

Limites

Em muitas aplicações do Cálculo, o que nos interessa em geral não os valores da função $f(x)$ que estejam próximos de um número x_0 , mas que não sejam necessariamente iguais a x_0 .

↳ De fato, há muitos casos em que x_0 não está no domínio de f : $f(x_0)$ não é definida.

Por exemplo, seja a função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

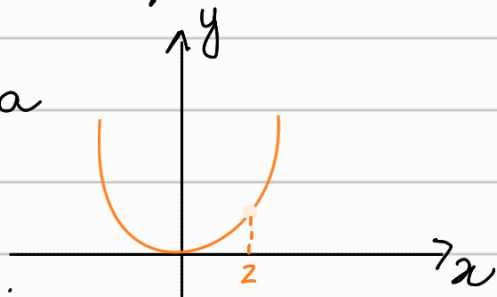
Observamos que $x=2$ não está no domínio de f , uma vez que não existe divisão por zero.

Utilizando a calculadora e se aproximando de 2 tanto de 1,99 e 2,01, vemos que $f(x)$ vai chegando próximo de $4/3 = 1,333\dots$

Para um argumento mais convincente, podemos fatorar o numerador e denominador

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \frac{x^2(x-2)}{3(x-2)} \stackrel{x \neq 2}{=} \frac{x^2}{3} //$$

Como resultado, temos uma parábola que não contém o ponto $(2, 4/3)$. Mas agora vemos, geometricamente, que quanto mais próximo de $x=2$, mais $f(x)$ estará próximo de $f(2)$.



E dessa forma, temos uma noção intuitiva de limite.

Se uma função f é definida em todo um intervalo aberto contendo um número real x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 , podemos nos perguntar

1) À medida que x está cada vez mais próximo de x_0 (com $x \neq x_0$), o valor de $f(x)$ tende para um número real L ?

2) Podemos tornar o valor da função $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, escolhendo x suficientemente próximo de x_0 (mas $x \neq x_0$)?

Se a resposta para as duas perguntas é sim, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

isto é, os valores de $f(x)$ ficarão próximos ao número L sempre que x estiver próximo de x_0 , em qualquer lado de x_0 .

→ Limites por substituição

Em muitos casos, é possível calcular o limite de uma função $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ apenas substituindo x por x_0 na função. Esta é uma propriedade que é válida para um conjunto de funções, as funções contínuas.

Exemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow 13} 4 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 7$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{x + 5} = \frac{-2}{3}$$

As vezes, precisamos trabalhar um pouco com a expressão antes de realizar a substituição.

Exemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = 6$$

→ Leis do limite

Aqui, temos o teorema que nos auxilia a calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções cujos limites já conhecemos.

Teorema: Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, então

$$1) \text{Regra da soma: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$2) \text{Regra da diferença: } \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

3) Regra do produto: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

4) Regra da multiplicação por uma constante:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

5) Regra do quociente: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

6) Regra da potenciação: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, desde que

- $r, s \in \mathbb{Z}$
- $s \neq 0$
- $L^{r/s} \in \mathbb{R}$

Exemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 4x^2 - 3) = c^3 + 4c^2 - 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{13}$$

Teorema: Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$$

Teorema: Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = 0$$

O Teorema acima não se aplica quando o denominador é não nulo no ponto c . Quando $a(c) = 0$, o teorema não pode ser aplicado. Entretanto, em algumas situações, é possível eliminar algebricamente os denominadores nulos e então obter o limite por substituição na fração simplificada.

Exemplos

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} = \frac{1}{20}$$

→ Teorema do confronto

Sejam três funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$. Sabe-se que duas destas tem o mesmo limite em $x \rightarrow c$. Com o teorema a seguir, se as funções satisfizerem certas condições, é possível determinar o limite da terceira.

Teorema: Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer intervalo aberto contendo c , exceto, possivelmente, em $x=c$. Supondo também que

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

então $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Exemplo: Seja,

$$\frac{1-x^2}{4} \leq u(x) \leq \frac{1+x^2}{2} \quad \forall x \neq 0.$$

Qual o limite de $u(x)$ quando $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{4} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1 //$$

Teorema: Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c , exceto possivelmente no próprio $x=c$, e os limites de f e g existem quando x se aproxima de c , então

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

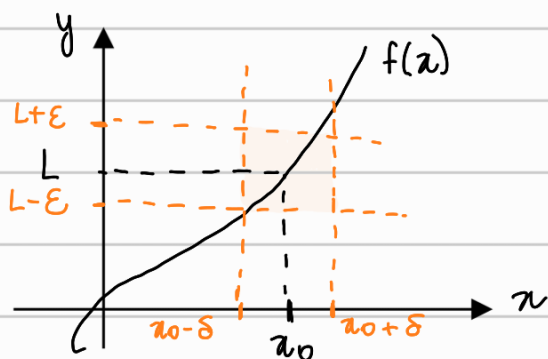
→ Definição precisa de limite

Definição: Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0 , exceto talvez em x_0 . Dizemos que o limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0 , é o número L , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



O limite de f em x_0 não depende do valor de f em x_0 (caso $f(x_0)$ exista), mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de x_0 .

Exemplo: Vamos mostrar, pela definição, que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

Temos que, da definição, $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$ e $L = 2$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar um $\delta > 0$ adequado tal que se x está a uma distância δ de x_0 , $f(x)$ vai estar a uma distância ε de L . Isto é, sempre que

$$0 < |x - 1| < \delta$$

é verdade que

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

Substituindo $f(x)$ na última desigualdade

$$|(5x - 3) - 2| < \varepsilon$$

$$|5x - 5| < \varepsilon \longrightarrow 5|x - 1| < \varepsilon \longrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Mas da primeira inequação, $0 < |x - 1| < \delta$, logo, escolhemos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

Calculando o módulo $|f(x) - L|$

$$|f(x) - L| = |(5x - 3) - 2| = |5(x - 1)| = 5|x - 1|$$

Escolhendo $0 < |x - 1| < \delta$, temos $0 < 5|x - 1| < 5\delta$ e

$$|f(x) - L| < 5\delta \xrightarrow{\delta = \varepsilon/5} |f(x) - L| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon //$$

E assim provamos o limite: há um δ , com $0 < |x - 1| < \delta$, que leva a $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo: Provar que o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Determinando δ algebricamente

Exemplo: Para o limite $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = 2$, determinar $\delta > 0$ para

$\varepsilon = 1$, isto é, encontra δ tal que

$$0 < |x - 5| < \delta \longrightarrow |f(x) - 2| < 1$$

Da segunda inequação,

$$|\sqrt{x-1} - 2| < 1 \longrightarrow -1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1 \longrightarrow 1 < \sqrt{x-1} < 3$$

$$1 < \sqrt{x-1} < 3 \longrightarrow 2 < x < 10, \text{ a desigualdade vale para todo } x \text{ em } (2, 10).$$

Agora precisamos determinar um $\delta > 0$ para colocar o intervalo centrado em $x_0 = 5$, isto é, $5 - \delta < x < 5 + \delta$, dentro do intervalo que determinamos $2 < x < 10$. Para isso, observamos a distância de $x_0 = 5$ até o extremo mais próximo, o 2. Comparando $5 - \delta$ e 2, temos $\delta = 3$. Logo,

$$0 < |x - 5| < 3 \longrightarrow |\sqrt{x-1} - 2| < 1$$

→ Limites laterais

Limites laterais não limites calculados de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 pela esquerda ($x < x_0$) ou pela direita ($x > x_0$).

Definição: Dizemos que $f(x)$ tem um limite L à direita em x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x ,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

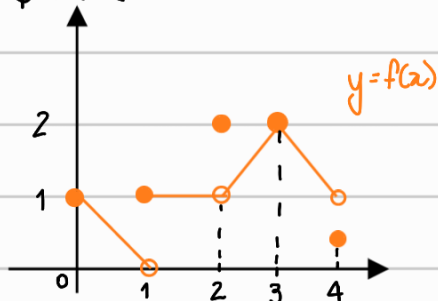
Dizemos que $f(x)$ tem um limite à esquerda L em x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x ,

$$x_0 - \delta < x < x_0 \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo



$$\bullet x=0: \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ não existe}$$

$$\bullet x=1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, f(1) = 1$$

$$\bullet x=2: \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, f(2) = 2$$

$$\bullet x=3: \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, f(3) = 2$$

$$\bullet x=4: \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \text{ não existe}, \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1, f(4) \neq 1$$

Teorema: Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à esquerda e um à direita, e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

Exemplo: Verificar se o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

existe.

Resposta: Não, pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Exemplo: Teorema do confronto + limites laterais

Calcular

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

(Pg 99, Thomas)

→ Limites no infinito

Aqui, estudaremos limites na forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Definição: Dizemos que $f(x)$ possui limite L quando x tende ao infinito e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

se para cada número $\varepsilon > 0$, existe um número M correspondente tal que, para todos os valores de x

$$x > M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em formulação matemática

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a \text{ tal que} \\ x > \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{array} \right.$$

Definição: Dizemos que $f(x)$ possui o limite L com x tendendo a menos infinito e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para cada número $\varepsilon > 0$, existe um número N corresponden-

de tal que, para todos os valores de x ,
 $x < N \longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ou então,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \left\{ \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \right. \\ \left. x < -\delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \right.$$

Exemplo: Demonstrar que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (p.101, Thomas)

Limites tendendo ao infinito apresentam propriedades de soma, subtração, multiplicação por uma constante, produto, quociente e potenciação como as mostradas anteriormente.

Exemplo: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right) = 5$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi \sqrt{3}}{x^2} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{5}{3}$, d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = 0$

Assíntota horizontal

Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa se aproxima de zero à medida que um ponto se afasta da origem, dizemos que a curva se aproxima assintoticamente da reta e que a reta é uma assíntota do gráfico.

Definição: A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

↓
 $y=0$ é a assíntota horizontal.

• Example: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$, onde $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$

↳ Qual o limite de $\frac{\sin x}{x}$ quando $x \rightarrow \pm\infty$?

↳ Teorema do confronto: $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$

Resposta: $y=2$

Assíntota oblíqua

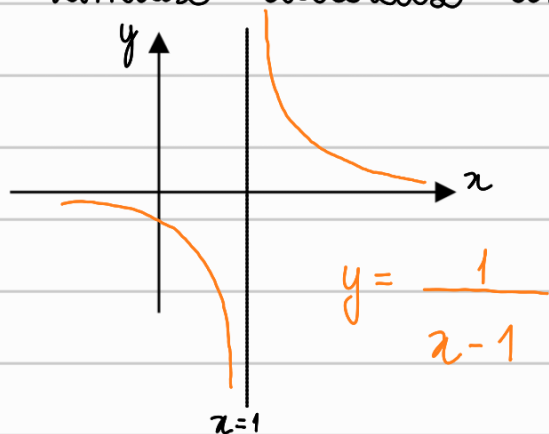
Caso o numerador de uma função racional tenha um grau maior do que o denominador, o gráfico apresentará uma assíntota oblíqua (inclinada). Neste caso, encontramos a equação da assíntota realizando a divisão e encontramos f expressa como uma função linear mais um resto, onde este último tende a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Example:
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49} \right)}_{\text{assíntota}} + \underbrace{\frac{(-115)}{49(7x+4)}}_{\text{resto}}.$$

→ Limites infinitos

Limites infinitos é uma linguagem útil para descrever o comportamento de funções cujos valores se tornam arbitrariamente grandes, sejam positivos ou negativos.

• Limites laterais infinitos



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$



$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Exemplo: funções racionais podem se comportar de várias maneiras próximo ao zero de seus denominadores.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} \text{ não existe}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = -\infty$$

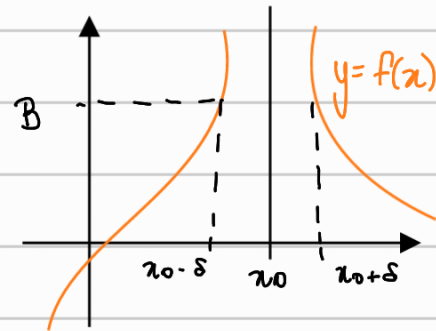
Definição: Dizemos que $f(x)$ *tende ao infinito* quando x tende a x_0 , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

se para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x

$$0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) > B$$

Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $f(x)$ fica acima da reta $y = B$.



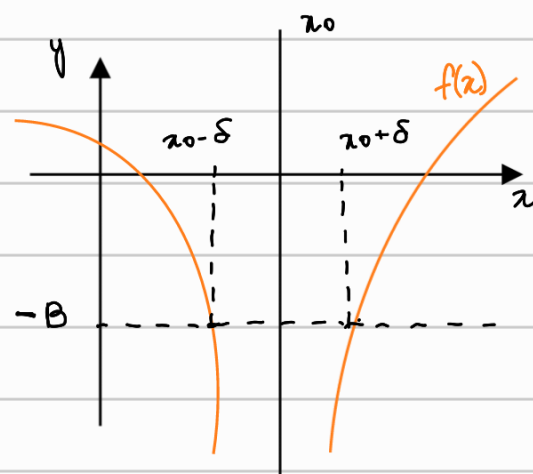
Definição: Dizemos que $f(x)$ *tende ao menos infinito* quando x tende a x_0 , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

se para cada número real negativo $-B$ existe um $\delta > 0$ correspondente tal que, para todo x ,

$$0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow f(x) < -B$$

Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, a curva de $f(x)$ fica abaixo da reta $y = -B$.



Assíntotas verticais

Observando as figuras esquemáticas das definições, distância entre a curva $y = f(x)$ e a reta $x = x_0$ diminui

a medida que a curva se afasta verticalmente da origem. Assim, temos as assíntotas verticais

Definição: Uma reta $x=a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y=f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty.$$

Exemplo: Encontrar as assíntotas de $\bullet y = \frac{x+3}{x+2}$

Resposta: $y=1$ e $x=-2$.

$\bullet f(x) = \frac{-8}{x^2-4}$. Resposta $y=0$, $x=\pm 2$

$\bullet f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$. Resposta: $x=2$, $y = \frac{x+1}{2}$

Termos dominantes

Como vimos a função $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$ pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

Pelas análises que fizemos,

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \rightarrow \text{para } x \text{ numericamente grande}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x-4} \rightarrow \text{para } x \text{ próximo de } 2$$

É isso nos diz como a função se comporta em diferentes partes do domínio.

L> $x/2 + 1$ **domina** quando x é numericamente grande e $1/(2x-4)$ **domina** quando x está próximo de 2.

L> Estes são os chamados **termos dominantes**.

→ Aplicação de limites

• O número e

Considerando uma sequência com termo geral

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e //$$

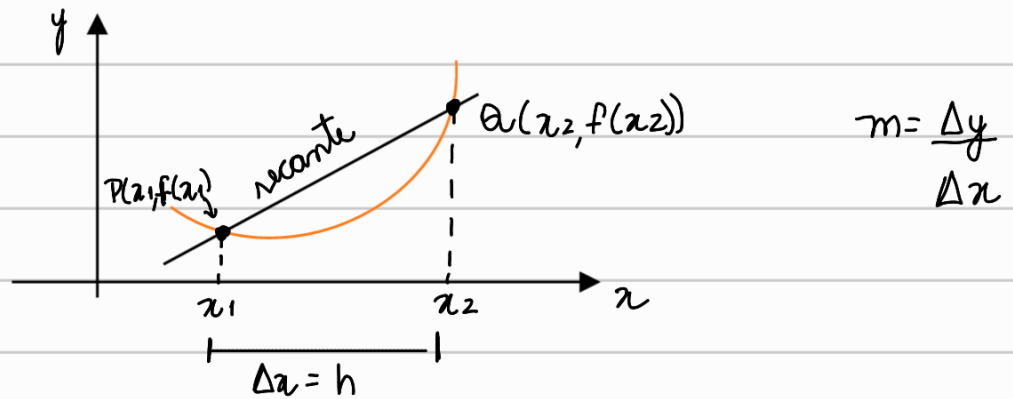
→ Taxas médias de variação e retas secantes

Definição: A taxa média de variação de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

com $h = x_2 - x_1$.

Geometricamente, a taxa de variação de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o coeficiente angular da reta que passa nos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$, como mostrado na figura.



Com limites, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente, isto é, quando $h \rightarrow 0$.

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Da mesma forma, conseguimos calcular taxas de variação **instantâneas**, onde, novamente, $h \rightarrow 0$.