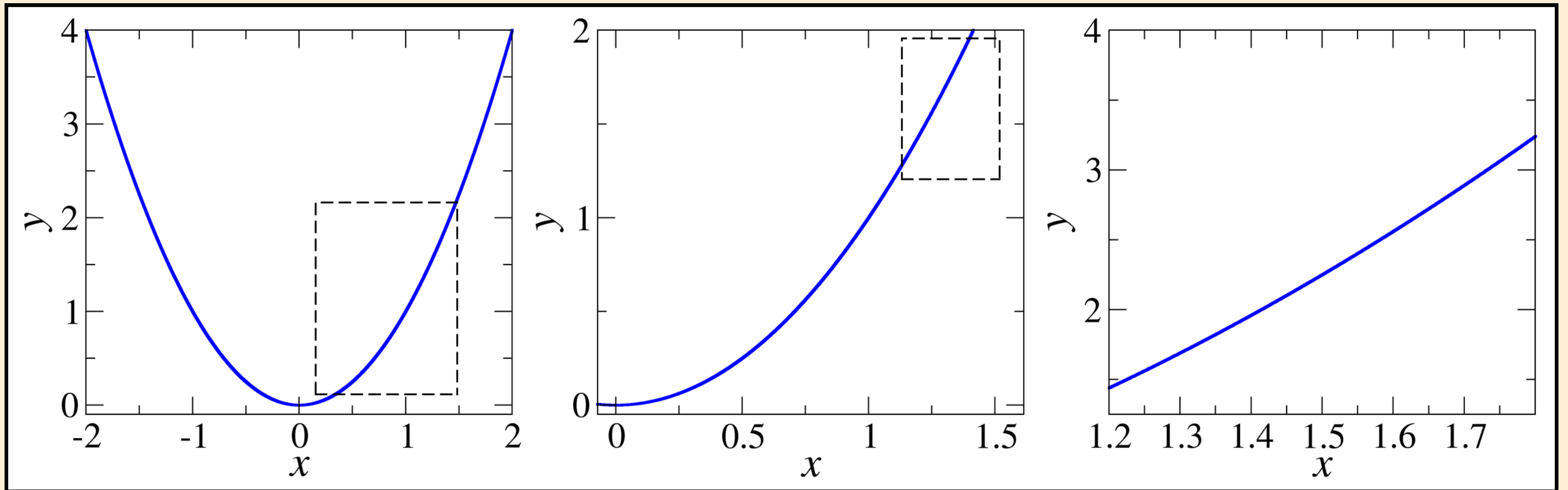
Resposta: $-1/20$

Linearização

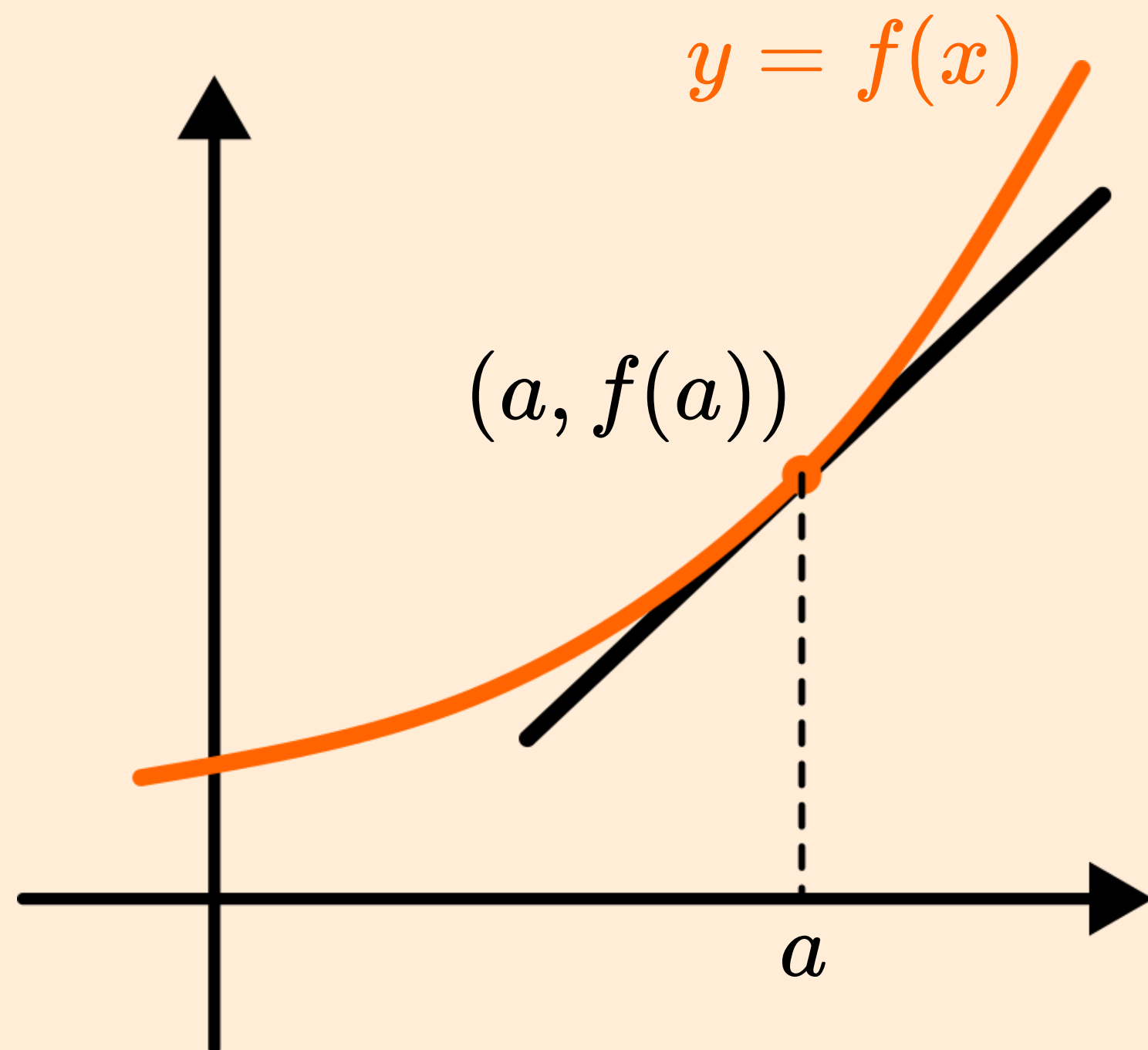
Linearização

- Às vezes podemos aproximar **funções complicadas** usando funções **mais simples** que fornecem a precisão desejada para aplicações específicas.
 - Uma forma de aproximação é feita a partir de **retas tangentes** e é denominada **linearização**.

Linearização



Linearização



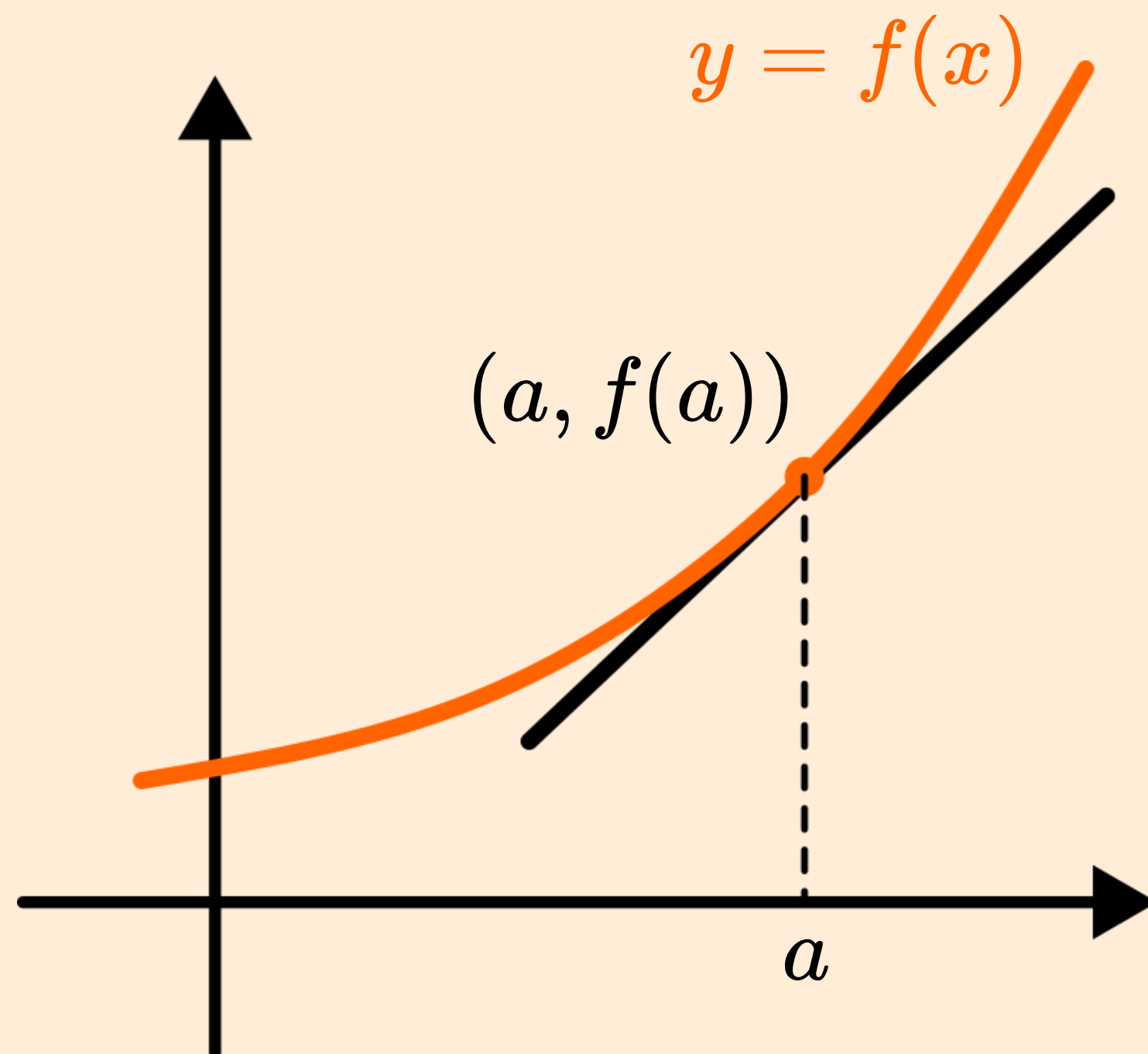
A reta **tangente** no ponto a , onde a função é derivável, passa pelo ponto

$$(a, f(a))$$

e sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linearização



Definição: Se a função é derivável em $x = a$ então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a **linearização** da função ao redor do ponto (centro da aproximação).

Linearização

Exemplo: Determinar a linearização de

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

quando $x = 0$.

Linearização

- A utilidade da linearização está em sua capacidade de substituir fórmulas complicadas por uma mais simples ao longe de um **intervalo de valores**.
 - Uma aproximação linear normalmente **perde a precisão longe de seu centro**

Linearização

Exemplo: Determinar a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ ao redor de $x = 3$.

Exemplo: Determinar a linearização de $f(x) = \cos x$ ao redor de $x = \pi/2$.

Exemplo: Determinar a linearização de $f(x) = (1+x)^k$ ao redor de $x = 0$.

Diferenciais

Diferenciais

Suponha que uma função seja definida pela equação

$$y = f(x)$$

Os incrementos Δy podem ser aproximados, por essa função, a pontos onde a função seja derivável. Em tais pontos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Diferenciais

Pela definição de limite

$$0 < |\Delta x| < \delta \longrightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \epsilon$$

ou seja

$$|\Delta y - f'(x)\Delta x| < |\Delta x|$$

Diferenciais

$$|\Delta y - f'(x)\Delta x| < |\Delta x|$$

Para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, $f'(x)\Delta x$ é uma boa aproximação do valor de Δy .

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

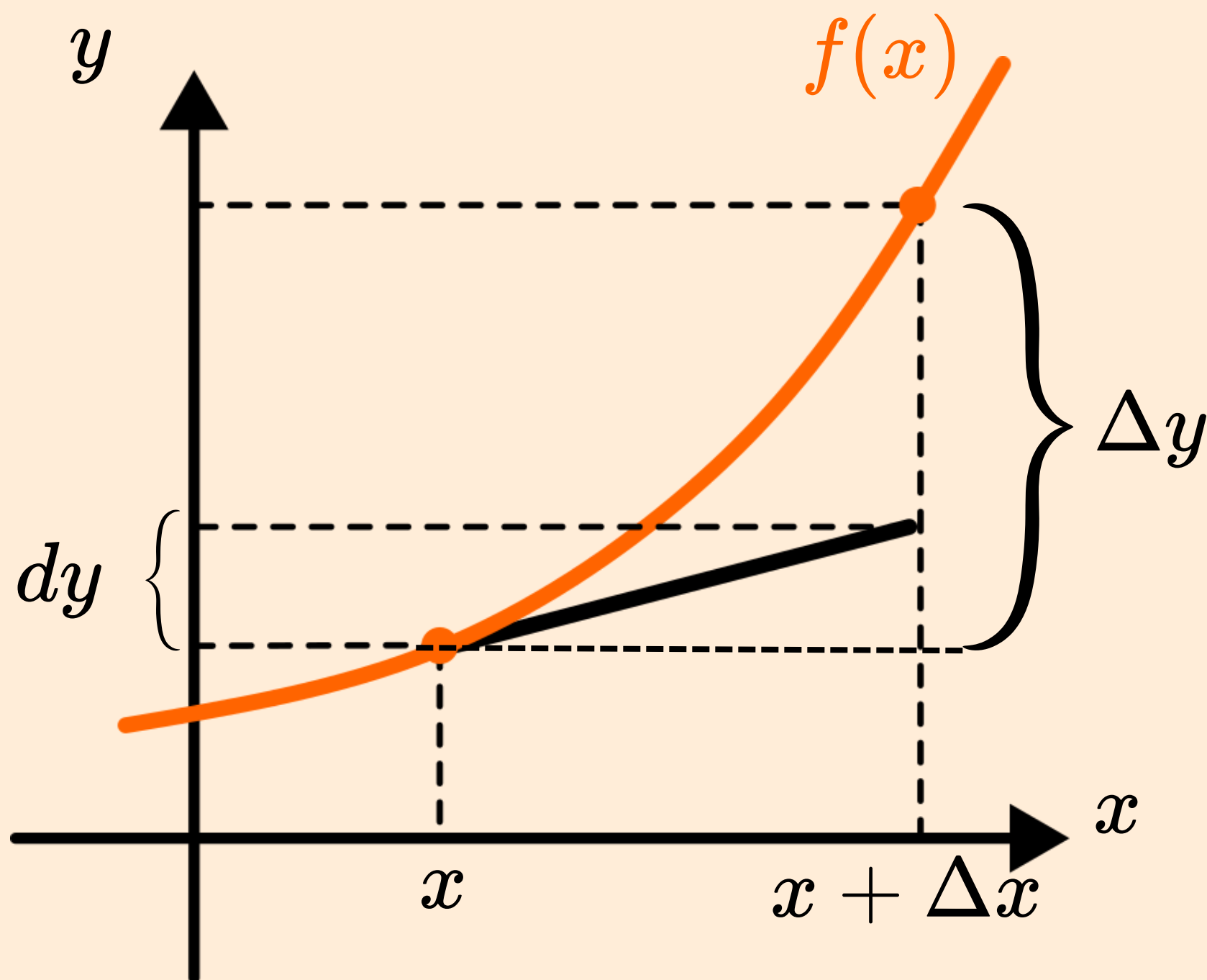
Diferenciais

Definição: Se uma função f , definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de y** , denotada por dy , será dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x .

Diferenciais



- Geometricamente, a diferencial é a variação na linearização quando x varia em uma quantidade Δx
- A diferencial representa a medida em que a reta tangente sobe ou desce quando x varia em uma quantidade Δx

Diferenciais

Definição: Se a função for definida por $y = f(x)$ então a **diferencial de** x , denotada por dx , será dada por

$$dx = \Delta x$$

onde Δx é um incremento arbitrário.

Diferenciais

Teorema: Se $y = f(x)$, então quando sua derivada existe

$$dy = f'(x)dx$$

Diferenciais

Exemplos:

→ $y = x^5 + 37x$

→ $y = \operatorname{tg} 2x$

→ $y = \frac{x}{x+1}$

Erro na aproximação diferencial

- Há duas maneira de descrever a variação de uma função à medida que sua variável independente x varia de $x = a$ para $x = a + \Delta x$.
- **Variação real:** $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
- **Variação diferencial:** $df = f'(a)dx$

Erro na aproximação diferencial

- **Variação real:** $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$
- **Variação diferencial:** $df = f'(a)dx$

$$\text{Erro} = \Delta f - df = \left(\frac{f(a + \delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right) = \epsilon \Delta x$$

$$\text{Erro} \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

Variação de uma função próximo de um ponto

Se uma função é derivável quando $x = a$ e x varia de a para $a + \Delta x$, então a variação Δy de f é dada por

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \epsilon \Delta x$$

na qual $\epsilon \rightarrow 0$ à medida que $\Delta x \rightarrow 0$.

Variação de uma função próximo de um ponto

Exemplo: A fórmula que nos diz quanto o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja estabelecido é

$$V = kr^4$$

Como é que o aumento de 10% no raio afeta o volume?

Variação de uma função próximo de um ponto

Exemplo: A fórmula que nos diz quanto o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja estabelecido é

$$V = kr^4$$

Como é que o aumento de 10% no raio afeta o volume?

Resposta: $4\frac{dr}{r}$

Variação de uma função próximo de um ponto

Exemplo: Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para o acréscimo Δy que a função $y = x^2$ sofre quando se passa de $x = 1$ a $1 + dx = 1,001$. Calcule o erro.

Variação de uma função próximo de um ponto

Exemplo: Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para o acréscimo Δy que a função $y = x^2$ sofre quando se passa de $x = 1$ a $1 + dx = 1,001$. Calcule o erro.

Resposta: $dy = 0,002$, erro = 10^{-6}