

Continuidade de funções reais

Para definirmos a continuidade em um ponto do domínio de uma função, precisamos definir a continuidade em um ponto interior (que envolve um limite bilateral) e em um ponto extremo (que envolve limite lateral).

Definição:

→ Ponto interior: Uma função $y = f(x)$ é **contínua em um ponto interior** c de seu domínio quando

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

→ Extremidades: Uma função $y = f(x)$ é **contínua na extremidade esquerda** a se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ou é **contínua na extremidade direita** b se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Caso f não seja contínua em c , dizemos que ela é **descontínua** em c e que c é um ponto de **descontinuidade**.

→ Teste de continuidade

Uma função $f(x)$ será contínua em $x=c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes:

1) $f(c)$ existe

2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe

3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Para a continuidade em um lado e a continuidade em um ponto final, as condições 2 e 3 devem ser trocadas por limites laterais.

→ Funções contínuas

Uma função é contínua em um intervalo se e somente se for contínua em cada ponto do intervalo.

↳ Uma função contínua é aquela que é contínua em cada ponto de seu domínio.

Propriedades de funções contínuas

Se as funções f e g são contínuas em $x=c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x=c$.

1) Soma: $f+g$

2) Diferença: $f-g$

3) Produto: $f \cdot g$

- 4) multiplicação por constante: $K \cdot f, \forall K \in \mathbb{R}$
 5) Quociente: $f/g, g(x) \neq 0$
 6) Potenciação: $f^{r/s}, r, s \in \mathbb{Z}$

→ A função **inversa** de qualquer função contínua também é contínua

→ Compostas

Todas as funções compostas de funções contínuas também são contínuas.

↳ Se $f(x)$ é contínua em $x=c$, e $g(x)$ é contínua em $x=f(c)$, então $g \circ f = g(f(x))$ é contínua em $x=c$.

Teorema: Se f é contínua em c e g é contínua em $f(c)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em $x=c$.

Exemplos

• $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$

$f(x) = x^2 - 2x - 5$

$g(t) = \sqrt{t}$

• $y = \frac{x^{2/3}}{1+x^4}$

$f(x) = x^{2/3}$

$g(x) = 1+x^4$

• $y = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right|$

$f(x) = \frac{x-2}{x^2-2}$

$g(x) = |f(x)|$

• $y = \left| \frac{x \sin x}{x^2+2} \right|$

$f(x) = x \sin x$

$g(x) = x^2+2$

$h(x) = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$

Teorema: Se g é contínua no ponto b e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$, então

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)$$

Exemplos:

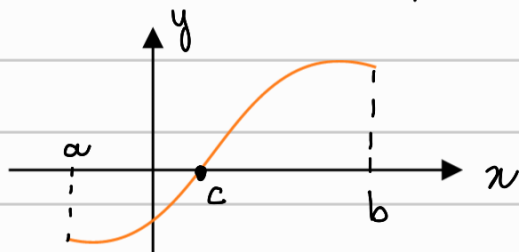
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} e^{+g x} = 1$$

→ Teoremas para funções contínuas

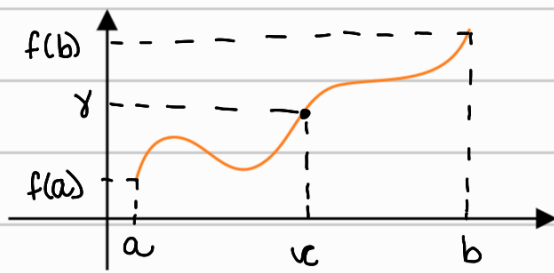
Teorema do anulamento (ou de Bolzano)

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.



Teorema do valor intermediário

Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido em $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.



↳ O teorema do anulamento é um caso particular do teorema do valor intermediário.

Teorema de Weierstrass

Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo x em $[a, b]$

