

Extremo de funções

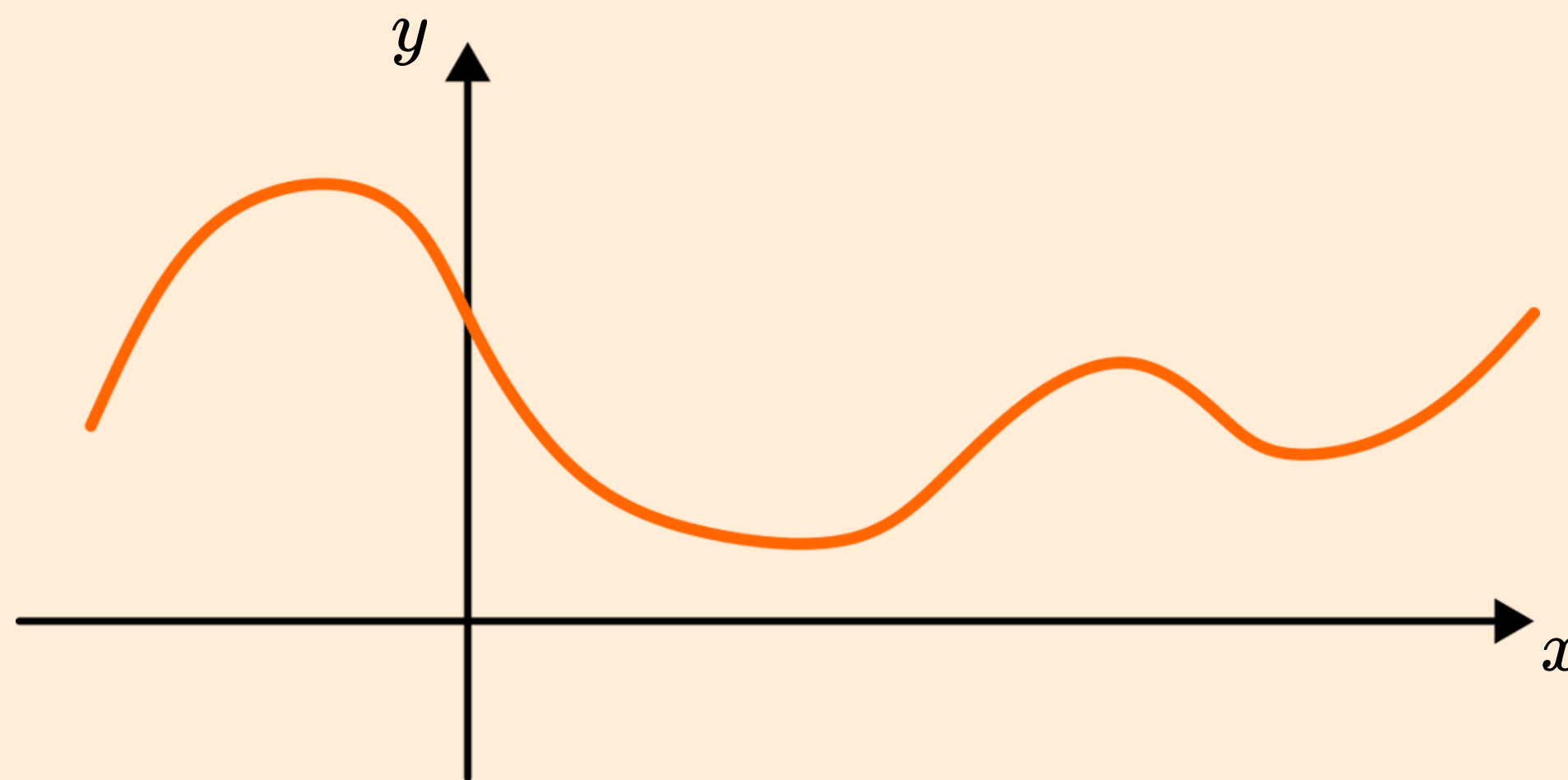
<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1>

Referências

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1.

Extremo de funções

- A partir do estudo das derivadas de uma função **contínua**, podemos localizar e identificar seus **valores extremos**.



Extremo de funções

Definição: Seja f uma função de domínio D . Então, f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c)$$

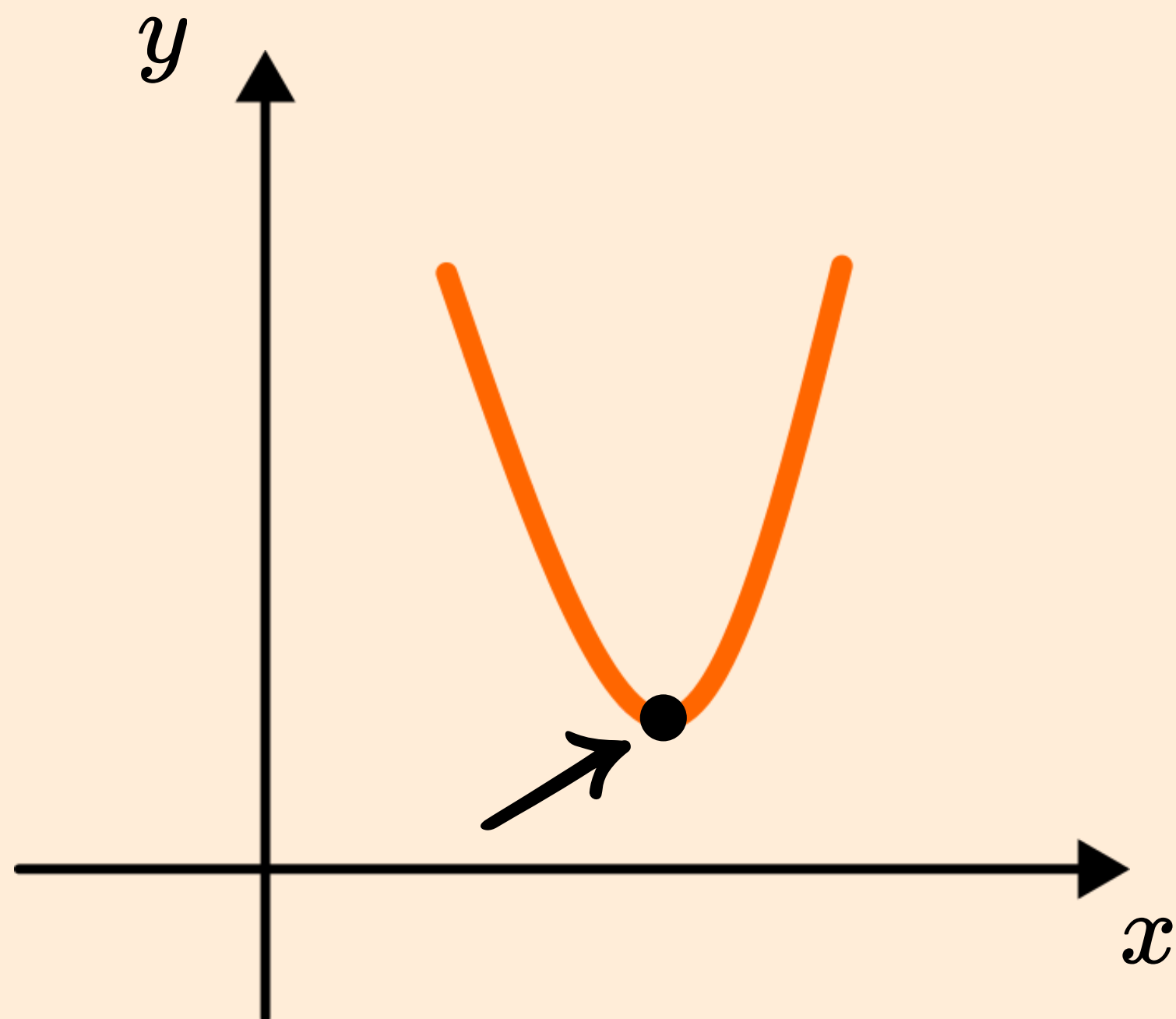
para qualquer $x \in D$ e um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c)$$

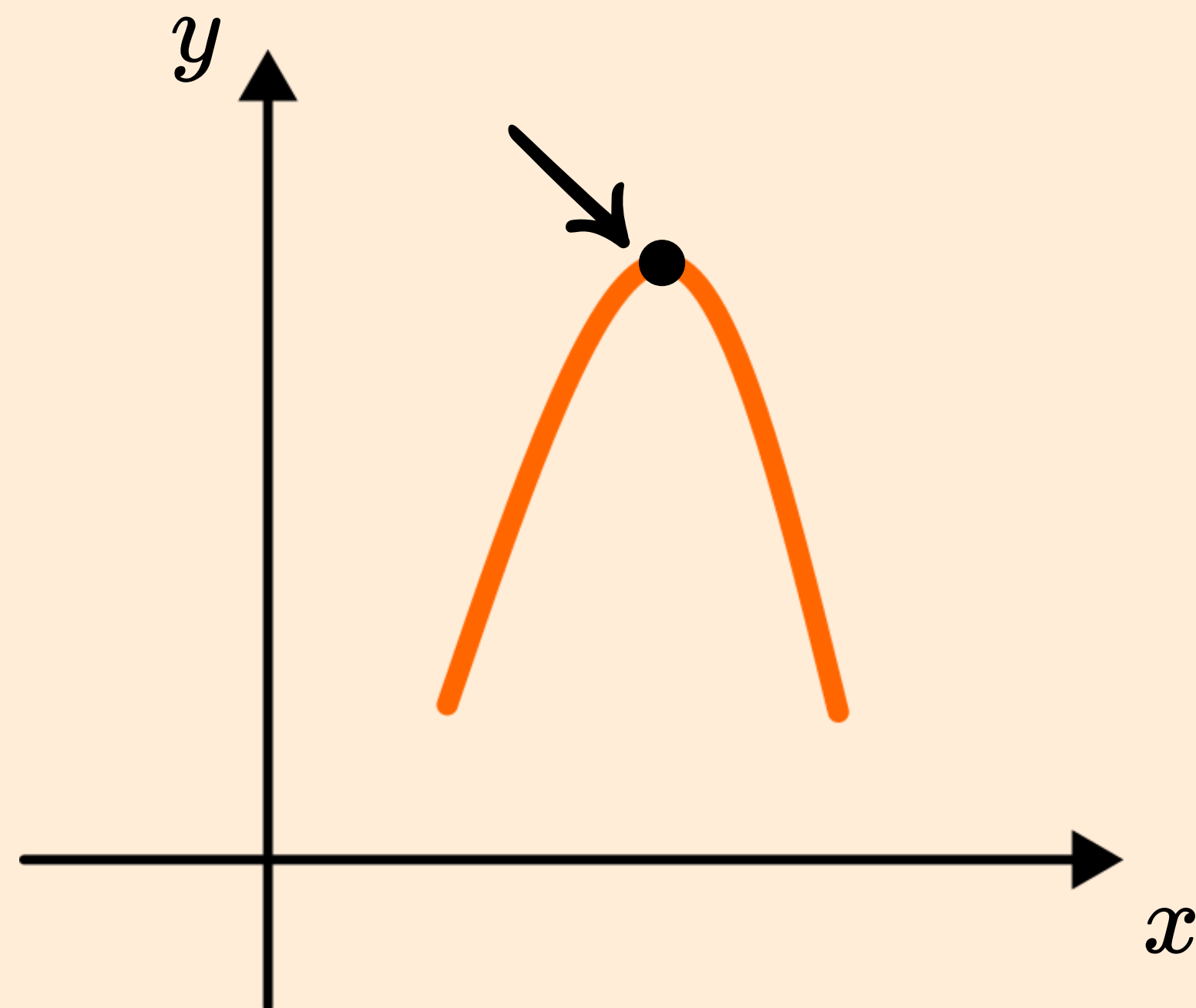
para qualquer $x \in D$.

Extremo de funções

Mínimo absoluto

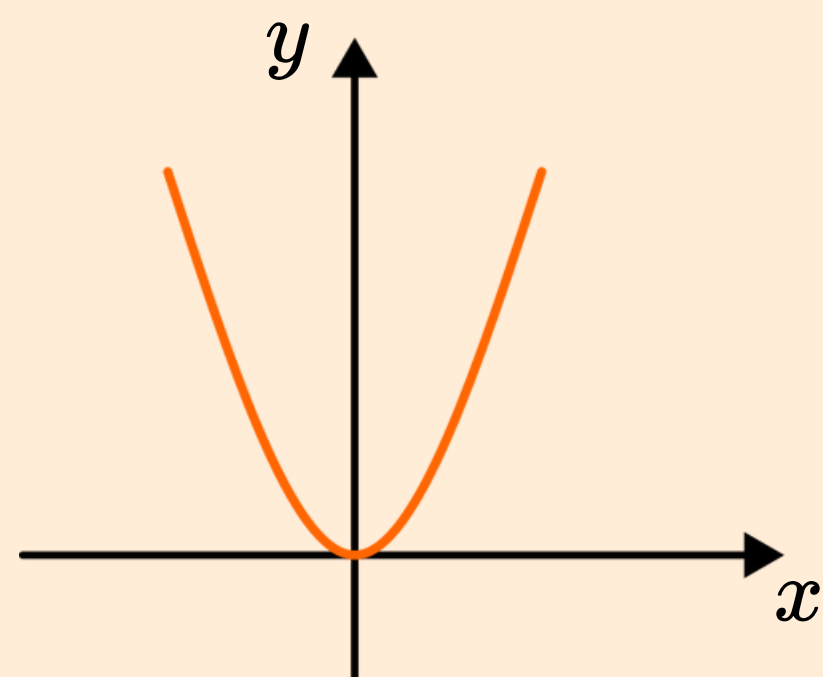


Máximo absoluto

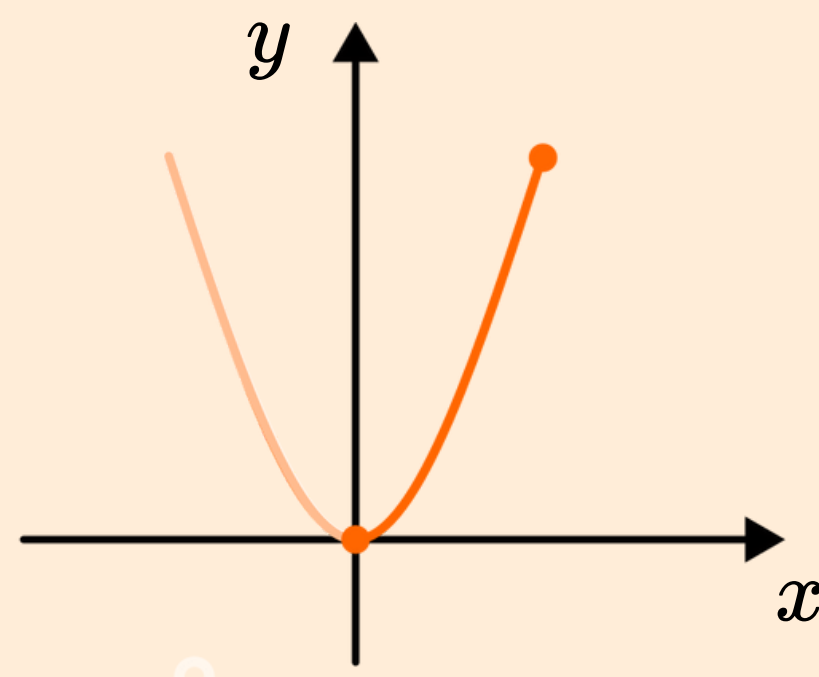


Extremo de funções

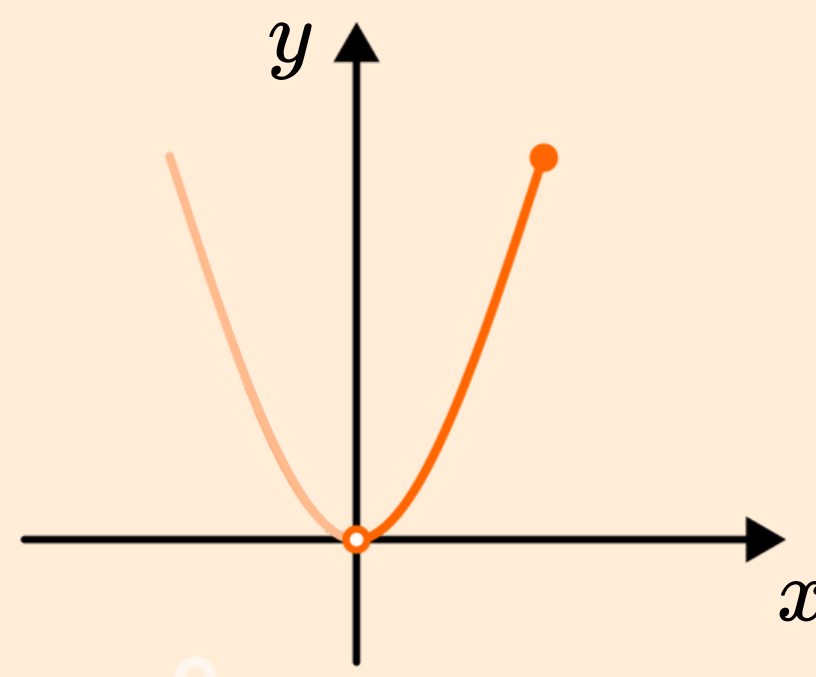
- Máximos e mínimos absolutos são chamados de **extremos absolutos/globais**.
 - Funções definidas pela mesma regra podem ter extremos diferentes, dependendo do domínio definido.



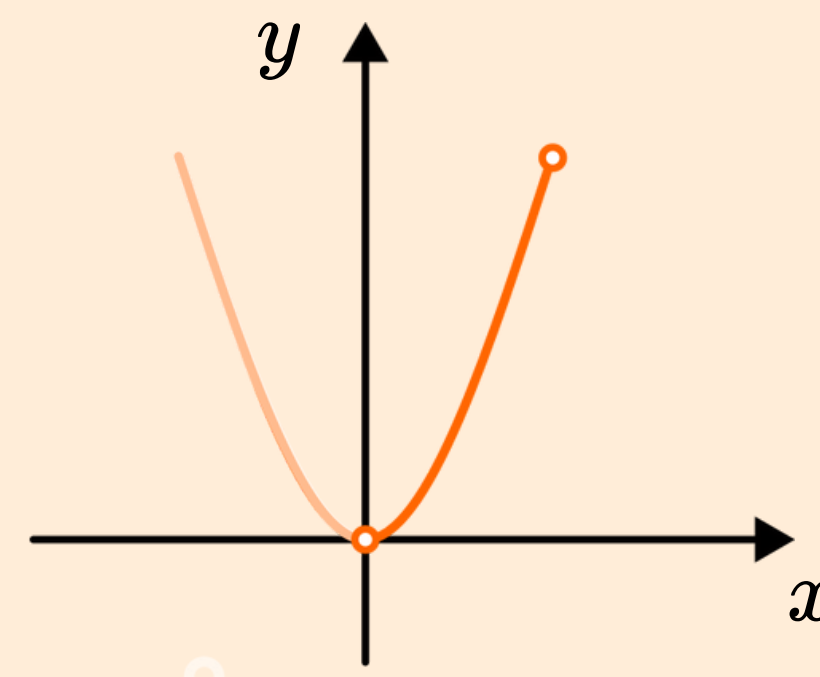
$$D = (-\infty, \infty)$$



$$D = [0, 2]$$



$$D = (0, 2]$$



$$D = (0, 2)$$

Extremo de funções

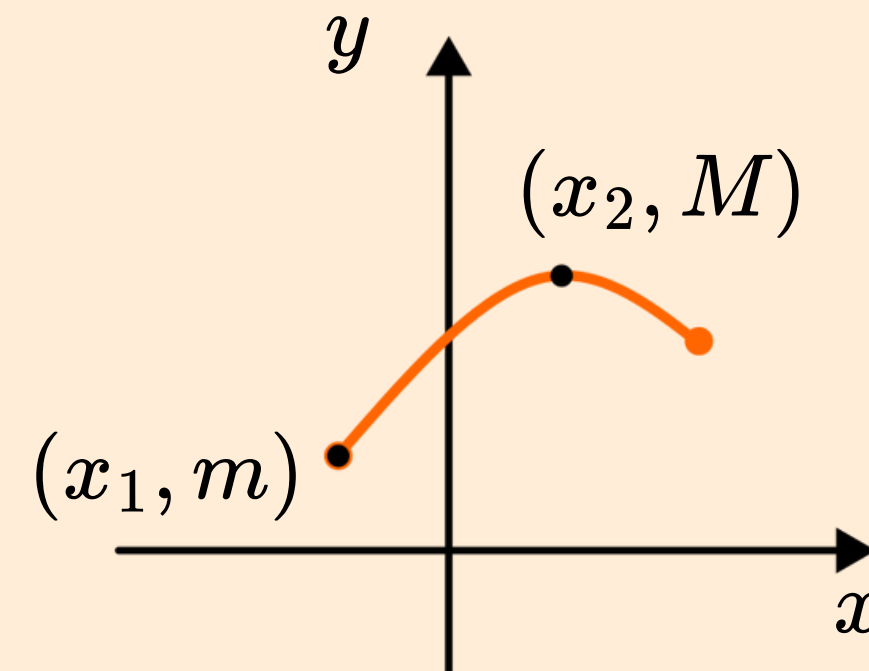
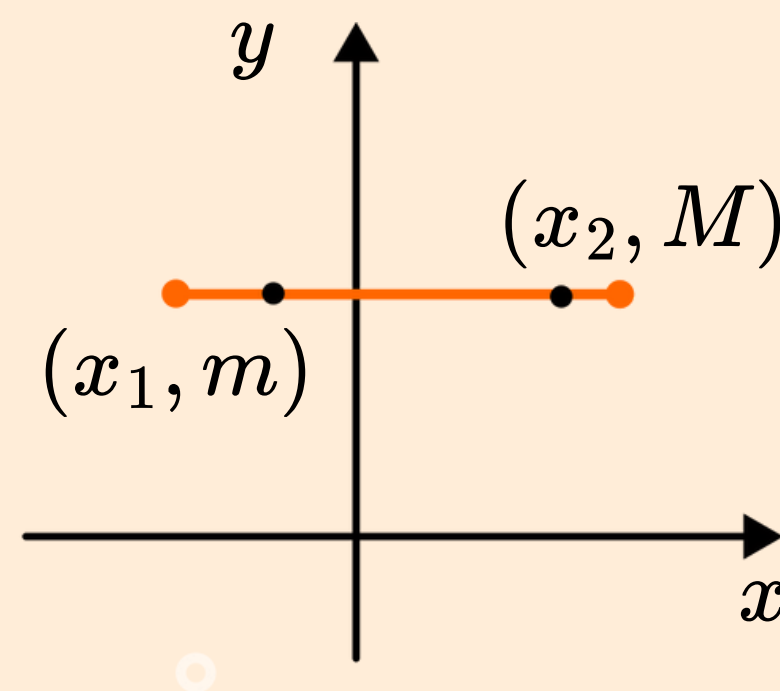
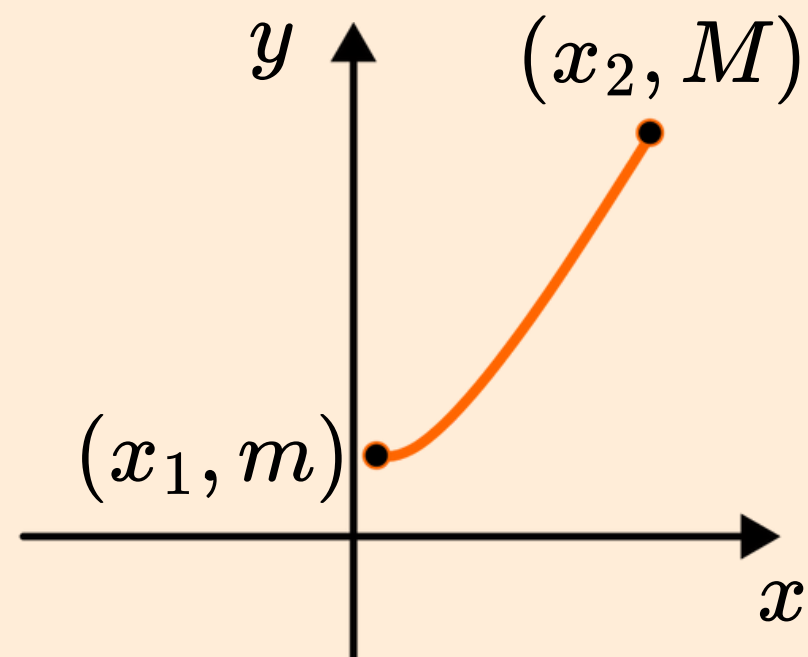
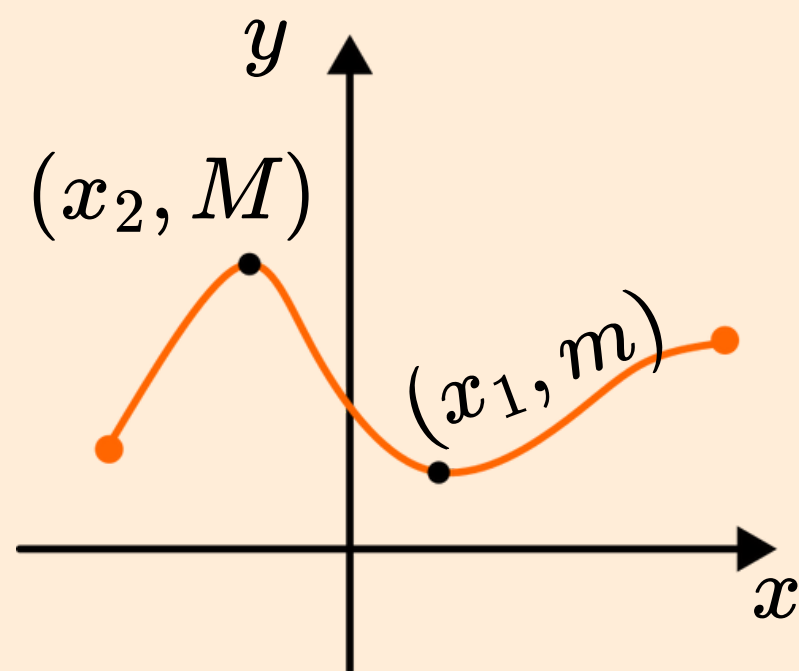
Teorema: Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então a função assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a,b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que

$$f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$$

$$m \leq f(x) \leq M$$

para qualquer outro valor de x em $[a,b]$.

Extremo de funções



Requisitos para o teorema: **intervalo fechado, finito e função contínua.**

Extremo locais ou relativos

Definição: Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \leq f(c)$$

para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto c .

Extremo locais ou relativos

Definição: Uma função f tem um valor **mínimo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c)$$

para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto c .

Extremo locais ou relativos

- **Extremos locais** também são chamados de **extremos relativos**.



Determinando extremos

Teorema: Se uma função **f** possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto interior **c** de seu domínio e se **f'** é definida em **c**, então

$$f'(c) = 0$$

Determinando extremos

Os únicos locais onde uma função f pode ter valores extremos, locais ou globais, são

- pontos interiores onde $f'=0$
- pontos interiores onde f' não existe
- extremidades do domínio de f



Determinando extremos

Definição: Um ponto interior do domínio de uma função f onde $f'=0$ ou é indefinida é um **ponto crítico** de f .

- Assim, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir **valores extremos** são os **pontos críticos** e as **extremidades**.

Determinando extremos

Para calcular os **extremos absolutos** de uma função contínua em um intervalo fechado finito, precisamos:

1. Calcular o valor da função em todos os pontos críticos e extremidades
2. Tomar o maior e o menor dentre os valores obtidos

Determinando extremos

Exemplos:

- $f(x) = x^2, \quad D = [-2, 1]$
- $f(x) = 10x(2 - \ln x), \quad D = [1, e^2]$
- $f(x) = x^{2/3}, \quad D = [-2, 3]$

Teorema do valor médio

Referências

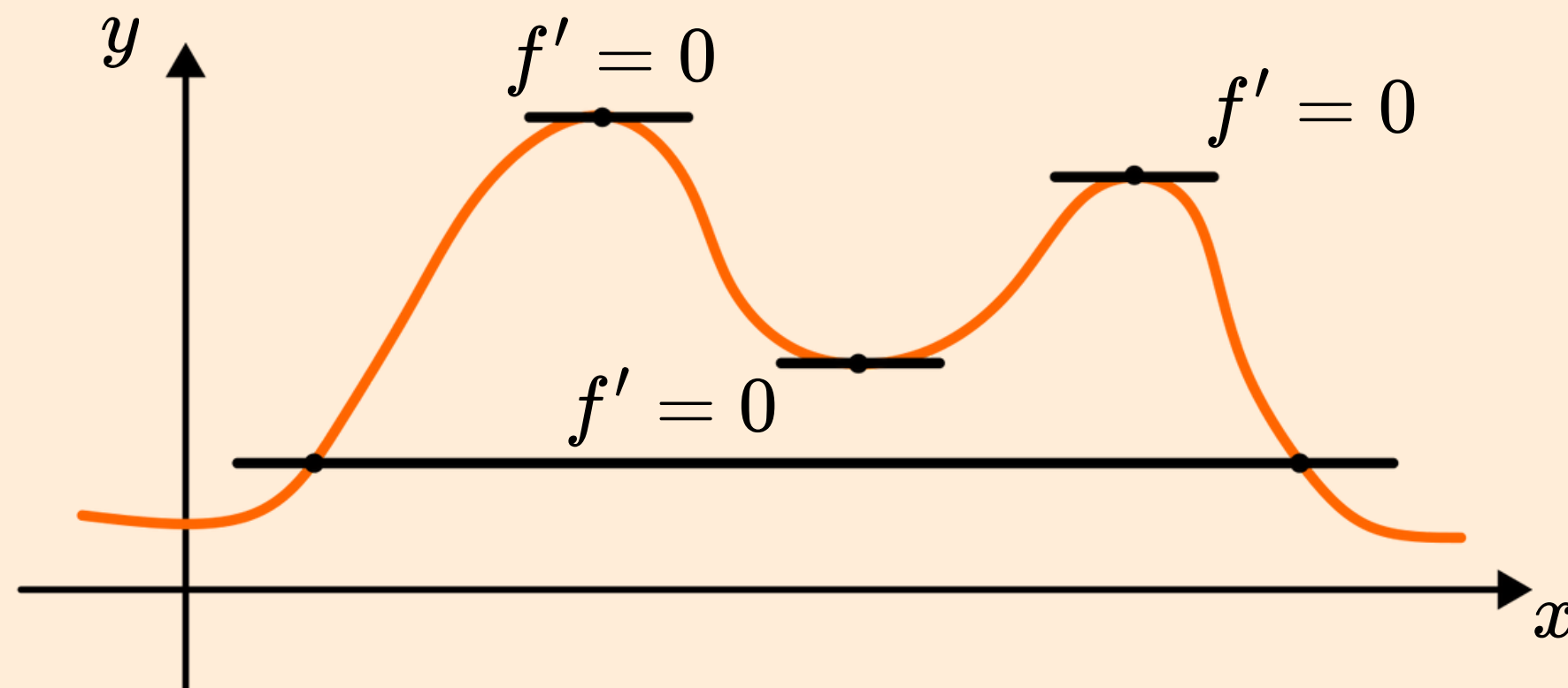
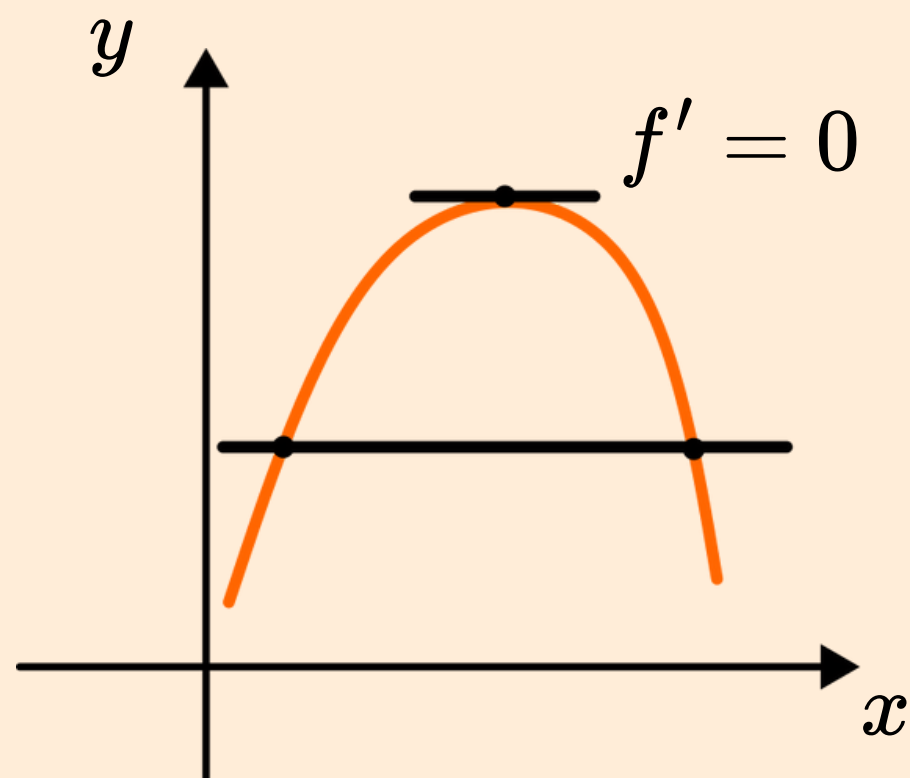
- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1.

Teorema do valor médio

- Um dos teoremas mais importantes em Cálculo é o **Teorema do Valor Médio**. Este teorema é usado para provar muitos teoremas de Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros assuntos, como análise numérica.
 - A demonstração do teorema do valor médio é baseada em um caso particular, conhecido como **Teorema de Rolle**.

Teorema de Rolle

Ao traçar o gráfico de uma função, encontramos evidências geométricas que entre dois pontos quaisquer onde uma função derivável cruza uma reta horizontal, há pelo menos um ponto na curva onde a **tangente é horizontal**.



Teorema de Rolle

Teorema: Suponha que $y = f(x)$ seja **contínua** em todos pontos do intervalo fechado $[a,b]$ e **derivável** em todos os pontos de seu interior (a,b) . Se

$$f(a) = f(b)$$

então há pelo menos um número **c** em (a,b) no qual

$$f'(c) = 0$$

Teorema de Rolle

Exemplo: A função polinomial

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

é **contínua** em qualquer ponto de $[-3,3]$ e **derivável** em qualquer ponto de $(-3,3)$.

- $f(3) = f(-3)$, então existe ao menos um ponto com derivada nula no intervalo aberto $(-3,3)$

Teorema de Rolle

Exemplo: A função polinomial

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

é **contínua** em qualquer ponto de $[-3,3]$ e **derivável** em qualquer ponto de $(-3,3)$.

- $f(3) = f(-3)$, então existe ao menos um ponto com derivada nula no intervalo aberto $(-3,3)$
 - São os pontos $x = \pm\sqrt{3}$

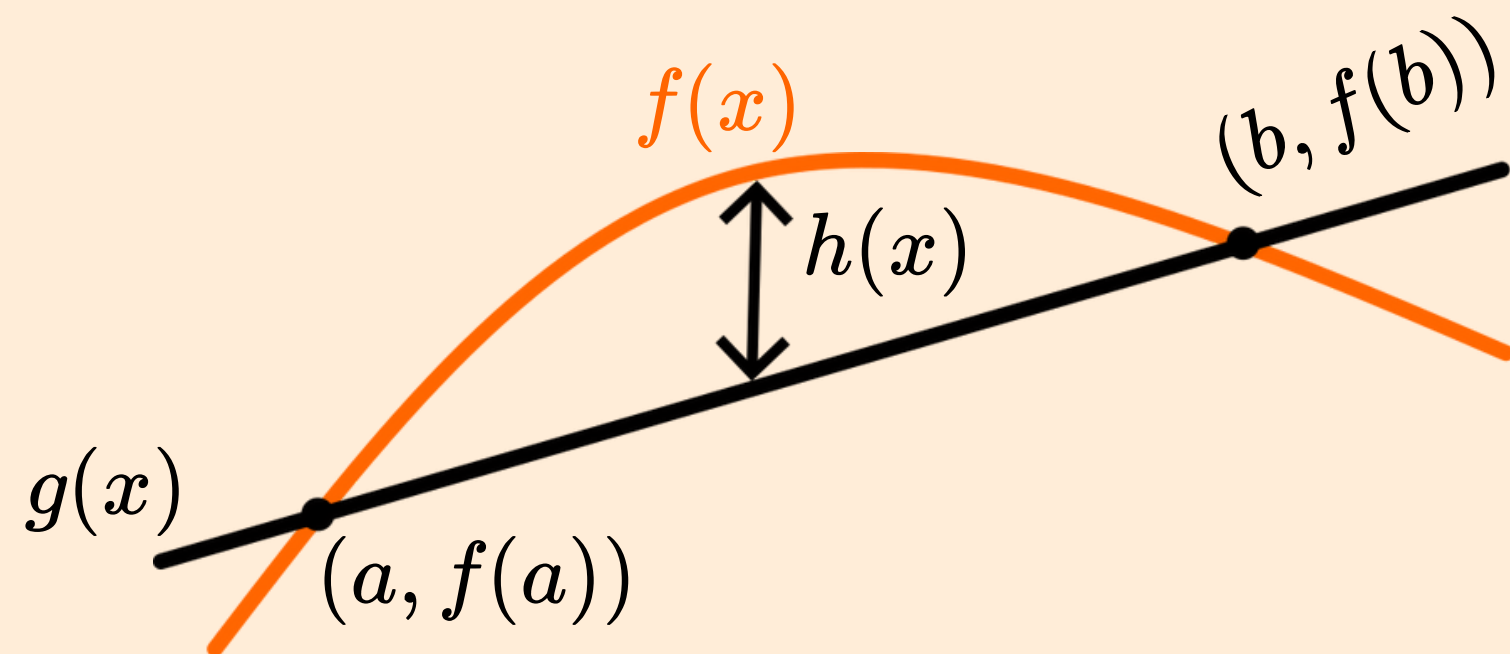
Teorema do valor médio

Teorema: Suponha que $y = f(x)$ seja **contínua** em um intervalo fechado $[a,b]$ e **derivável** no intervalo aberto (a,b) . Então, há pelo menos um ponto **c** em (a,b) em que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema do valor médio

Prova:



$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

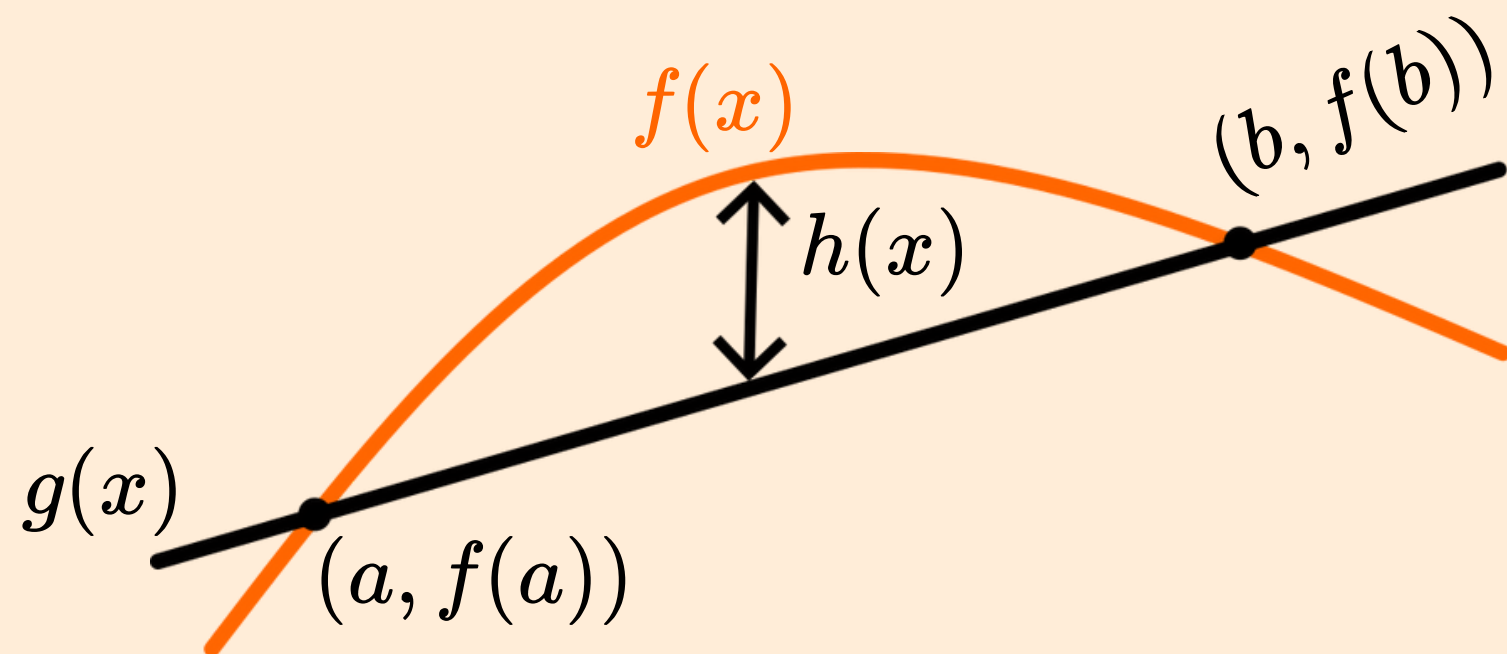
$$h'(x) = f'(x) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

Teorema do valor médio

Prova:



A hipótese do teorema do valor médio não exige que a função seja derivável em a ou b , a continuidade nesses pontos é suficiente

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}$$

Teorema do valor médio

Exemplo: A função $f(x) = x^2$ é contínua em $0 \leq x \leq 2$ e derivável para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$, o teorema do valor médio diz que em algum ponto

$$f'(c) = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

Teorema do valor médio

Exemplo: Se um carro, acelerando a partir do repouso, leva 8 segundos para percorrer 100 metros, sua velocidade média é 12,5 m/s. Segundo o teorema do valor médio, em algum instante após a aceleração o velocímetro marca exatamente 45 km/h.

Teorema do valor médio - aplicações

Corolário 1: Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b) , então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$ onde C é uma constante.

Teorema do valor médio - aplicações

Corolário 1: Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b) , então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$ onde C é uma constante.

Prova:

Teorema do valor médio - aplicações

Corolário 2: Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b) , então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b) .

Teorema do valor médio - aplicações

Corolário 2: Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b) , então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b) .

Prova:

Teorema do valor médio - aplicações

Exemplo: Com o **corolário 2**, podemos provar que

$$\ln(bx) = \ln b + \ln x$$

Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Referências

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1.

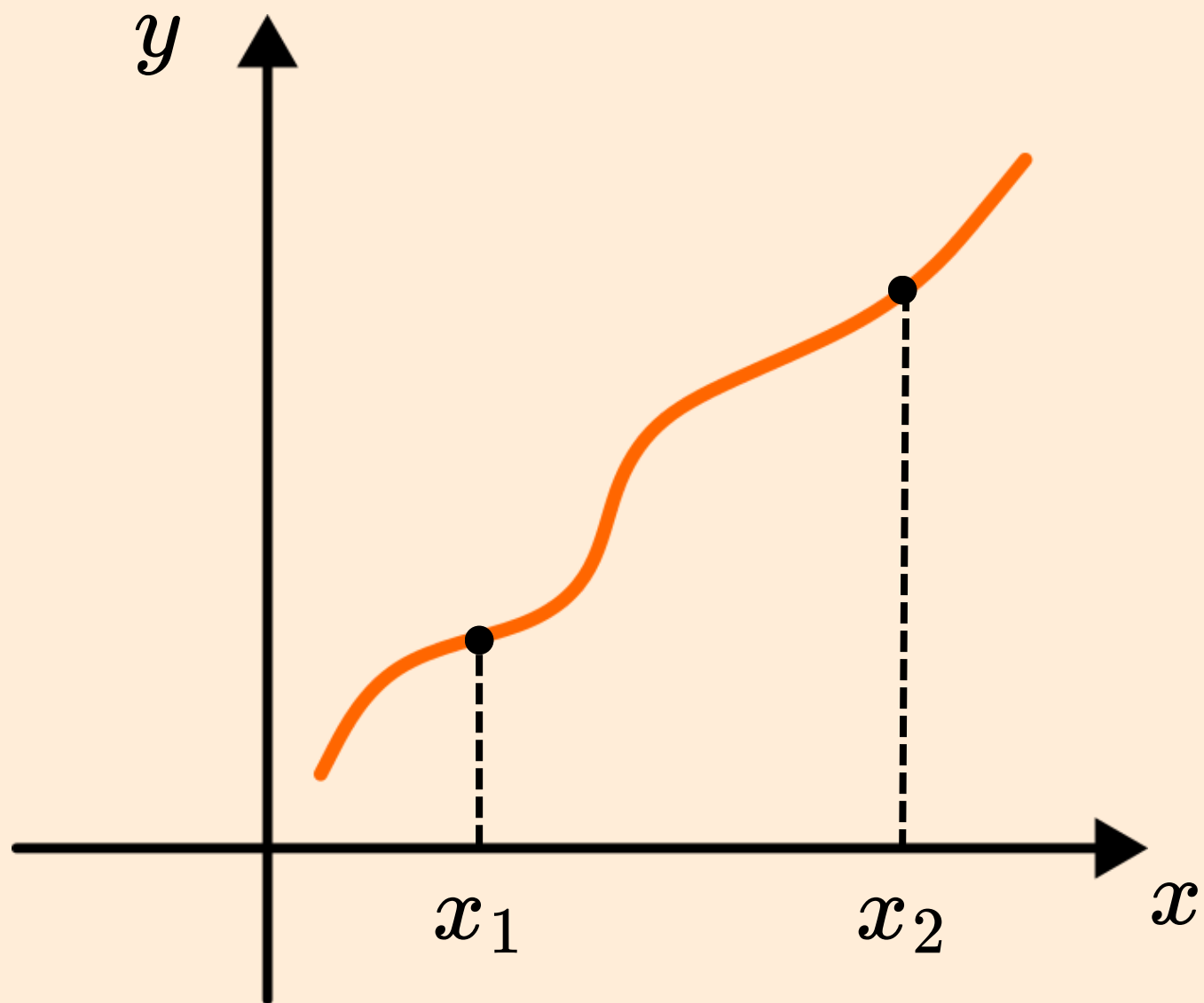
Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Definições: Seja uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em I .

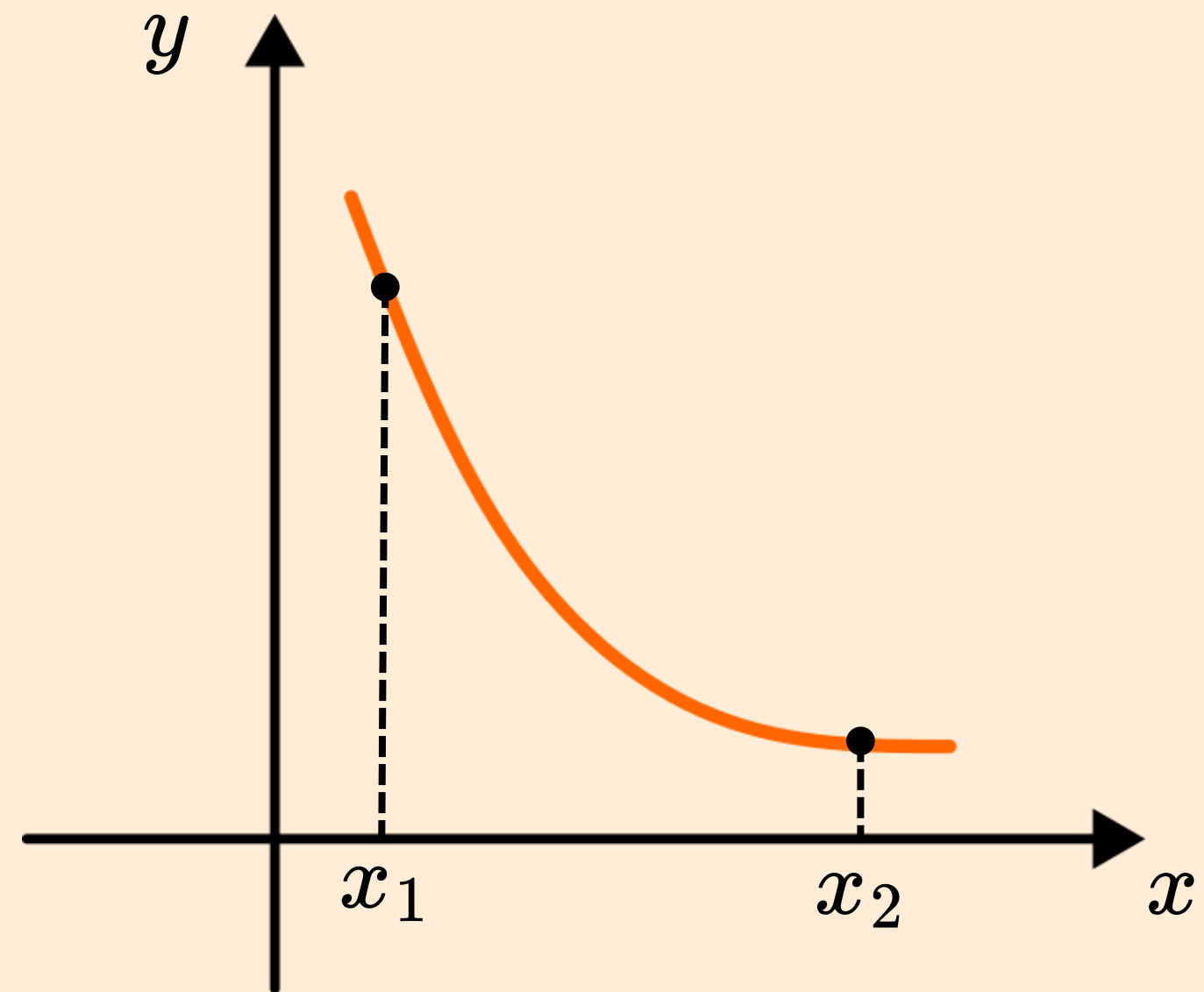
- Se $f(x_1) < f(x_2)$ **sempre** que $x_1 < x_2$, dizemos que a função é **crescente** em I .
- Se $f(x_1) > f(x_2)$ **sempre** que $x_1 < x_2$, dizemos que a função é **decrescente** em I .

Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Crescente

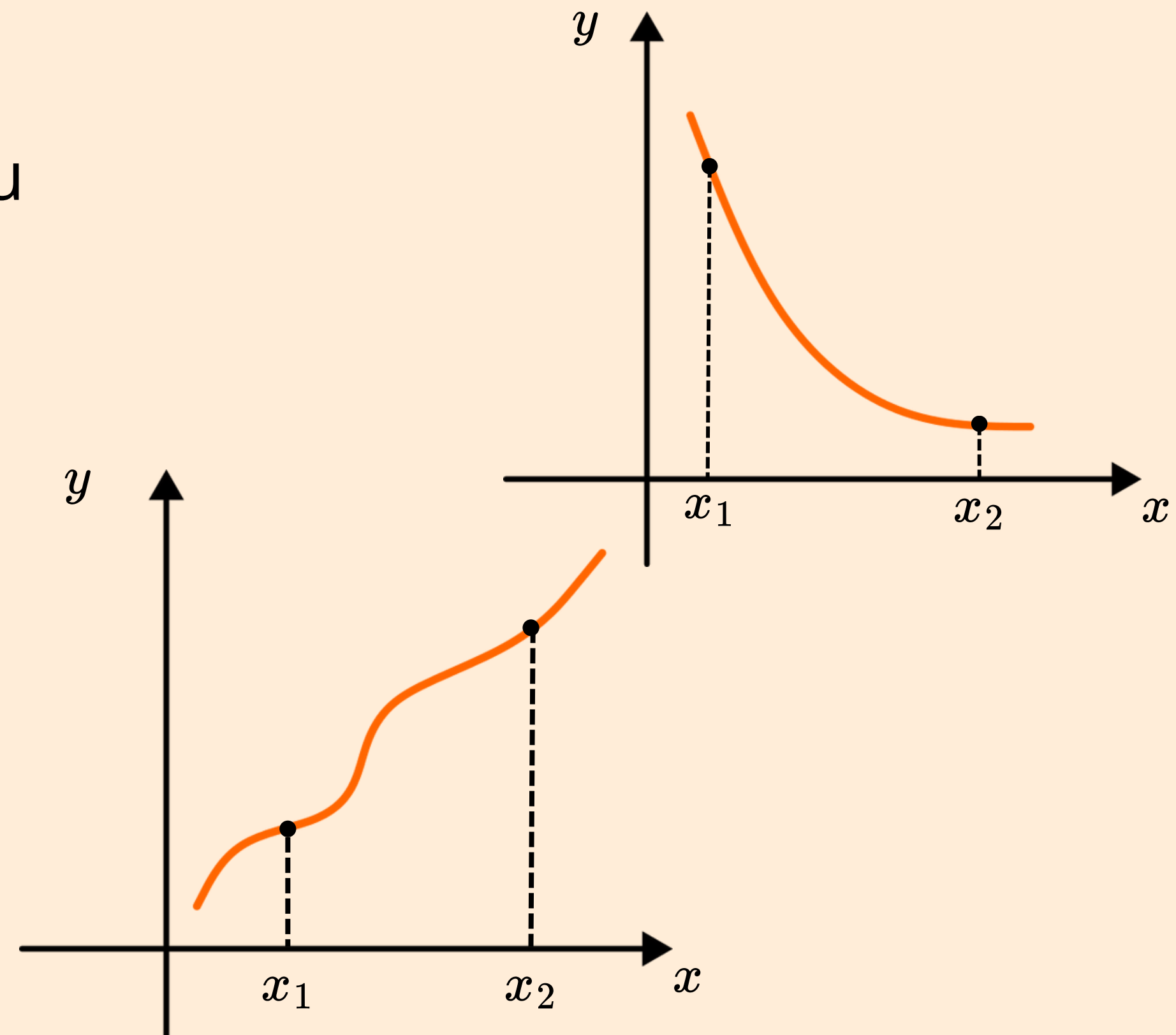


Decrescente



Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

- Uma função que é crescente ou decrescente em um intervalo é chamada de **monotônica** nesse intervalo.
- As definições de funções crescentes e decrescentes precisam ser satisfeitas para **qualquer** par de pontos $x_1, x_2 \in I$ no qual $x_1 < x_2$



Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Corolário 3: Suponha que uma função seja contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) .

- Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então a função é **crescente** em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então a função é **decrescente** em $[a, b]$.

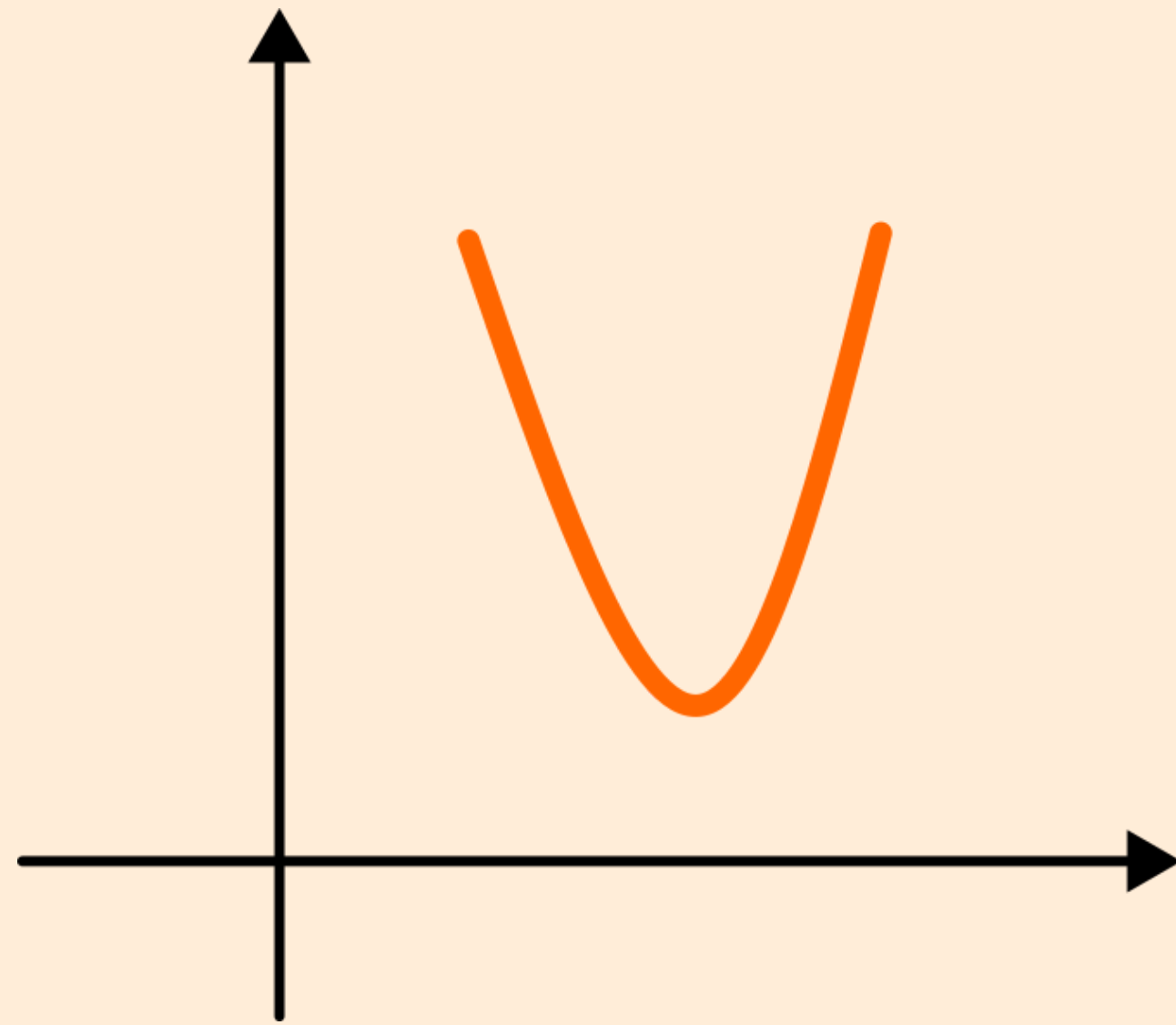
Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Exemplo: Determinar os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$

e identificar os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

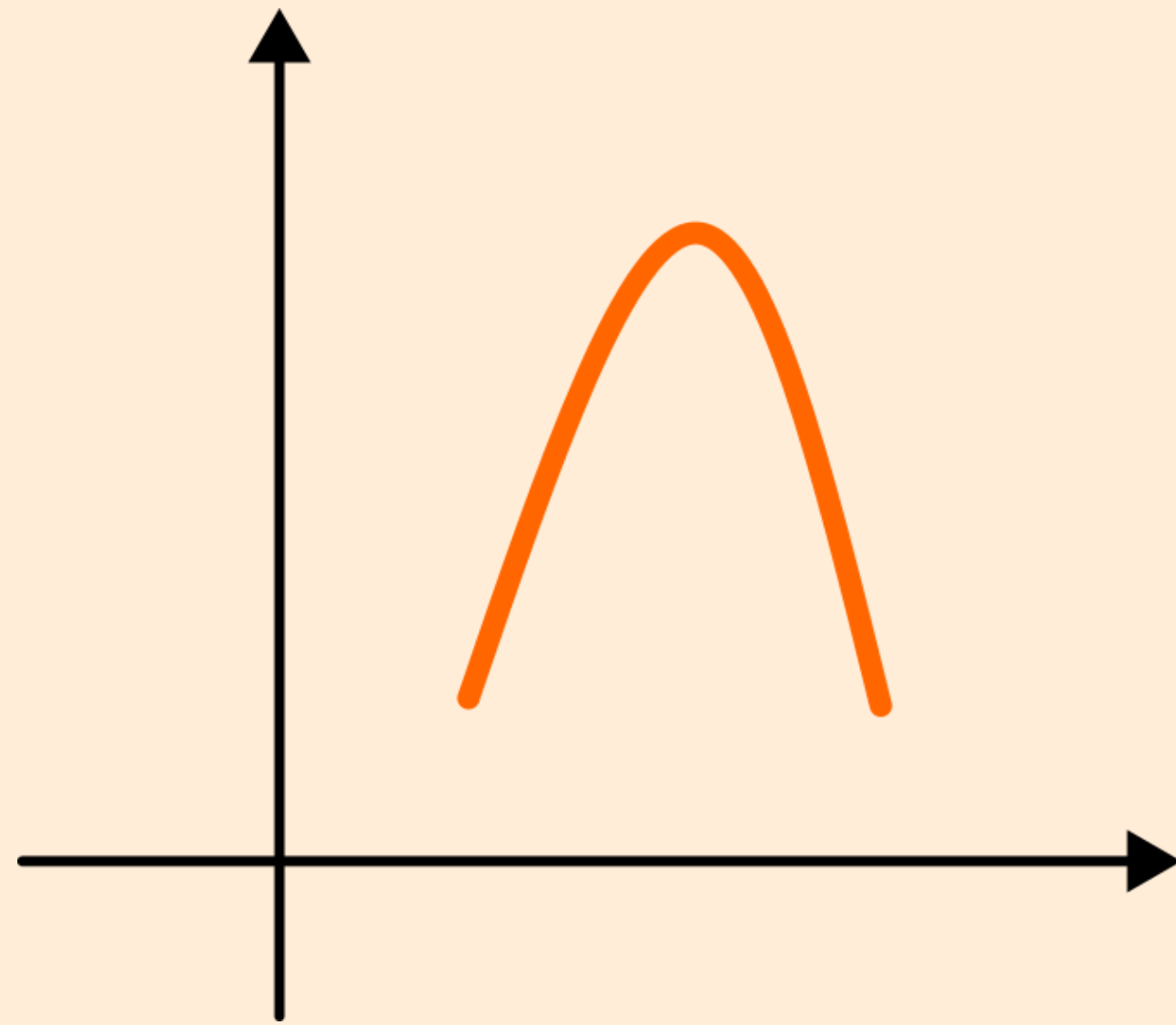
Teste da primeira derivada para extremos locais



Em **pontos de mínimo**, a derivada à esquerda é negativa enquanto a derivada logo à direita é positiva

- A curva está **descendo** à esquerda do valor mínimo e **subindo** à direita.

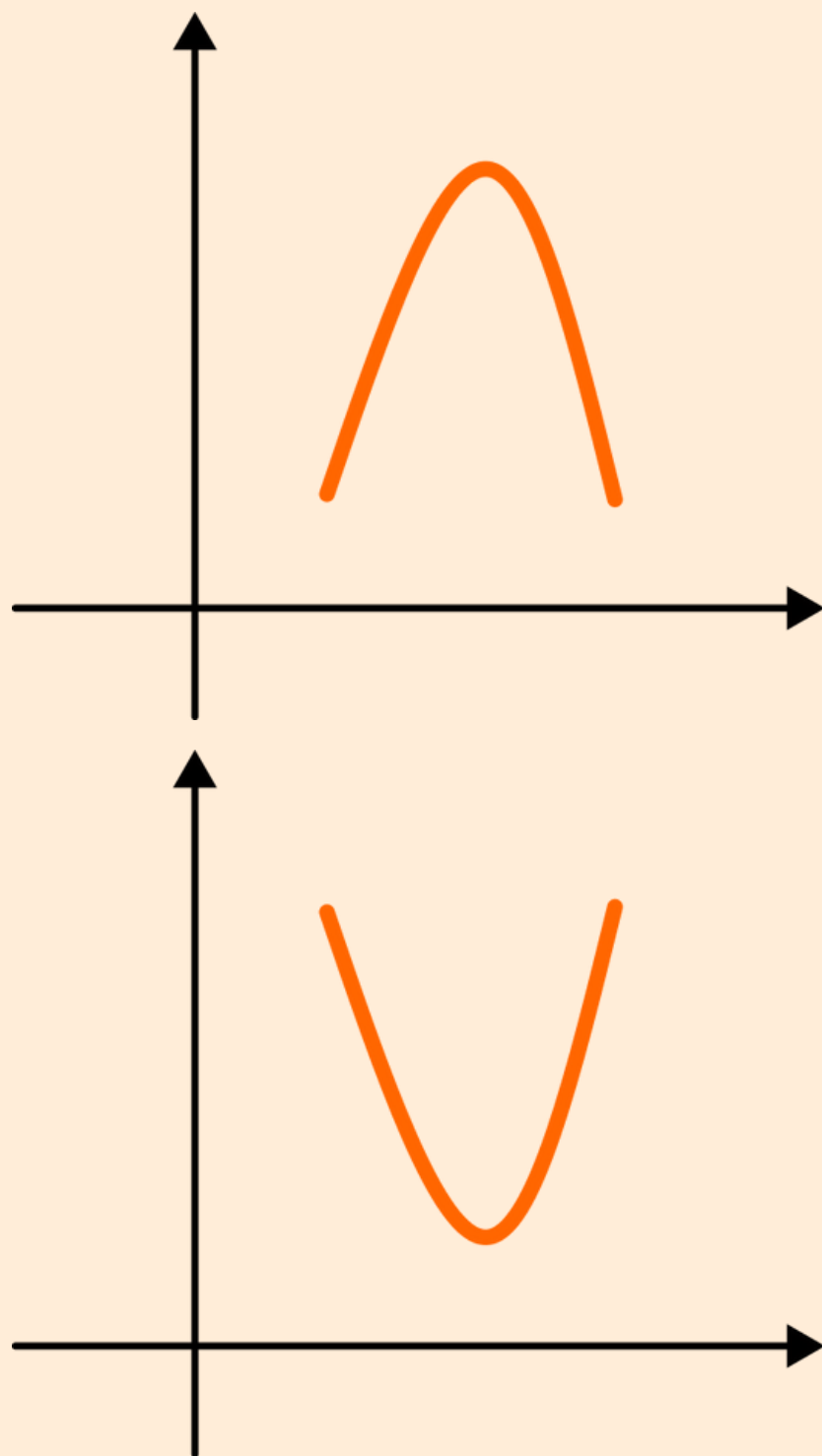
Teste da primeira derivada para extremos locais



Em **pontos de máximo**, a derivada à esquerda é positiva enquanto a derivada logo à direita é negativa

- A curva está **subindo à esquerda** do valor máximo e **descendo à direita**.

Teste da primeira derivada para extremos locais



Em um ponto de extremo local, o sinal da derivada muda.

Teste da primeira derivada para extremos locais

Exemplo: Determine os pontos críticos de

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

e identifique os intervalos onde a função é crescente e decrescente.
Determine os extremos locais e absolutos da função.

Teste da primeira derivada para extremos locais

Exemplo: Determine os pontos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4)$$

e identifique os intervalos onde a função é crescente e decrescente.
Determine os extremos locais e absolutos da função.

Concavidade e esboço de curvas

Referências

- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1.

Concavidade e esboço de curvas

- A **primeira derivada** nos diz onde a função é crescente e decrescente
- Em um **ponto crítico**, a primeira derivada nos diz se existe um **mínimo** ou um **máximo** local, ou se a função continua crescer ou decrescer.
- Com a **segunda derivada**, saberemos sobre o modo como a curva de uma função derivável se **inclina** ou **muda de direção**.

Concavidade

Definição: O gráfico de uma função derivável é

- **Côncavo para cima** em um intervalo aberto se a **derivada é crescente** nesse intervalo
- **Côncavo para baixo** em um intervalo aberto se a **derivada é decrescente** nesse intervalo

Concavidade

- O comportamento de inclinação e mudança de direção define a concavidade da curva
- Se uma função possui uma segunda derivada, podemos aplicar o corolário 3 do teorema do valor médio para concluir que
 - se f' é **crescente**, $f'' > 0$ no intervalo aberto.
 - se f' é **decrescente**, $f'' < 0$ no intervalo aberto

Teste da segunda derivada para concavidade

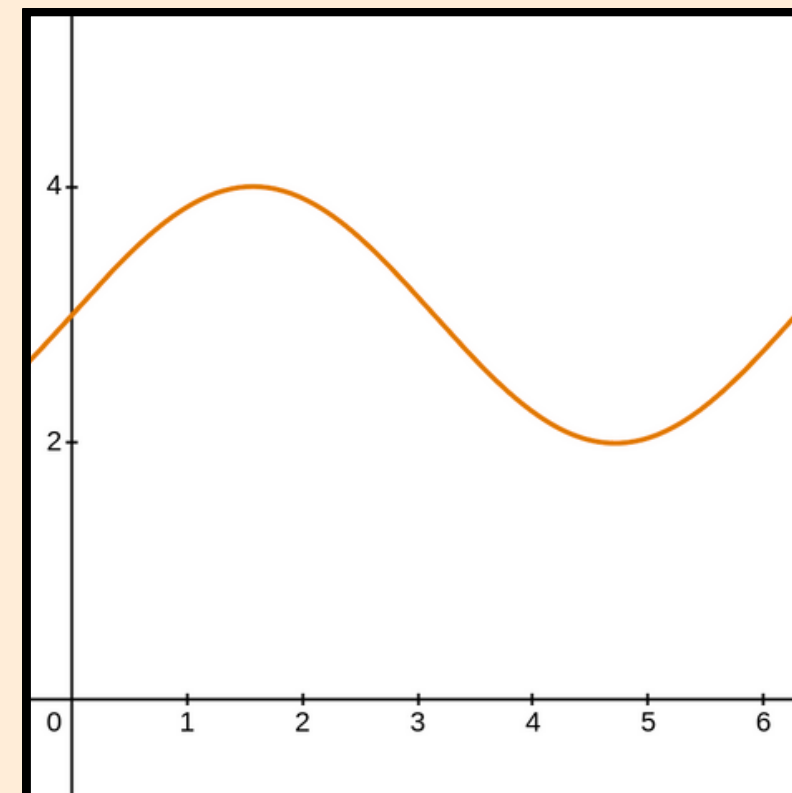
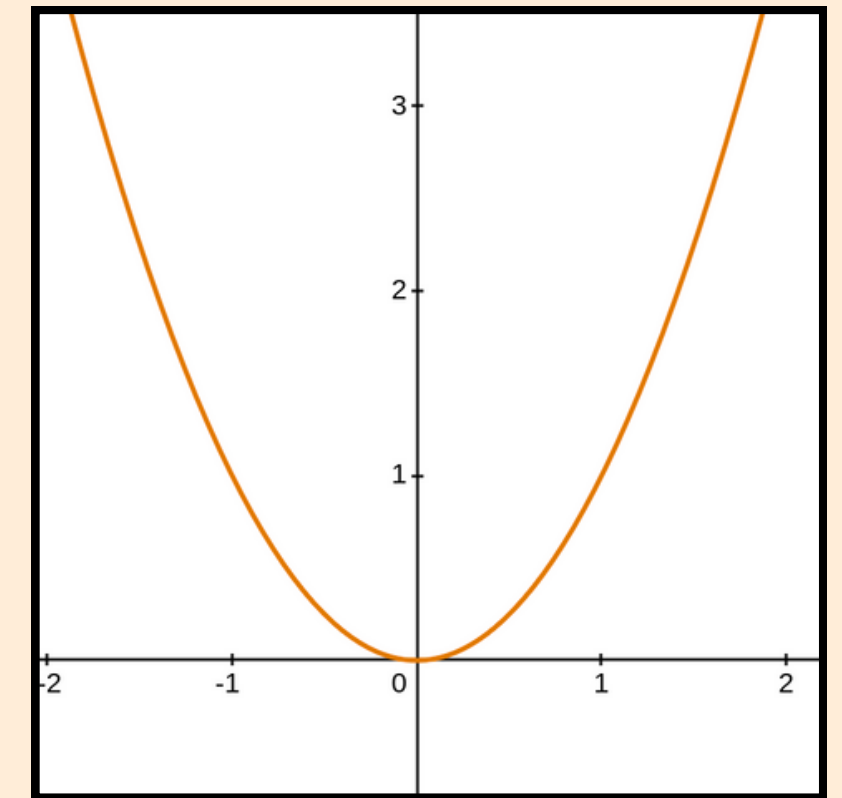
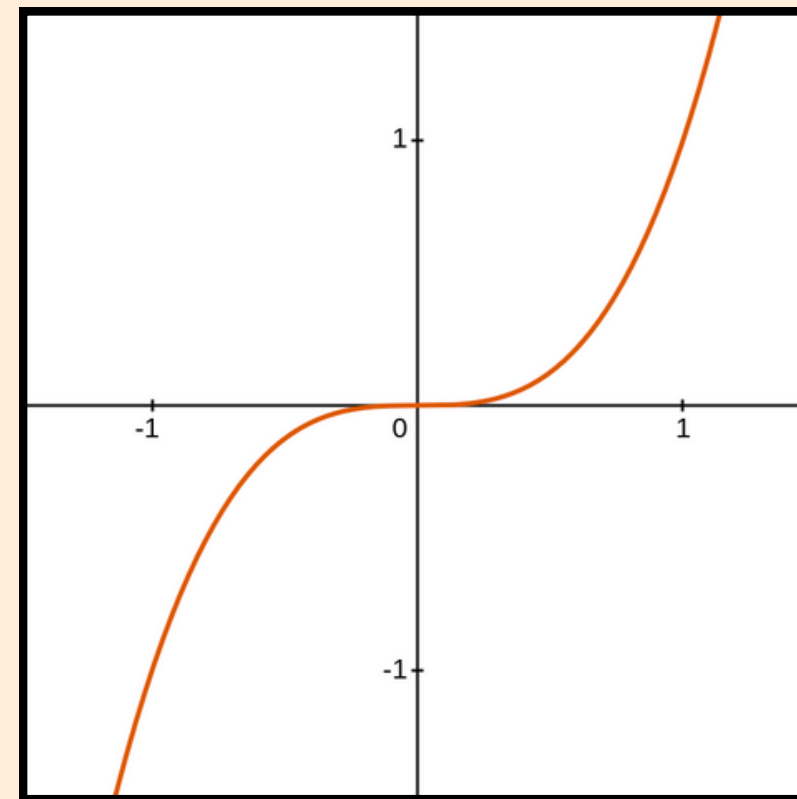
Seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo I

- Se $f'' > 0$ no intervalo, o gráfico da função ao longo do intervalo é **côncavo para cima**.
- Se $f'' < 0$ no intervalo, o gráfico da função ao longo do intervalo é **côncavo para baixo**.

Teste da segunda derivada para concavidade

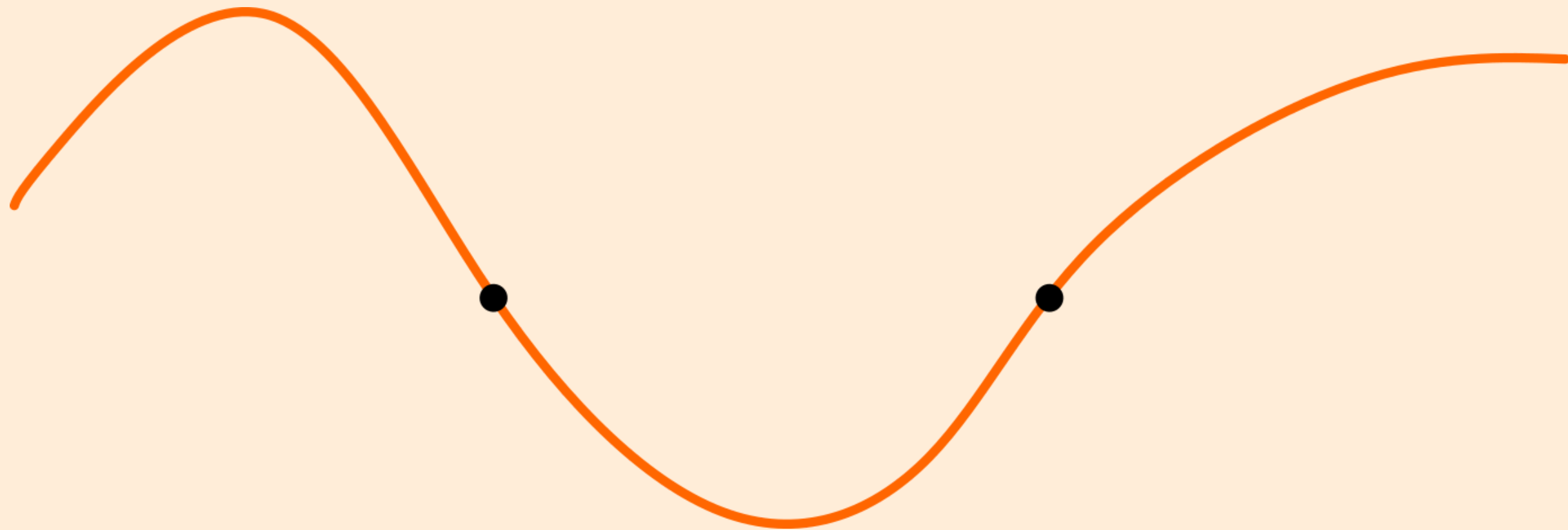
Exemplos:

- $y = x^3$
- $y = x^2$
- $y = 3 + \text{sen } x, \quad x \in [0, 2\pi]$



Pontos de inflexão

Definição: Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um **ponto de inflexão**.



Pontos de inflexão

- No **ponto de inflexão**, $f'' = 0$ ou f'' é **indefinida**.
 - Um ponto no qual a segunda derivada é positiva de um lado e negativa do outro é um **ponto de inflexão**.

Exemplo:

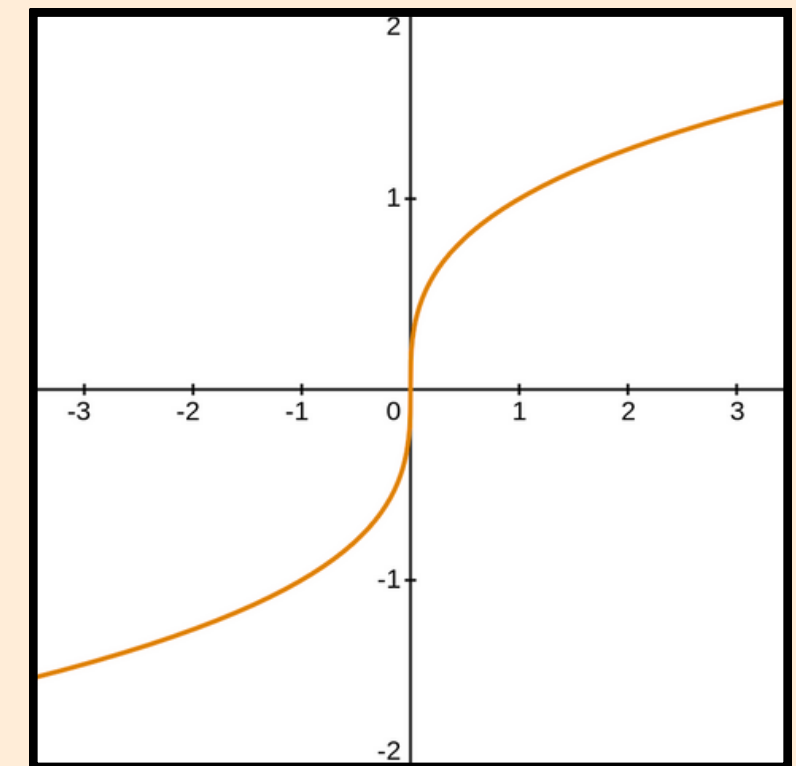
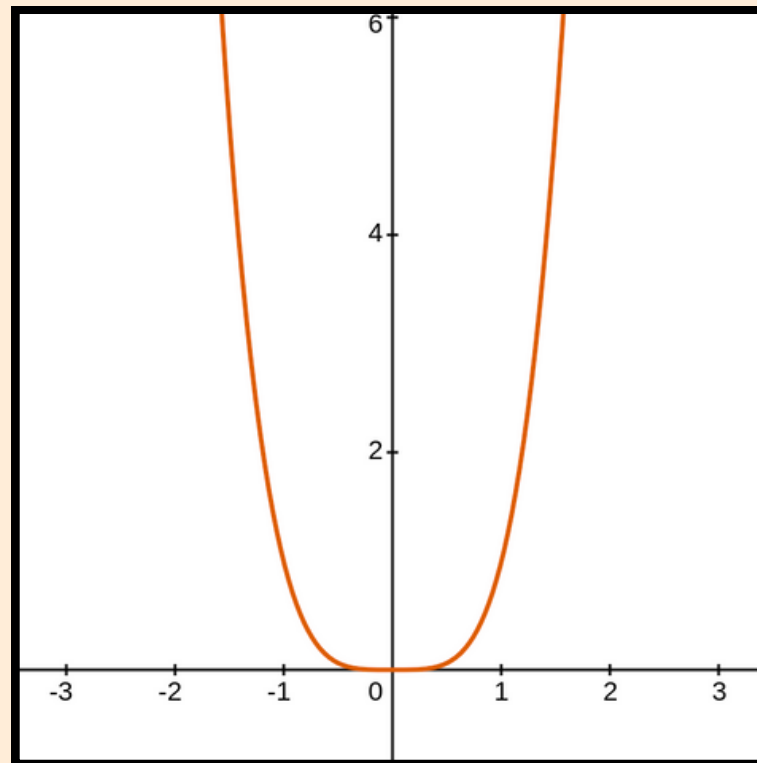
- $y = x^4$
- $y = x^{1/3}$

Pontos de inflexão

- No **ponto de inflexão**, $f'' = 0$ ou f'' é **indefinida**.

Exemplo:

- $y = x^4$
- $y = x^{1/3}$



Pontos de inflexão

Exemplo: Estudar o movimento dado pelo deslocamento

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$$

Concavidade e esboço de curvas

Teorema: Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$

- Se $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$, então temos um **máximo local**
-
- Se $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$, então temos um **mínimo local**
-
- Se $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$, o **teste falha**, a função pode ter um máximo local, um mínimo local ou nenhum dos dois

Esboço de curvas

- Identificar o **domínio** da função
- Determinar a **primeira e segunda derivada**
- Determinar os **pontos críticos** e o comportamento da função em cada um deles
- Determinar os intervalos de **crescimento e decrescimento**
- Determinar os **pontos de inflexão** e a **concavidade da curva**
- Identificar **assíntotas**

Esboço de curvas

Exemplo: Esboce o gráfico das funções

- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

- $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

- $f(x) = e^{2/x}$