

Funções hiperbólicas

Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente na matemática e suas aplicações e recebem nomes específicos.

↳ Elas não são análogas, de muitas formas, às funções trigonométricas.

↳ Possuem a mesma relação com a **hipérbole** que as funções trigonométricas têm com o círculo.

Funções hiperbólicas

→ Definição

$$\rightarrow \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\rightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\rightarrow \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\rightarrow \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

→ Identidades hiperbólicas

- $\sinh(-x) = -\sinh x$
- $\cosh(-x) = \cosh x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

→ Derivadas de funções hiperbólicas

- $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
- $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
- $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \cdot \coth x$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
- $\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{cosech}^2 x$

→ Funções hiperbólicas inversas

$$\begin{array}{lll} y = \sinh^{-1} x & \longleftrightarrow & \sinh y = x \\ y = \cosh^{-1} x & \longleftrightarrow & \cosh y = x, \quad y \geq 0 \\ y = \tanh^{-1} x & \longleftrightarrow & \tanh y = x \end{array}$$

As outras funções são definidas da mesma maneira.

Uma vez que as funções hiperbólicas estão definidas em termos das funções exponenciais, temos que as funções hiperbólicas inversas podem ser expressas em termos de logaritmos

$$\rightarrow \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

$$\rightarrow \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad -1 < x < 1$$

→ Derivadas de funções hiperbólicas inversas

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} x = - \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = - \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

Exemplo: $\frac{d}{dx} (\tanh^{-1}(\sin x)) = \sec x$

Taxas relacionadas

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de taxas relacionadas.

↳ Nestes problemas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t , onde t é o tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação.

A taxa em que alguma variável varia é obtida a partir da derivada da equação que relaciona as variáveis envolvidas.

Exemplos: 1, 2, 3, 4, 5 Leithold p. (199 - 202)
1, 2 Thomas , p. 232 e 233

Linearização

Às vezes, podemos aproximar funções complicadas usando funções mais simples que, além de serem mais fáceis de trabalhar, fornecem a precisão desejada para aplicações específicas.

↳ Uma forma de aproximação é feita a partir de retas tangentes e é denominada linearização.

Se observar o gráfico de uma função próximo ao ponto onde a função é derivável, mais "reto" o gráfico se torna e mais se assemelha à sua tangente.

Em geral, a reta tangente $y = f(x)$ no ponto $x = a$, onde f é derivável passa pelo ponto $(a, f(a))$, e sua equação é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Assim, uma reta é o gráfico da função linear

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e enquanto esta reta permanecer próximo ao gráfico de f , $L(x)$ fornecerá uma boa aproximação de $f(x)$.

Definições: Se f é derivável em $x = a$, então a função aproximação

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a linearização de f em a . A aproximação

$$f(x) = L(x)$$

de f por L é a aproximação linear padrão de f em a .
O ponto $x=a$ é o centro da aproximação.

Exemplo: Determinar a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ quando $x=0$.

Resposta: $L(x) = 1 + \frac{x}{2}$.

A utilidade da linearização está em sua capacidade de substituir fórmulas complicadas por uma mais simples ao longo de um intervalo de valores.

↳ Uma aproximação linear normalmente perde a precisão longe de seu centro.

Exemplo: Linearizar $f(x) = \sqrt{1+x}$ em $x=3$

Resposta: $L(x) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$

Exemplo: Linearizar $f(x) = \cos x$, quando $x = \pi/2$.

Resposta: $L(x) = -x + \frac{\pi}{2}$

Exemplo: Linearizar $f(x) = (1+x)^k$ quando $x=0$.

Resposta: $L(x) = 1 + kx$

Diferenciais

Suponha que a função f seja definida pela equação

$$y = f(x)$$

Os incrementos Δy podem ser aproximados, por uma função, a pontos onde f seja derivável. Em tais pontos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

onde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

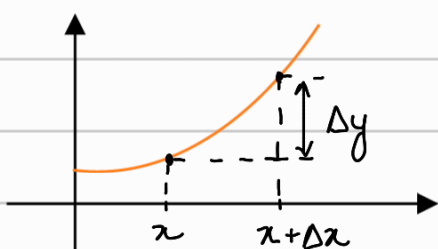
Pela definição de limite, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\text{se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \left| \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{|\Delta x|} \right| < \varepsilon \text{ e } |\Delta y - f'(x)\Delta x| < |\Delta x|$$

Para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, $f'(x)\Delta x$ é uma boa aproximação do valor de Δy ,

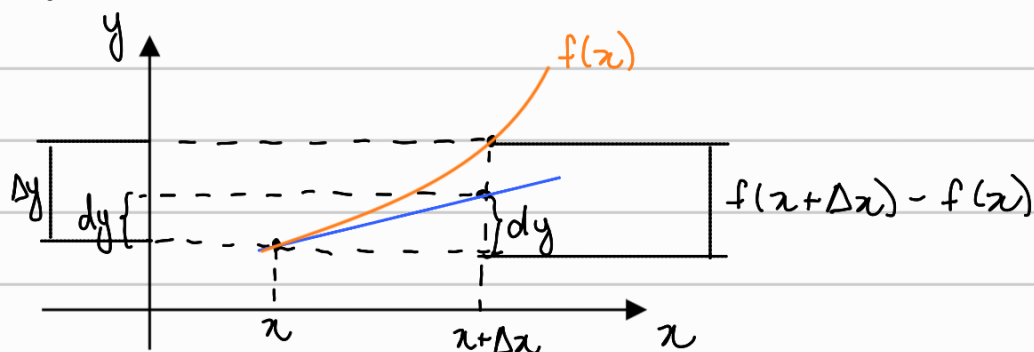


$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Definição: Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a diferencial de y , denotada por dy , será dada por

$$dy = f'(x) \Delta x$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x .



- Geometricamente, a diferencial dy é a variação ΔL na linearização de f quando $x = a$ varia em uma quantidade Δx .

- A diferencial dy representa a medida em que a reta tangente sobe ou desce quando x varia em uma quantidade Δx .

Definição: Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a diferencial de x , denotada por dx , será dada por

$$dx = \Delta x$$

onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f' .

Teorema: Se $y = f(x)$, então quando $f'(x)$ existe

$$dy = f'(x) dx$$

sendo uma variável independente ou não.

Exemplos:

- $y = x^5 + 37x$, $dy = (5x^4 + 37)dx$
- $y = \operatorname{tg} 2x$, $dy = (2 \sec^2 2x)dx$
- $y = \frac{x}{x+1}$, $dy = \frac{dx}{(x+1)^2}$

→ Erro na aproximação diferencial

Suponha que $f(x)$ seja uma função em $x=a$ e que $dx = \Delta x$ seja um incremento de x .

↳ Há duas maneiras de descrever a variação de f à medida que x varia de a para $a + \Delta x$

Variação real: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Estimativa diferencial: $df = f'(a) dx$

Calculando o erro da aproximação

$$\text{Erro} = \Delta f - df = \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \right) \Delta x = \varepsilon \Delta x.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ conforme $\Delta x \rightarrow 0$.

Variação de $y=f(x)$ próximo de $x=a$

Se $y=f(x)$ é derivável quando $x=a$ e x varia de a para $a+\Delta x$, então a variação Δy de f é dada por uma equação na forma

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

na qual $\varepsilon \rightarrow 0$ à medida que $\Delta x \rightarrow 0$

Exemplos: 8,9 Thomas p247 e 248

I3, E3 Leithold p 274 e 276