

Números reais

O conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$ contém todos os números racionais ($\mathbb{Q}$) e os números irracionais ($\mathbb{I}$). Em $\mathbb{R}$, duas operações são definidas: adição (+) e multiplicação ($\cdot$ ou $\times$). Além disso, temos a relação $\leq$.

→ A adição associa a cada par de números (x, y) um único número real: $x + y$

→ A multiplicação também associa a cada par (x, y) um único número real: $x \cdot y$

Funções

→ Definição, domínio e imagem

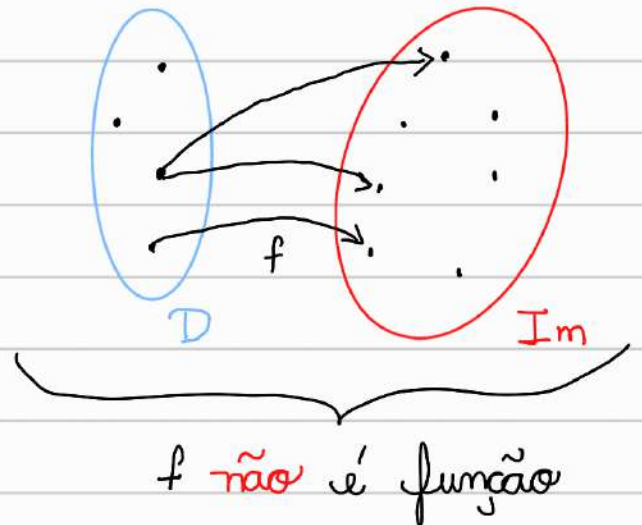
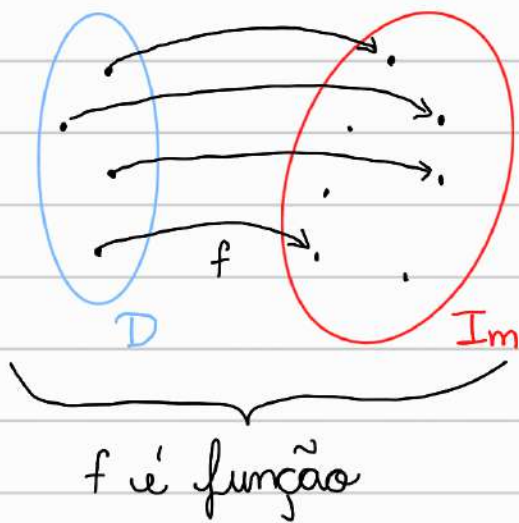
Em muitos casos, o valor de uma variável, que podemos representar por y , depende do valor de outra, que podemos denominar x . Neste caso, dizemos que y é uma função de x . De modo geral, o valor de y é dado por uma regra ou fórmula que define como calcular o seu valor a partir de x .

De forma simbólica, quando nos referimos a uma função genérica, nos referimos a " y é função de x " e representamos por

$$y = f(x)$$

onde f representa a função, x representa a variável independente e y a variável dependente.

Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Im é uma regra que associa um único elemento $f(x) \in Im$ a cada elemento $x \in D$.



O conjunto D chama-se domínio e contém todos os possíveis valores de entrada da função. O conjunto de todos os valores $f(x)$ enquanto x varia ao longo de D denomina-se imagem da função.

• Os domínios e as imagens de funções podem ser o próprio conjunto dos números reais, mas também podem ser intervalos ou combinações de intervalos. Estes intervalos podem ser abertos, fechados ou semi-abertos, além de finitos ou infinitos.

→ Exemplos

- $y = x^2 \rightarrow D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}, Im = \{y \mid y \geq 0\}$
 $\rightarrow D: (-\infty, \infty), Im: [0, \infty)$
- $y = \sqrt{4-x} \rightarrow D = \{x \mid x \leq 4\}, Im = \{y \mid y \geq 0\}$
 $\rightarrow D: (-\infty, 4], Im: [0, \infty)$
- $y = \frac{1}{x} \rightarrow D = \{x \mid x \neq 0\}, Im = \{y \mid y \neq 0\}$
 $\rightarrow D: (-\infty, 0) \cup (0, \infty), Im: (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

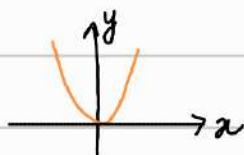
→ Gráficos de funções

É possível visualizar uma função por meio de seu gráfico. Se f é uma função com domínio D , seu gráfico é formado pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são os pares (x, y) , onde $y = f(x)$. Em notação de conjunto, o gráfico é definido por

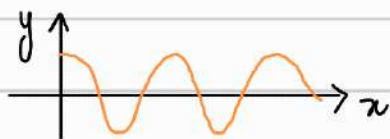
$$\{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$

→ Exemplos

- $f(x) = x^2$



- $f(x) = \cos x$

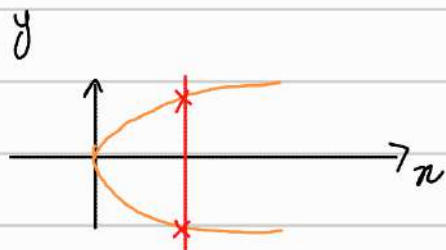


• Teste da reta vertical

Nem toda curva representa o gráfico de uma função. Uma função f pode ter apenas um valor $f(x)$ para cada x em seu domínio. Dessa forma, **nenhuma reta vertical poderá cruzar a curva da função mais de uma vez.**



→ é uma função



→ não é função

→ Algumas propriedades

Dada duas funções f e g , temos:

1) a sua soma, denotada por $f+g$, é a função definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) a sua diferença, denotada por $f-g$, é a função

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

3) o seu produto, denotado por $f \cdot g$, é a função

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

4) o seu quociente, denotado por f/g , é a função

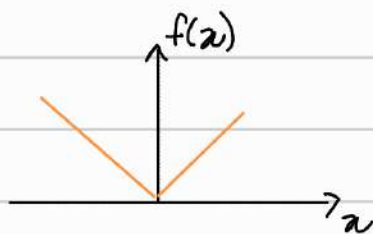
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

→ Funções definidas em partes

Em alguns casos, descreveremos uma função aplicando fórmulas diferentes as partes diferentes do seu domínio. Como exemplo, temos a função do valor absoluto,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

→

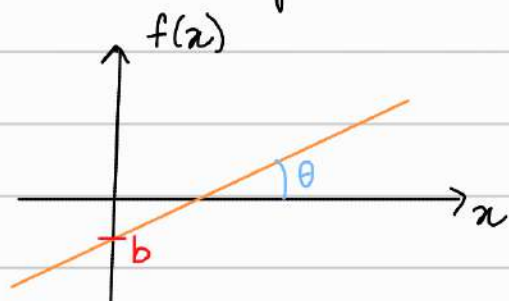


→ Funções lineares

Funções lineares tem a forma

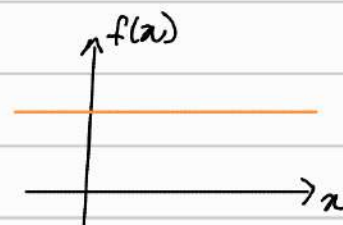
$$f(x) = mx + b$$

onde m e b são constantes, denominados coeficiente angular e coeficiente linear, respectivamente.



$$m = \text{tg} \theta$$

• Quando $m=0$, temos uma função constante:

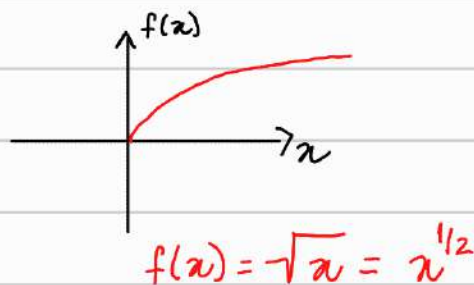
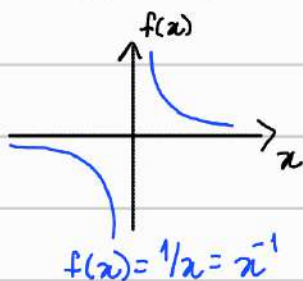
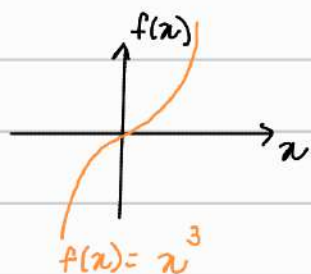


→ Funções de potência

Uma função

$$f(x) = x^a,$$

com a sendo uma constante, é chamada função de potência. A constante a é um número real.



→ Polinômios

Uma função p é um polinômio se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro positivo e os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes, chamadas coeficientes.

- Todo polinômio tem domínio $(-\infty, \infty)$
- n , o maior expoente, é denominado grau do polinômio.

→ Funções racionais

Uma função racional é o quociente ou razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

O domínio de uma função racional é o conjunto de todos os x reais para os quais $q(x) \neq 0$.

→ Funções algébricas

Uma função algébrica é uma função construída a partir de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão, e extração de raízes) entre polinômios.

↳ Funções racionais são exemplos de funções algébricas.

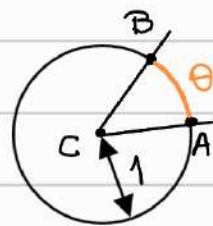
Exemplos: $f(x) = x^{1/3}(x-4)$; $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$

→ Funções trigonométricas

• Radiano

1 radiano é uma medida de ângulo e é definida em função de um círculo unitário.

Definição: a medida, em radianos, do ângulo ACB é o comprimento θ do arco AB no círculo unitário de centro C.



• Funções trigonométricas básicas

Existe um único par de funções, definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por $\sin$ e $\cos$, que satisfazem as seguintes propriedades:

1) $\sin 0 = 0$

2) $\cos 0 = 1$

3) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

4) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

5) existe $\pi > 0$, tal que, para $0 < x < \pi$, temos

$$0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Como consequência,

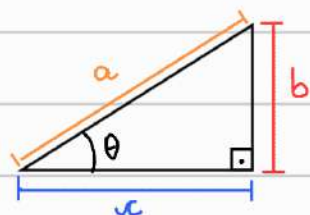
6) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

7) existe um número a positivo tal que $\cos a = 0$ e $\sin a = 1$

↳ e esse número é $\pi/2$.

As funções $\sin x$ e $\cos x$ são funções trigonométricas básicas. Estas funções são de extrema importância em problemas que envolvem oscilações e periodicidade.

Sabemos calcular $\sin$ e $\cos$ de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

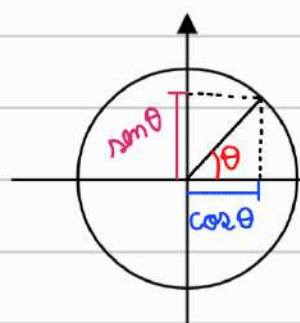


$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

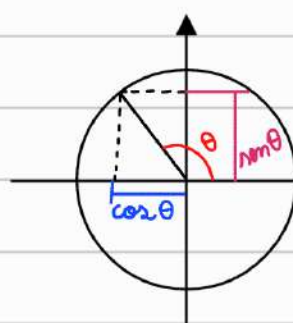
$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{c}$$

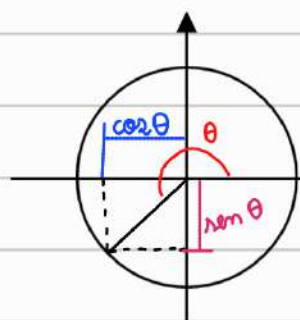
Essas definições podem ser generalizadas para ângulos obtusos e negativos quando considerarmos o círculo unitário



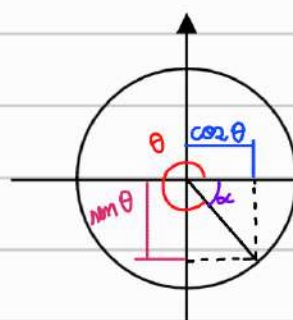
$$\begin{aligned} \theta > 0 \\ \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \theta > 0 \\ \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \end{aligned}$$

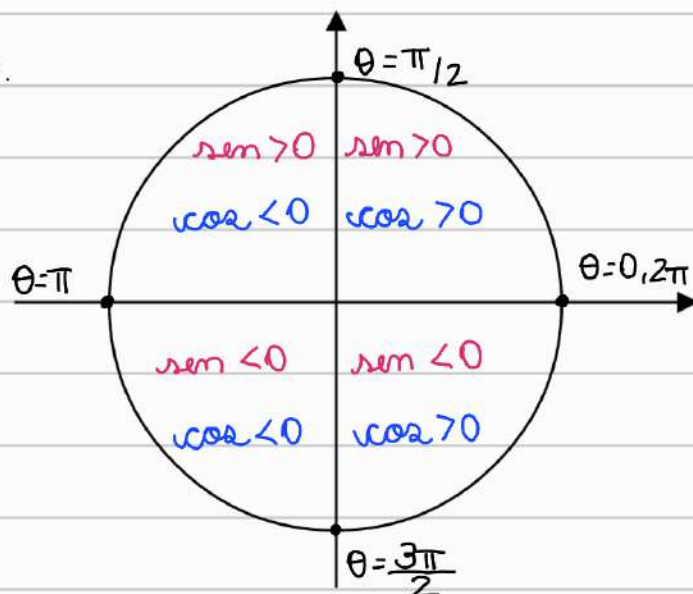


$$\begin{aligned} \theta > 0 \\ \sin \theta < 0 \\ \cos \theta < 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \theta > 0, \alpha < 0 \\ \sin \theta = \sin \alpha < 0 \\ \cos \theta = \cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

Resumindo.



→ Outras funções trigonométricas

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

→ Funções exponenciais

Funções exponenciais são funções com a forma

$$f(x) = a^x$$

onde a base a é uma constante positiva e diferente de 1.

- Domínio: $(-\infty, \infty)$

- Imagem: $(0, \infty)$

→ uma função exponencial nunca assume o valor 0.

• Função exponencial natural

Para modelagem de fenômenos naturais, físicos e econômicos, uma função muito utilizada é a função exponencial natural cuja base é o número irracional e .

Funções exponenciais $f(x) = e^{kx}$ representam crescimentos ou decaimentos exponenciais dependendo do valor de k :

$k > 0 \rightarrow$ crescimento

$k < 0 \rightarrow$ decaimento

→ Função logarítmica

Funções logarítmicas são funções com a forma

$$f(x) = \log_a x$$

onde a base a é uma constante positiva diferente de 1.

- Domínio: $(0, \infty)$
- Imagem: $(-\infty, \infty)$

→ Fórmula para mudança de base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

→ Função composta

A composição é um método de combinar funções.

Definição: Se f e g são funções, a função composta, representada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ consiste nos números x do domínio de g para os quais $g(x)$ fica no domínio de f .

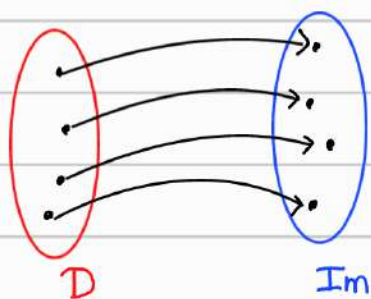
- Assim, temos que a composta $f \circ g$ é formada quando a imagem de g fica no domínio de f .
- Para determinar $(f \circ g)(x)$, primeiro determinamos $g(x)$ e, depois, $f(g(x))$.
- Caso $g \circ f$ seja possível, ela não é necessariamente igual a $f \circ g$.

→ Funções inversas

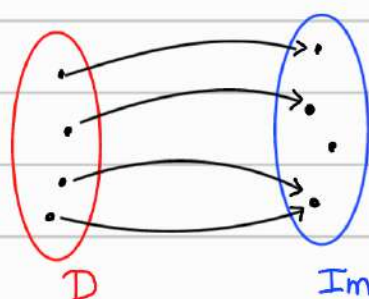
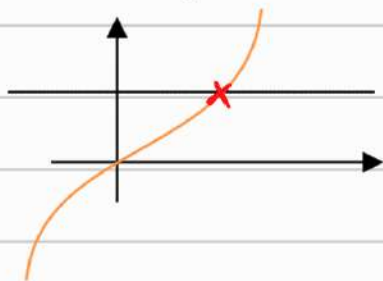
• Funções injetoras

Definição: Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D .

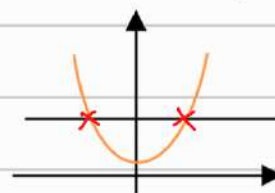
Em outras palavras, uma função injetora sempre possui valores diferentes para elementos diferentes, ou seja, cada ponto da imagem assume um dado valor apenas uma vez.



É injetora



Não é injetora



Como cada ponto da imagem de uma função injetora vem de apenas um ponto de seu domínio, seu efeito pode ser **invertido**.

Definição: Seja f uma função injetora em um domínio D com imagem Im . A **função inversa** f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{se} \quad f(b) = a$$

O domínio de f^{-1} é Im e sua imagem é D .

• Defeito de compor uma função com a sua inversa é nulo:

$$\rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplos: $f(x) = \frac{x+1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = 2x-2$

• A **função logarítmica** é a função inversa da função exponencial.

$$f(x) = \log_a x, \quad f^{-1}(x) = a^x$$

$$\rightarrow f(f^{-1}(x)) = \log_a a^x = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(f(x)) = a^{\log_a x} = x$$

$$\hookrightarrow z = \log_a x \rightarrow a^z = x$$

• Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas que discutimos anteriormente não são injetoras. Entretanto, podemos restringir os domínios dessas funções a intervalos nos quais elas são injetoras. Com essa restrição, temos

- $\sin x \rightarrow D: [-\pi/2, \pi/2]$
- $\cos x \rightarrow D: [0, \pi]$
- $\operatorname{tg} x \rightarrow D: (-\pi/2, \pi/2)$
- $\operatorname{cotg} x \rightarrow D: (0, \pi)$
- $\sec x \rightarrow D: [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
- $\operatorname{cosec} x \rightarrow D: [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

Agora que essas funções são injetoras, podemos definir suas inversas.

- $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$
- $y = \cos^{-1} x = \arccos x$
- $y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$
- $y = \operatorname{cotg}^{-1} x = \operatorname{arcotg} x$
- $y = \sec^{-1} x = \operatorname{arsec} x$
- $y = \operatorname{cosec}^{-1} x = \operatorname{arcosec} x$

$$\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$$

Por exemplo, a função $y = \sin^{-1} x$ nos dá o ângulo y no qual $\sin y = x$.

→ Funções crescentes e decrescentes

• Definição: Uma função f definida em um intervalo será **crescente** naquele intervalo se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

• Definição: Uma função f definida em um intervalo será **decrescente** naquele intervalo se e somente se

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

→ Funções pares e ímpares

• Definição: Uma função $y = f(x)$ é uma

• **função par** de x se $f(-x) = f(x)$

• **função ímpar** de x se $f(-x) = -f(x)$

para qualquer x dentro do domínio da função.

→ Funções periódicas

• Definição: Uma função f será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f , então também estará. Além disso,

$$f(x+p) = f(x)$$

onde p é o **período** de f .

→ Translação de gráficos

Translação vertical: $y = f(x) + k$

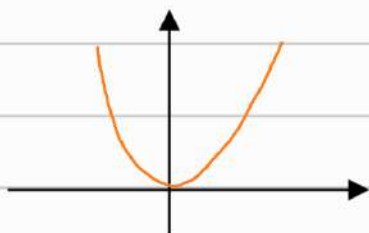
$k > 0$: translação para cima

$k < 0$: translação para baixo

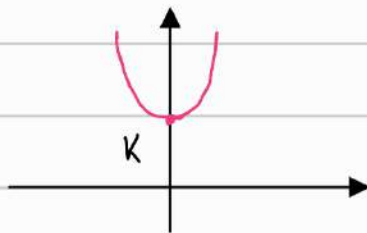
Translação horizontal: $y = f(x+h)$

$h > 0$: translação para a esquerda

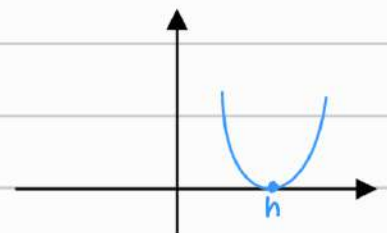
$h < 0$: translação para a direita.



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^2 + k$$



$$f(x) = (x-h)^2$$