

Derivadas de funções reais

Seja f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. Limites do tipo

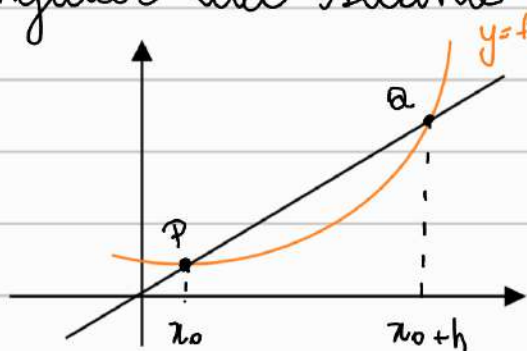
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física.

→ Retas tangentes

Para determinar uma reta tangente a uma curva arbitrária $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, utilizamos o seguinte método: calculamos o coeficiente angular da secante através do $P(x_0, f(x_0))$ e de um ponto $Q(x_0+h, f(x_0+h))$. Este coeficiente é

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Para calcular o coeficiente da reta tangente, calculamos o limite de m quando $h \rightarrow 0$. Se o limite existe, ele é o coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente em P como a reta que passa por P que tem esse coeficiente angular.

Definição: O **coeficiente angular da curva** $y=f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

A **reta tangente** à curva f em P é a reta que passa por P e tem esse coeficiente angular.

Exemplo: Determinar o coeficiente angular da curva $y=1/x$ em $x=a \neq 0$.

Resposta: $m = -1/a^2$

→ **Taxas instantâneas de variação**

Definição: A **taxa média de variação** de $y=f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

Esta última expressão também é chamada de **razão incremental** ou **diferença dividida de f em x_0 com incremento h** .

↳ Se a razão incremental tem um limite quando $h \rightarrow 0$, esse limite é denominado **derivada de f em x_0** .

↳ A derivada nos dá a taxa de variação da função em relação a x no ponto $x=x_0$.

→ Derivada

Tanto o coeficiente da reta tangente quanto a taxa de variação instantânea estão relacionadas com a derivada de f em um ponto x_0 .

↳ Agora, vamos estudar a derivada como uma **função** derivada de f , considerando o limite em cada ponto do domínio de f .

Definição: A **derivada** de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

↳ O domínio de f' é o conjunto de pontos no domínio de f para o qual o limite existe.

↳ Se f' existe para determinado valor de x , dizemos que f é **derivável** em x .

↳ Se f' existe em qualquer ponto no domínio de f , chamamos f **derivável**.

Se escrevermos $z = x + h$, então $h = z - x$ e se $h \rightarrow 0$, $z \rightarrow x$. Assim, temos a fórmula alternativa

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Exemplos de derivação:

$$1) f(x) = \frac{x}{x-1}, f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

• Notações

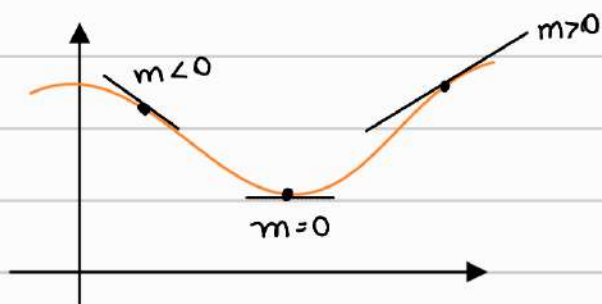
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

↳ Para indicar o valor de uma derivada em um número específico $x=a$, escrevemos

$$f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

• Representação gráfica

Para representar derivadas graficamente, esboçamos as tangentes ao gráfico de f em pequenos intervalos e usamos os coeficientes angulares das retas para estimar os valores de $f'(x)$ nesses pontos.



Observando os coeficientes angulares, verificamos onde a taxa de variação é positiva, negativa ou nula e,

consequentemente, identificamos onde a taxa de variação é crescente ou decrescente.

• Derivadas laterais

Uma função $y=f(x)$ será **derivável** em um intervalo aberto, finito ou infinito, se tiver uma derivada em cada ponto do intervalo.

↳ Uma função será **derivável** em um intervalo fechado $[a,b]$, se for derivável no interior (a,b) e se os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

existirem nas extremidades.

Derivadas à direita e à esquerda podem ser definidas em qualquer ponto do domínio de uma função.

↳ Uma função terá uma derivada em um ponto se e somente se tiver derivadas à direita e à esquerda nesse ponto e se essas derivadas laterais forem iguais.

Exemplo: $f(x) = |x|$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1$$

Exemplo: $f(x) = \sqrt{x}$ em $x=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \infty$$

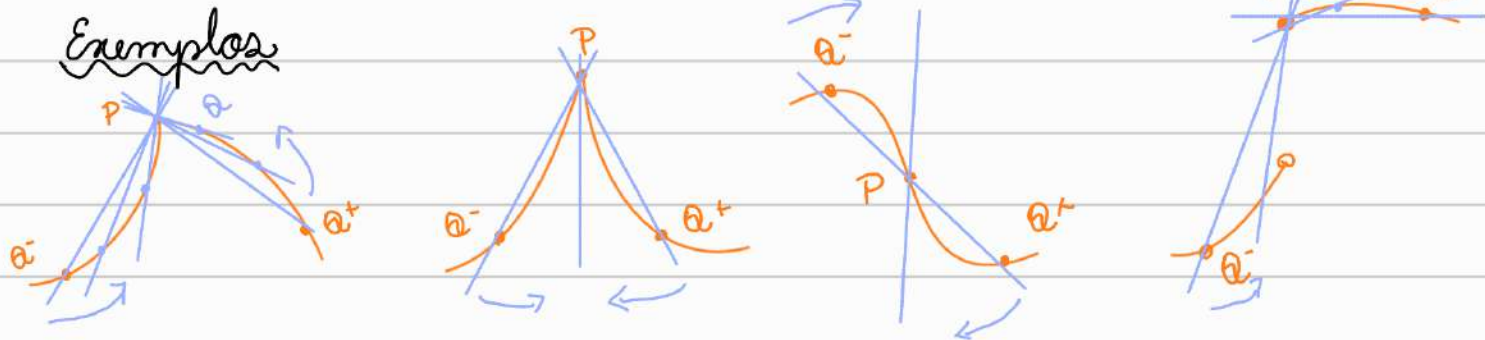
↗ limite não é finito

• Não existência de derivadas em um ponto

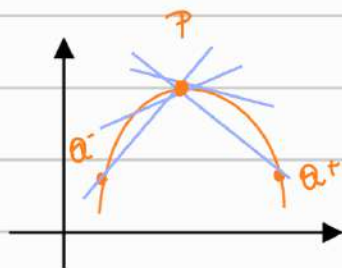
Uma função terá derivada em um ponto x_0 se os coeficientes angulares das retas secantes que passam por $P(x_0, f(x_0))$ e um ponto Q próximo no gráfico tenderem a um limite à medida que Q se aproxima de P .

↳ Quando as secantes não têm uma posição-limite ou se tornam verticais a medida que Q tende a P , a derivada não existe.

Exemplos



NÃO existe derivada em nenhum desses exemplos



Nesse caso existe derivada: ambas as secantes tendem para a tangente horizontal.

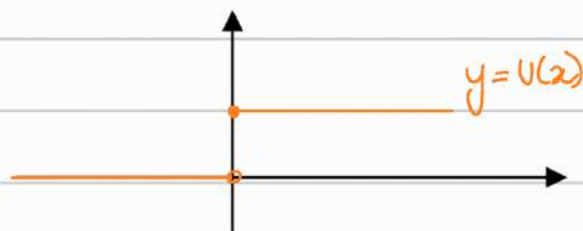
• Funções deriváveis e continuidade

Teorema: Se f tem uma derivada em $x=c$, então f é contínua em c

↳ A recíproca não é verdadeira.

Teorema: Se a e b são dois pontos quaisquer de um intervalo em que f é derivável, então f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Em outras palavras, uma função **não** pode ser derivada em um intervalo a menos que ela tenha a propriedade do valor intermediário nesse intervalo.



$$U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

A função salto unitário não tem a propriedade do valor intermediário e não pode ser derivada de uma função da reta real.

→ Regras de derivação

• Regra 1: Função constante

Se f tem o valor constante $f(x) = c$, então

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(c)}{dx} = 0$$

• Regra 2: Potenciação para inteiros positivos

Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d x^n}{dx} = n x^{n-1}$$

• Regra 3: Multiplicação por uma constante

Se f é uma função derivável de x e c é uma constante, então

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$$

• Regra 4: Derivada da soma/diferença

Se u e v são funções deriváveis de x , então a soma/diferença das duas, $u \pm v$, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Nesses pontos,

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Exemplo: $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

Resposta: $y' = 3x^2 + \frac{8x}{3} - 5$

• Regra 5: Função exponencial natural

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

• Regra 6: Produto de funções

Se u e v são deriváveis em x , então o produto uv também é, e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Exemplo: $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

Resposta: $y' = 5x^4 + 3x^2 + 6x$.

• Regra 7: Quociente de funções

Se u e v são deriváveis e x e se $v(x) \neq 0$, então o quociente u/v é derivável em x e

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

• Regra 8: Potenciação para inteiros negativos

Se n é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx} (x^n) = n x^{n-1}$$

Exemplo: $y = \frac{4}{x^3}$, $y' = -\frac{12}{x^4}$

Exemplo: $y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$, $y' = \frac{-1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

→ Derivadas de ordem superior

Se $y = f(x)$ é uma função derivável, então sua derivada $f'(x)$ também é uma função

↳ Se $f'(x)$ também for derivável, poderemos derivar f' a fim de obter uma nova função de x denota-

da por $f''(x)$ e denominada **segunda derivada**.

↳ Continuando este processo, temos a **n -ésima derivada**,

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y.$$

com n sendo um número inteiro positivo.

Exemplo:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

$$y^{(n)} = 0$$