

Números Reais

→ Números naturais $\mathbb{N}$

Chama-se conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Dois operações fundamentais são definidas: adição e multiplicação, com as seguintes propriedades.

→ Adição

- Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Comutativa: $a+b = b+a$
- Elemento neutro: $a+0 = a$

→ Multiplicação

- Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$

→ Distributiva da multiplicação em relação à adição
 $a(b+c) = ab + ac$

→ Números inteiros $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é definido por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Há três subconjuntos notáveis

- 1) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
- 2) $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- 3) $\mathbb{Z}^* = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

Neste conjunto, também temos as operações adição e multiplicação. As propriedades definidas para $\mathbb{N}$ também são válidas para $\mathbb{Z}$. Aqui, temos mais a seguinte propriedade

→ Elemento simétrico ou oposto para a adição
 $a + (-a) = 0$

Em $\mathbb{Z}$, temos a definição da operação de subtração:
 $a - b = a + (-b)$

→ Números racionais $\mathbb{Q}$

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é formado pelas frações $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Neste conjunto, também temos as operações de adição e multiplicação, definidas abaixo:

→ Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

→ Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Temos também a relação de igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Relembrando, na fração a/b , a é o numerador e b é o denominador.

A seguir, apresentamos algumas propriedades relacionadas às operações de adição e multiplicação.

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b} \right) = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right)$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

→ Elemento simétrico / inverso para a multiplicação
 $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, para $a/b \neq 0$

Agora, podemos definir a operação de divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

→ Números irracionais II

O conjunto dos números irracionais é composto pelos números que não podem ser representados por frações a/b . São esses os números com infinitas casas decimais que não se repetem. Por exemplo:

$$\pi = 3,14159\dots$$

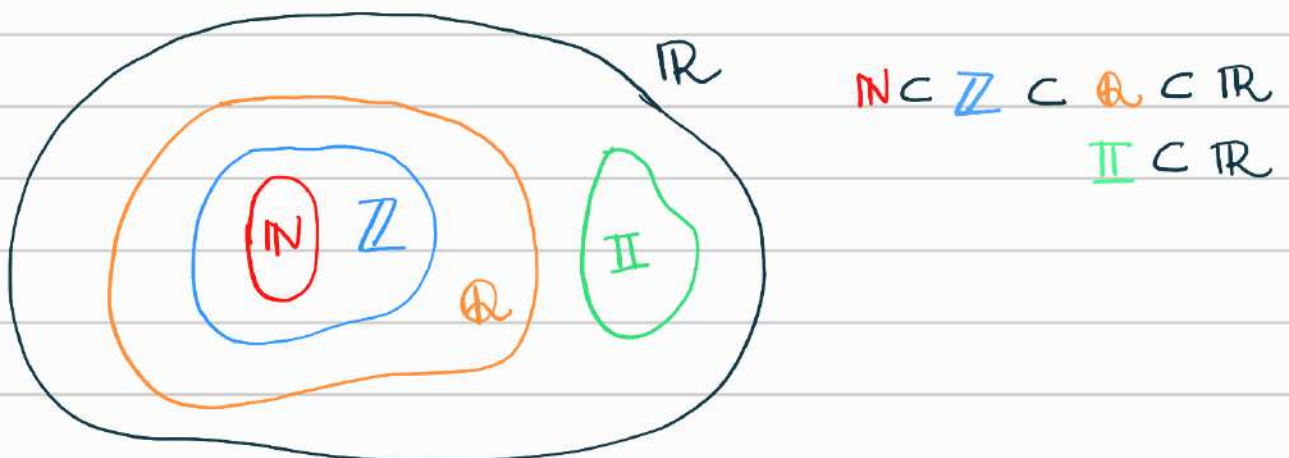
$$e = 2,71828\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots$$

→ Números reais $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é formado pela união dos números racionais $\mathbb{Q}$ e irracionais II. Assim como nos outros conjuntos, a adição e subtração são operações definidas em $\mathbb{R}$ assim como as propriedades apresentadas para $\mathbb{Q}$.

De forma esquemática, temos



Valor absoluto

Seja x um número real, definimos o módulo (ou valor absoluto) de x por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $|x| \geq 0$ para todo número x real.

Intervalos

Intervalos são subconjuntos, uma coleção específica de números dentro do conjunto dos números reais. Considerando dois números reais a e b , com $a < b$. Temos os possíveis intervalos

→ Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



→ Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



→ Intervalo semiaberto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



→ Intervalos infinitos

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



Frações

O quociente de a por b , onde $b \neq 0$, representado por a/b é definido por

$$\begin{array}{l} \text{numerador} \rightarrow \underline{a} \\ \text{denominador} \rightarrow \underline{b} \end{array} = a \cdot \frac{1}{b}$$

a/b também é denominado de fração ou razão.

→ Igualdade

Sejam $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se e somente se } ad = bc$$

→ Regra de sinais

- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

→ Soma de frações

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \rightarrow \text{mesmo denominador } (c \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

→ Produto de frações

Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

→ Quociente de frações

Se $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$,

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Potências, raízes e logaritmo

→ Potências de expoente natural

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ vezes}}$$

→ Operações

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

→ Potência de expoente inteiro

Para qualquer $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

→ Raízes

Seja a um número positivo, e m e n números naturais. Desta forma, temos

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

→ Logaritmo

Sejam a e b números reais positivos com $b \neq 1$, chamamos de logaritmo de a na base b o expoente real x ao qual se eleva b para obter a , ou seja,

$$\log_b a = x \iff b^x = a, \text{ com } a > 0, b > 0, b \neq 1$$

Os números 10 e e são bases especiais:

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_e x = \ln x$$

Pela definição, temos

- $\log_b 1 = 0 \rightarrow b^0 = 1$
- $\log_b b = 1 \rightarrow b^1 = b$
- $\log_b b^m = m$
- $b^{\log_b a} = a \rightarrow \text{sendo } x = \log_b a, b^x = a$

Agora, apresentamos algumas propriedades operatórias

- $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$

$$\bullet \log_b a^m = m \log_b a$$

Polinômios

De forma geral, um polinômio na variável x é indicado por $p(x)$ e é definido por uma soma de monômios.

↳ Monômios são termos algébricos cujo coeficiente é real e os expoentes são naturais.

↳ Exemplos: $7x^2$, $5xz$, x^6y^7 , ...

→ **Soma e subtração**: para somar ou subtrair polinômios, deve-se somar ou subtrair apenas termos semelhantes (mesmas variáveis com os mesmos coeficientes)

$$\begin{aligned} \bullet (6x^3 + 2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 2) &= (6+2)x^3 + (2-4)x^2 + (-3+2)x + (1-2) \\ &= 8x^3 - 2x^2 - x - 1 // \end{aligned}$$

→ **Multiplicação**: é necessário realizar a multiplicação entre todos os termos.

$$\begin{aligned} \bullet (2x + y)(x^3 + 3x + 1) &= 2x(x^3 + 3x + 1) + y(x^3 + 3x + 1) \\ &= 2x \cdot x^3 + 2x \cdot 3x + 2x \cdot 1 + y \cdot x^3 + y \cdot 3x + y \cdot 1 \\ &= 2x^4 + 6x^2 + 2x + yx^3 + 3xy + y // \end{aligned}$$

→ **Divisão**: em uma divisão, temos

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \frac{\text{quociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}}{\text{divisor}} \rightarrow \begin{array}{c} \text{dividendo} \mid \text{divisor} \\ \hline \vdots \\ \text{resto} \quad \text{quociente} \end{array}$$

Alcance, mostramos uma divisão do polinômio $5x^3+4-3x$ por x^2-x+1 .

$$1) 5x^3 + 4 - 3x = 5x^3 + 0x^2 - 3x + 4$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 5x^3 + 0x^2 - 3x + 4 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ \underline{-5x^3 + 5x^2 - 5x} \quad 5x + 5 \\ 0 + 5x^2 - 8x + 4 \\ \underline{-5x^2 + 5x - 5} \\ 0 - 3x - 1 \end{array}$$

$$3) \quad \frac{5x^3 - 3x + 4}{x^2 - x + 1} = 5x + 5 + \frac{(-3x - 1)}{x^2 - x + 1}$$

Equações

Uma equação é uma igualdade que se verifica apenas para valores específicos das variáveis. Por exemplo, a igualdade

$$3x + 2 = 5$$

é válida quando $x=1$.

→ Um número é dito ser **raiz** de uma equação se ele torna a igualdade verdadeira quando substituído no lugar da variável/incógnita

→ Equações de primeiro grau

$$ax + b = 0 \longrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

→ Equações de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Inequações

A inequação é uma desigualdade expressa nas formas

$$f(x) > c, \quad f(x) < c, \quad f(x) \geq c, \quad f(x) \leq c.$$

Seja f uma função e c um número real, a solução de uma inequação é o conjunto de números reais que a satisfazem.

→ Regras básicas

1) Adição e subtração: a adição ou subtração nos dois lados da inequação não altera o sentido da desigualdade.

2) Multiplicação por um número positivo: multiplicar os dois lados da inequação por um número positivo

não muda o sentido da desigualdade.

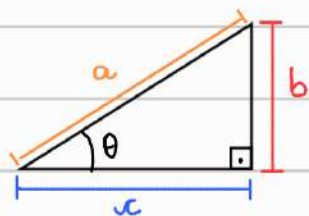
3) Multiplificação por um número negativo: multiplicar ambos os lados da inequação por um número negativo inverte o sentido da desigualdade.

4) Inversão: inverter dois lados positivos de uma inequação também inverte o sinal de desigualdade.

Exemplo: $\frac{a}{b} < c \rightarrow \frac{b}{a} > \frac{1}{c}$.

Trigonometria

→ Triângulo retângulo



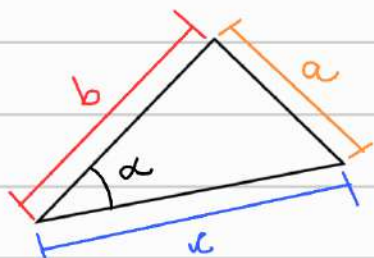
$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{c}$$

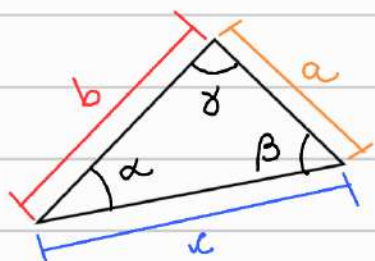
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

→ Lei dos cossenos



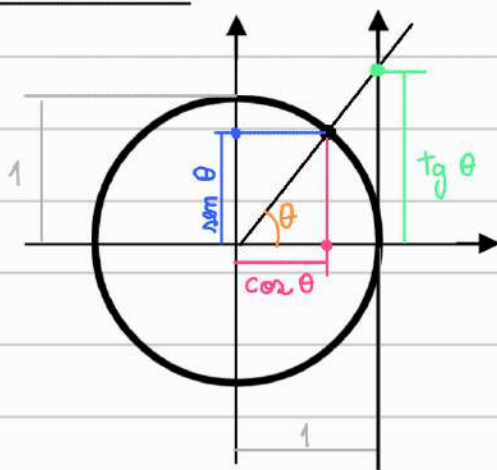
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

→ Lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

→ Círculo unitário



→ Algumas identidades

$$\rightarrow \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

→ Funções inversas

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

Funções Hiperbólicas

- Seno hiperbólico: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Cosseno hiperbólico: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Tangente hiperbólica: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- Secante hiperbólica: $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
- Cossecante hiperbólica: $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
- Cotangente hiperbólica: $\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$