

Derivadas de e^x e $\ln x$

Para as funções e^x e $\ln x$, temos as seguintes fórmulas

→ e^x

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Prova:

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_1$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x //$$

→ $\ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Prova:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\boxed{u = \frac{h}{x}, \quad h = ux}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{ux} (1+u) = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u}$$

$$\boxed{n = \frac{1}{u}} \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} //$$

Derivadas de funções trigonométricas

→ Derivada da função seno

Se $f(x) = \sin x$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$f'(x) = \sin x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)^*}{h}}_0 + \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}}_1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2(h/2) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(h/2) = 0$$

→ Derivada da função cosseno

Se $f(x) = \cos x$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cosh - 1) - \sin x \sinh}{h}$$

$$f'(x) = \cos x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h}}_0 - \sin x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h}}_1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

→ Derivada da função tangente

Se $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

→ Derivada da função secante

$$\text{Se } f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ temos}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$\underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x} \quad \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\sec x}$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \cdot \sec x}$$

→ Derivada da função cosecante

$$\text{Se } f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \text{ temos}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$\underbrace{-\frac{\cos x}{\sin x}}_{-\cot x} \quad \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\operatorname{cosec} x}$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x}$$

→ Derivada da função cotangente

$$\text{Se } f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ sua derivada é}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

Exemplos:

$$\bullet y = x^2 \sin x$$

$$y' = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\bullet y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

$$y' = \frac{\sec x (\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\bullet y = \frac{\sin x}{x+1}$$

$$y' = \frac{(x+1) \cos x - \sin x}{(x+1)^2}$$

$$\bullet y = x^2 \sin x + \cos x$$

$$y' = (2x-1) \sin x + x^2 \cos x$$

Regra da cadeia

Sabemos diferenciar $y = f(u) = \sin u$ e $u = g(x) = x^2 - 4$, mas como diferenciar uma função composta do tipo $F(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 - 4)$?

Exemplo 1: A função $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ pode ser escrita como a composição de duas funções:
 $y = \frac{1}{2}u$, $u = 3x$.

Fazendo as derivadas,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{du}{dx} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 2: A função $y = 9x^4 + 6x^2 + 1$ pode ser escrita como $y = (3x^2 + 1)^2$ e como uma função composta
 $y = u^2$ e $u = 3x^2 + 1$

Calculando as derivadas

$$\frac{dy}{du} = 2u = 2(3x^2 + 1), \quad \frac{du}{dx} = 6x \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

↓

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2$$

Em ambos os exemplos, temos de

$$\frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

que é a regra da cadeia.

Teorema: Se $f(u)$ é derivável no ponto $u=g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y=f(u)$ e $u=g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ é calculada em $u=g(x)$.

Exemplos

$$\bullet x(t) = \cos(t^2 - 1)$$

$$x' = -2t \sin(t^2 - 1)$$

$$\bullet y = \sin(x^2 + e^x)$$

$$y' = (2x + e^x) \cos(x^2 + e^x)$$

$$\bullet y = e^{\cos x}$$

$$y' = -e^{\cos x} \sin x$$

$$\bullet g(t) = \operatorname{tg}(5 - \sin 2t)$$

$$g' = -2 \cos 2t \operatorname{sec}^2(5 - \sin 2t)$$

$$\bullet y = (5x^3 - x^4)^7$$

$$y' = 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)$$

$$\bullet y = \frac{1}{3x-2}$$

$$y' = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

$$\bullet y = \ln(x^2+3)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+3}$$

$$\bullet y = x e^{-2x}$$

$$y' = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$$

$$\bullet y = \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^4$$

$$y' = 4 \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^3 \frac{(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

→ Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Sejam f e g duas funções deriváveis em um mesmo conjunto A , com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Considere uma função definida em A e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados,

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} \rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$$

$$\text{Então, } y = e^{g(x) \ln f(x)} = f(x)^{g(x)}.$$

Agora podemos derivar,

$$y' = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} \frac{d}{dx} [g(x) \ln f(x)]$$

Exemplos:

$$\bullet y = x^x$$

$$y' = x^x (1 + \ln x)$$

$$\bullet y = 3^x$$

$$y' = 3^x \ln 3$$

$$\bullet y = 8^x + \log_2 x$$

$$y' = 8^x \ln 8 + \frac{1}{x \ln 2}$$

→ Equações paramétricas

Em vez de descrever uma curva expressando a ordenada de um ponto $P(x, y)$ da curva em função de x , às vezes é mais conveniente descrever a curva expressando ambas as coordenadas em função de uma terceira variável t .

Definição: Se x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

ao longo de um intervalo, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações é uma **curva parametrizada**. As equações são **equações paramétricas** para a curva.

Uma curva parametrizada $x=f(t)$ e $y=g(t)$ será derivável em t se x e y forem deriváveis em t .

↳ Em um ponto de uma curva parametrizada derivável, onde y também é função derivável de x , as derivadas $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dx}$ estão relacionadas por

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se $dx/dt \neq 0$, encontramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Exemplo: Seja a curva parametrizada

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

encontre a reta tangente à curva no ponto $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, onde

$a > 0$ e $b > 0$, quando $t = \pi/4$

Resposta: $y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$.