

Derivação Implícita

A maioria das funções que vimos até agora é descrita na forma

$$y = f(x)$$

onde y é expresso **explicitamente** em termos da variável x .

Há casos onde a relação entre y e x é dada **implicitamente**, como no caso das equações abaixo:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad y^2 - x = 0, \quad x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

Em alguns casos, podemos determinar y em uma equação deste tipo expressando-a como uma, ou até mais de uma, função explícita de x .

↳ Quando não podemos colocar uma função $F(x, y) = 0$ na forma $y = f(x)$, podemos determinar a derivada dy/dx por intermédio da **derivação implícita**.

O processo de **derivação implícita** consiste em derivar os dois lados da equação em relação a x e, depois, determinar y' na equação resultante.

Exemplo 1: $y^2 = x$

$$y^2 = x \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{x} \\ y_2 = -\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1/(2\sqrt{x}) \\ y_2 &= -1/(2\sqrt{x}) \end{aligned}$$

$$y^2 = x \rightarrow \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} x \rightarrow 2y y' = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y_2' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemplo 2: Coeficiente angular do círculo

$$x^2 + y^2 = 25$$

no ponto $(3, -4)$.

$$x^2 + y^2 = 25 \begin{cases} y_1 = \sqrt{25 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \rightarrow P(3, -4)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{-1}{2} (25 - x^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3, -4)} = \frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} //$$

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} 25 \rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(3, -4)} = -\frac{x}{y} \Big|_{(3, -4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} //$$

Exemplo 3: $y^2 = x^2 + \sin xy$

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} \sin xy$$

$$2y y' = 2x + \cos xy (y + x y')$$

$$2y y' - y' x \cos xy = 2x + y \cos xy$$

$$y'(2y - x \cos xy) = 2x + y \cos xy$$

$$y' = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

Exemplo 4: Encontrar o coeficiente angular da curva

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

no ponto (2,4)

$$\frac{d}{dx} x^3 + \frac{d}{dx} y^3 - \frac{d}{dx} 9xy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 9y - 9x y' = 0$$

$$y'(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2 \rightarrow y' = \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

Em (2,4)

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{(2,4)} = \frac{3 \cdot 4 - 2^2}{4^2 - 3 \cdot 2} = \frac{12 - 4}{16 - 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

→ Derivadas de ordem superior

A derivação implícita também pode ser usada para encontrar derivadas de ordem superior

Exemplo: Calcular a segunda derivada de

$$2x^3 - 3y^2 = 8$$

$$\frac{d}{dx} 2x^3 - \frac{d}{dx} 3y^2 = \frac{d}{dx} 8$$

$$6x^2 - 6y y' = 0 \longrightarrow y' = \frac{6x^2}{6y} \longrightarrow y' = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dx} \frac{x^2}{y}$$

$$y'' = \frac{2x \cdot y - x^2 y'}{y^2} = \frac{2xy - x \left(\frac{x^2}{y} \right)}{y^2} = \frac{2xy - \frac{x^3}{y}}{y^2}$$

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^3}{y^3}$$

Outros exemplo:

$$\bullet \quad x^3 + y^3 = 6xy \quad ; \quad y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

$$\bullet \quad \sin(x+y) = y^2 \cos x \quad ; \quad y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y \cos x - \cos(x+y)}$$

$$\bullet \quad x^4 + y^4 = 16 \quad ; \quad y'' = -48 \frac{x^2}{y^7}$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

→ Derivação logarítmica

As derivadas de funções **positivas** dadas por fórmulas que envolvem produtos, quocientes e potências muitas vezes podem ser encontradas mais rapidamente se calcularmos o logaritmo natural dos dois lados da equação antes de derivar



Derivação logarítmica

Exemplo: $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \quad x > 1$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \left[\ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x+3) - \ln(x-1) \right]$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x^2+1} 2x + \frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{x-1}$$

$$y' = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{x-1} \right)$$

Example

$$\bullet y = (x+1)^x, \quad y' = (x+1)^x \left(\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \right)$$

$$\bullet y = (\sqrt{t})^t, \quad y' = \sqrt{t} \left(\frac{\ln t}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet y = (\sin x)^x, \quad y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + \cot x)$$

$$\bullet y = x^{\ln x}, \quad y' = x^{\ln x} \left(\frac{\ln x^2}{x} \right)$$

Derivadas da função inversa

Seja $f(x)$ uma função

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

temos que sua inversa é

$$f^{-1}(x) = 2x - 2.$$

Derivando as duas funções, temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{df^{-1}}{dx} = 2.$$

Observando os resultados, vemos que as derivadas são recíprocas. Vamos considerar outro exemplo.

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0 \quad ; \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{df}{dx} = 2x \quad ; \quad \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2f^{-1}(x)}$$

Teorema: Se f apresenta um intervalo I como domínio e $f'(x)$ existe e nunca é nula em I , então f^{-1} é derivável em qualquer ponto de seu domínio. O valor de $(f^{-1})'$ no ponto b do domi-

no de f^{-1} é a recíproca do valor de f' no ponto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

ou

$$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=b} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Exemplo: $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Exemplo: $f(x) = 5 - 4x$, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

$$x = 5 - 4y \rightarrow y = \frac{5-x}{4} = f^{-1}(x)$$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

Derivada de funções trigonométricas inversas

Para que uma função admita inversa, a função deve ser injetora. Como vimos anteriormente, para que funções trigonométricas admitam inversas, precisamos restringir seus domínios

$$\sin x \rightarrow D: [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\cos x \rightarrow D: [0, \pi]$$

$$\operatorname{tg} x \rightarrow D: (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\operatorname{cotg} x \rightarrow D: (0, \pi)$$

$$\sec x \rightarrow D: [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$$

$$\operatorname{cosec} x \rightarrow D: [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$$

→ Derivada de $y = \sin^{-1} u$

A função $x = \sin y$ é derivável no intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ e sua derivada é o cosseno, que é positiva nesse intervalo. Assim, temos que a função inversa $y = \sin^{-1} x$ é derivável no intervalo $-1 < x < 1$.

Para encontrar a derivada de $y = \sin^{-1} x$, usamos a igualdade

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\sin^{-1} x)]^2}}$$

$$\frac{d \operatorname{sen}^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para $u = u(x)$, com $|u| < 1$,

$$\frac{d \operatorname{sen}^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1$$

→ Derivada de $y = \operatorname{tg}^{-1} u$

Se $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$, temos

$$\frac{d f^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{\sec^2(\operatorname{tg}^{-1} x)}$$

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}^{-1} x)}$$

$$\frac{d \operatorname{tg}^{-1} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Se $u = u(x)$

$$\frac{d \operatorname{tg}^{-1} u}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

→ Derivada de $y = \sec^{-1} u$

Se $f(x) = \sec x$, $f^{-1}(x) = \sec^{-1} x$, usando a derivação implícita para obter $\frac{d}{dx} \sec^{-1} x$:

$$y = \sec^{-1} x \rightarrow \frac{d}{dx} \sec y = \frac{d}{dx} x \rightarrow \operatorname{tg} y \sec y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} y \sec y}$$

$$\sec y = \sec(\sec^{-1} x) = x$$

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y \rightarrow \operatorname{tg} y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$



$$\boxed{\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}}$$

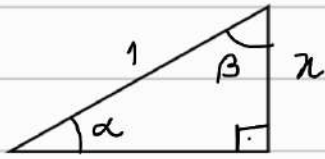
Se $u = u(x)$,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}}$$

$$|u| > 1$$

→ Derivada de $y = \cos^{-1} x$

Sabemos que



$$\sin \alpha = x, \quad \cos \beta = x$$

$$\alpha = \sin^{-1} x, \quad \beta = \cos^{-1} x$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Logo, por derivação implícita

$$\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

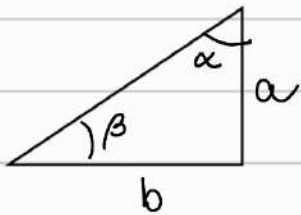
$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x + \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = 0 \longrightarrow \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = - \frac{d}{dx} \sin^{-1} x$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se $u = u(x)$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

→ Derivada de $y = \operatorname{cotg}^{-1} u$



$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{a}{b}, \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a}{b}$$

$$\alpha + \beta = \operatorname{cotg}^{-1} \left(\underbrace{\frac{a}{b}}_x \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\underbrace{\frac{a}{b}}_x \right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} x //$$

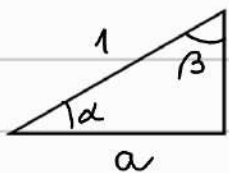
$$\frac{d}{dx} \operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} x \right) = - \frac{d}{dx} \operatorname{tg}^{-1} x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{cotg}^{-1} x = - \frac{1}{1+x^2}}$$

Se $u = u(x)$,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{cotg}^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}}$$

→ Derivada de $y = \operatorname{cosec}^{-1} u$



$$\sec \alpha = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{cosec} \beta = \frac{1}{a}$$

$$\alpha = \sec^{-1} \left(\frac{1}{a} \right), \quad \beta = \operatorname{cosec}^{-1} \left(\frac{1}{a} \right)$$

$$\alpha + \beta = \underbrace{\sec^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x \right) = - \frac{d}{dx} \sec^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1}x = - \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Se $u=u(x)$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1}u = - \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Exemplos:

$$\bullet \frac{d}{dx} \sin^{-1}x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \sec^{-1}(5x^4) = \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}$$

• Reta tangente a $y = \operatorname{cotg}^{-1}x$ em $x=-1$

$$\text{Resposta: } y = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \arctan 3x = \arctan' x + \frac{3x}{1+9x^2}$$