# Formas indeterminadas e a regra de L'Hopital

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1

**Referências:**


- THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

# Formas indeterminadas e a regra de L'Hopital

- **John Bernoulli** descobriu uma regra para calcular limites de funções cujos **numeradores** e **denominadores** tendem a **zero** ou ao **infinito.**

# Formas indeterminadas e a regra de L’Hopital

- **John Bernoulli** descobriu uma regra para calcular limites de funções cujos **numeradores** e **denominadores** tendem a **zero** ou ao **infinito.**
  - A regra é atualmente conhecida como **regra de L’Hopital**.

# Forma indeterminada 0/0

- Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser encontrado por substituição.

# Forma indeterminada 0/0

- Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser encontrado por substituição.

  - A partir de manipulações algébricas é possível determinar o limite

# Forma indeterminada 0/0

- Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser encontrado por substituição.

  - A partir de manipulações algébricas é possível determinar o limite
    - A **regra de L'Hopital** é uma forma alternativa de calcular limites com essas indeterminações a partir do uso de derivadas.

# Forma indeterminada 0/0

**Teorema:** Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

# Forma indeterminada 0/0

**Teorema:** Suponha que $f(a) = g(a) = 0$ , que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$ . Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

**Prova:**

# Forma indeterminada 0/0

**Teorema:** Suponha que

$$f(a) = g(a) = 0$$

que $f$ e $g$ sejam deriváveis em um intervalo aberto contendo $x = a$ e que $g'(x) \neq 0$ neste intervalo se $x \neq a$. Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

# Forma indeterminada 0/0

**Exemplo:**

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2}$$

# Forma indeterminada 0/0

A **regra de L'Hopital** se aplica também a **limites laterais**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

# Formas indeterminadas: $\infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$

Se $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$ quando $x \to a$ , então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o último limite exista.

# Formas indeterminadas: $\infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$

**Exemplo:**

- $\lim\limits_{x \to \pi/2} = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

# Formas indeterminadas: $\infty/\infty, \infty \cdot 0, \infty - \infty$

Em alguns casos, é possível transformar algebricamente uma indeterminação na forma $\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$ para as formas $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$.

**Exemplo:**

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, \ln x$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$

# Potências indeterminadas

Os limites que levam às formas indeterminadas $1^\infty, 0^0, \infty^0$ podem, às vezes, ser tratados utilizando-se primeiro logaritmos.

- Usamos então a **regra de L'Hopital** para encontrar o limite do logaritmo e, calculando a exponencial nesse valor, obtemos o limite da função original

Se $\lim_{x \to a} \ln f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

# Potências indeterminadas

**Exemplo:**

- $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

# Regra de L'Hopital - Exemplos

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left( \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\text{sen } x} \right)$
- $\lim\limits_{x \to \infty} e^x \left[ e - \left( 1 + \dfrac{1}{x} \right)^x \right]$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

# Regra de L’Hopital - Exemplos

- $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x^2}\right]^x$

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

- $\lim_{x\to\infty}(x+1)^{1/\ln x}$

# Fórmula de Taylor

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1

**Referências:**


- LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Habra ltda.,1994. v.1.

# Fórmula de Taylor

Os valores de uma função polinomial podem ser encontrados a partir de um número finito de adições e multiplicações.

- Por outro lado, existem outras funções, como a logarítmica, a exponencial e as funções trigonométricas, que não podem ser calculadas tão facilmente.
    - Muitas funções podem ser **aproximadas por polinômios.**

# Fórmula de Taylor

Existem vários métodos para aproximar uma função dada por polinômios

- Um dos métodos mais utilizados é o que envolve a **fórmula de Taylor.**

# Fórmula de Taylor

**Teorema:** Seja **f** uma função tal que **f** e suas **n** primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado **[a,b]**. Além disso, a derivada n+1 existe no intervalo aberto **(a,b)**. Então, existe um número $\xi$ no intervalo aberto **(a,b)** tal que

$$\boxed{f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}$$

A fórmula também é válida se b<a.

# Fórmula de Taylor

Se **n=0**, temos

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$$

onde $\xi$ está entre **a** e **b**. Este é o **teorema do valor médio**.

- Assim, temos que o teorema que estabelece a fórmula de Taylor é uma generalização do teorema do valor médio

# Fórmula de Taylor

Se substituirmos **b** por **x**, obtemos a **fórmula de Taylor**

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

onde $\xi$ está entre **a** e **x**.

# Fórmula de Taylor

Condições para a fórmula ser válida

- **f** e suas **n** derivadas são contínuas em um intervalo fechado contendo **a** e **x**

- a (n+1)-ésima derivada de **f** deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente.

# Fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor pode ser escrita como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde o **polinômio de Taylor** é

$$P_n(x) = f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

e o **resto na forma de Lagrange é**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

# Fórmula de Maclaurin

O caso especial da fórmula de Taylor, obtida quando **a=0**, é

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

com $0 < \xi < x$, e é denominada **fórmula de Maclaurin**.

- Assim, o **polinômio de Maclaurin** de n-ésimo grau para uma função **f** é

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

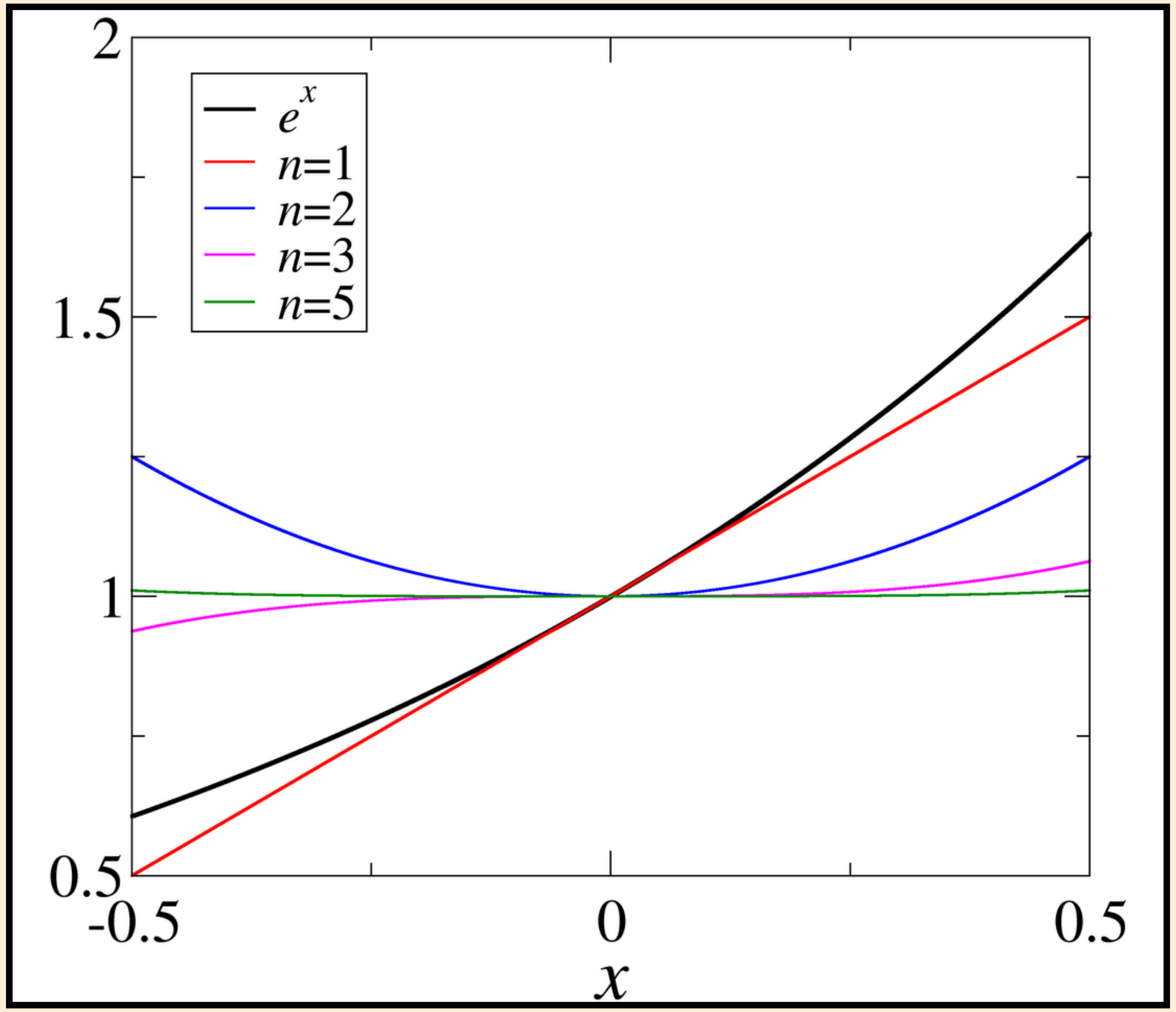
# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Polinômio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Polinômio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$



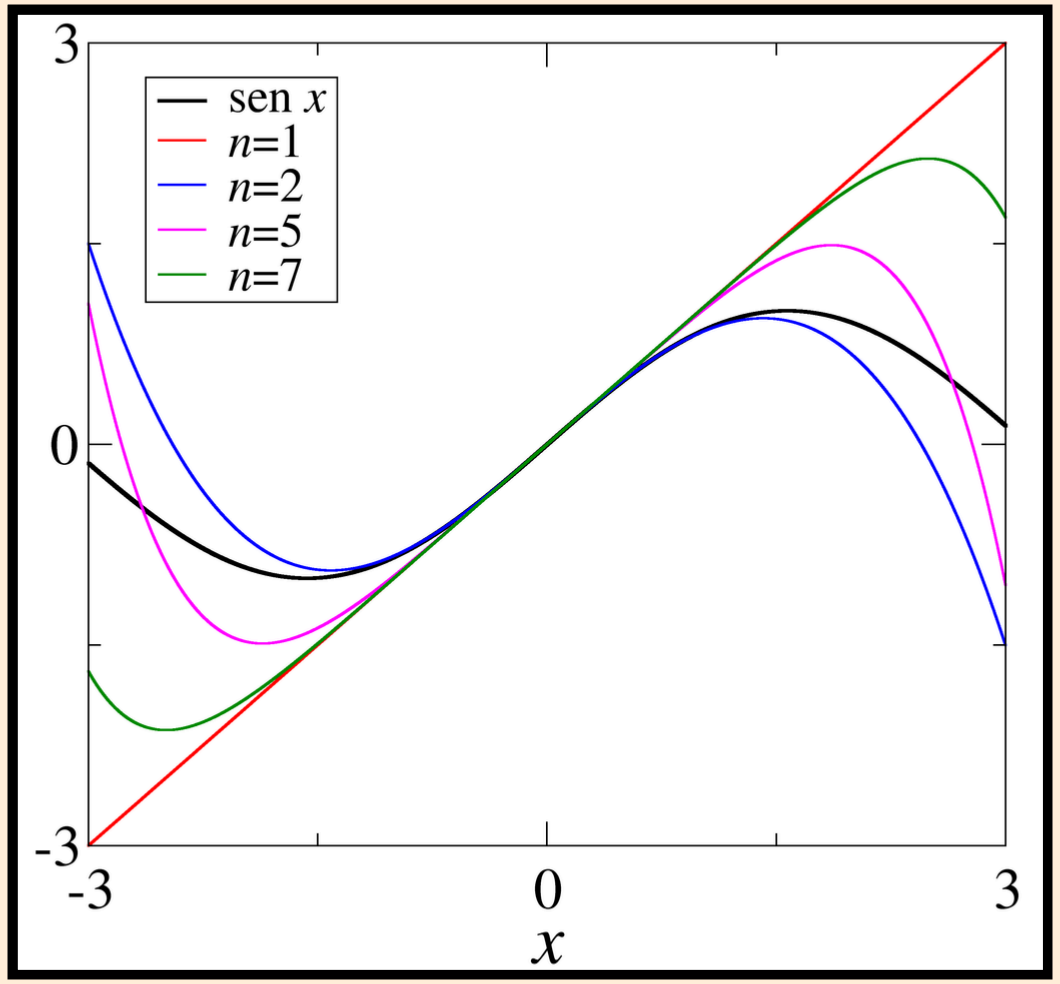
# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Polinômio de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$

# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Polinômio de Maclaurin para $f(x) = \text{sen}\, x$

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$



# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Ache o polinômio de Taylor de terceiro grau de

$$f(x) = \cos x$$

em $\pi/4$ e o resto na forma de Lagrange.

# Fórmula de Maclaurin

**Exemplo:** Use um polinômio de Maclaurin para encontrar um valor de $\sqrt{e}$ exato até a quarta casa decimal.