

Extremo de funções

A partir do estudo das derivadas de uma função **contínua**, podemos localizar e identificar seus valores **extremos**.

Definição: Seja f uma função de domínio D . Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(c)$$

para qualquer x em D , e um valor **mínimo absoluto** em D no ponto c se

$$f(x) \geq f(c)$$

para qualquer x em D .

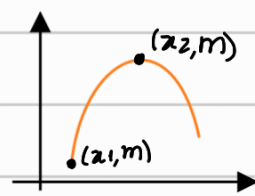
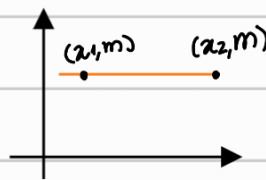
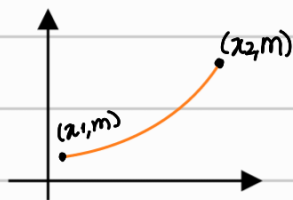
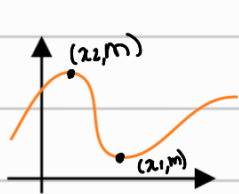
Máximos e mínimos absolutos não chamados de **extremos** absolutos, também denominados de **extremos globais**, para diferenciar dos extremos locais.

↳ Funções definidas pela mesma regra podem ter extremos diferentes, dependendo do domínio.

Exemplo 1, Thomas, p. 266

Teorema: Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a, b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$

para qualquer outro valor de x em $[a, b]$.



↳ Requisitos para o Teorema: intervalo fechado, finito e função contínua.

→ Extremos locais / relativos

Definição: Uma função f tem um valor **máximo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \leq f(c)$$

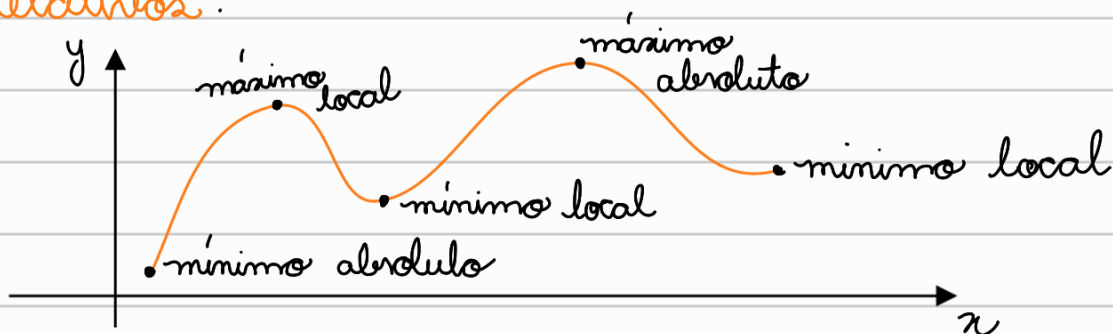
para qualquer x em um intervalo aberto que contenha o ponto c .

Uma função tem um valor **mínimo local** em um ponto interior c de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c)$$

para qualquer x em um intervalo aberto que contenha c .

↳ Extremos locais também são chamados de **extremos relativos**.



→ Determinando extremos

Teorema: Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f' é definida em c , então

$$f'(c) = 0$$

Prova: Suponha que f tenha um valor máximo local quando $x=c$, de modo que $f(x) - f(c) \leq 0$, para qualquer x próximo de c . Como c é um ponto interior do domínio de f , $f'(c)$ é definida pelo limite bilateral

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Isso significa que ambos os limites, à direita e à esquerda, existirão quando $x=c$ e serão iguais a $f'(c)$.

Examinando os limites separadamente, temos

$$\bullet x < c: \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$\bullet x > c: \quad f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Para que os limites sejam iguais $f'(c) = 0$. ■

Os únicos locais onde uma função f pode ter valores extremos, locais ou globais, são

1) pontos interiores onde $f' = 0$

2) pontos interiores onde f' não existe

3) extremidades do domínio de f .



Definição: Um ponto interior do domínio de uma função f onde f' é zero ou indefinida é um **ponto crítico** de f .

↳ Assim, os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades.

• Determinando extremos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado e finito

1) Calcular f em todos os pontos críticos e extremidades

2) Tomar o maior e o menor dentre os valores obtidos.

Exemplo: $f(x) = x^2$, $D: [-2, 1]$

Resposta: Máx. Abs: $x = -2$, min. Abs: $x = 0$

Exemplo: $f(x) = 10x(2 - \ln x)$, $D: [1, e^2]$

Resposta: Máx. Abs: $x = e$, min. Abs: $x = e^2$.

Exemplo: $f(x) = x^{2/3}$, $D: [-2, 3]$

Resposta: Máx. Abs: $x = 3$, min. Abs: $x = 0$.

Teorema do valor médio

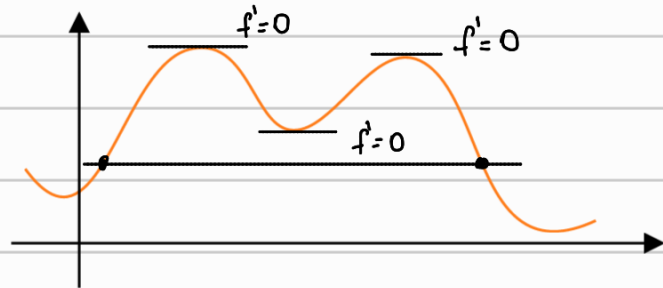
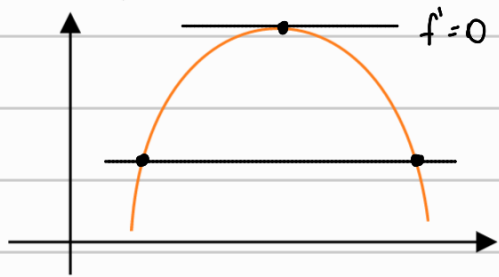
Sabemos que funções constantes têm derivadas iguais a zero, mas poderia existir uma função complicada, com muitos termos, cujas derivadas pudessem todas ser canceladas e dar zero? Qual a relação entre duas funções que têm derivadas idênticas no mesmo intervalo?

↳ O que queremos saber é quais funções podem ter um tipo particular de derivada.

↳ Muitas destas questões são respondidas pelo Teorema do valor médio.

→ Teorema de Rolle

Ao traçar o gráfico de uma função, encontramos evidências geométricas que entre dois pontos quaisquer onde uma função derivável cruza uma reta horizontal, há pelo menos um ponto na curva onde a tangente é horizontal.



Teorema de Rolle: Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior (a, b) . Se $f(a) = f(b)$ então há pelo menos um número c em (a, b) no qual $f'(c) = 0$.

Exemplo: A função polinomial

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

é contínua em qualquer ponto de $[-3, 3]$ e derivável em qualquer ponto de $(-3, 3)$.

↳ $f(-3) = f(3) = 0$, logo $f' = 0$ pelo menos uma vez no intervalo aberto $(-3, 3)$.

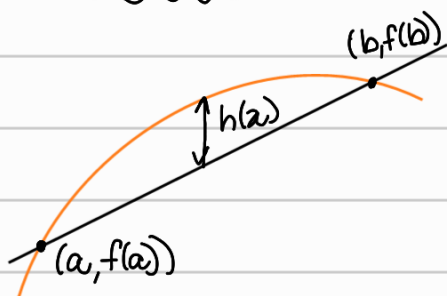
$$\text{↳ } f' = 0 \text{ em } x = \pm \sqrt{3}$$

→ Teorema do valor médio

Teorema: Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então há pelo menos um ponto c em (a, b) em que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Prova:



Tracamos o gráfico de f como uma curva no plano cartesiano e uma reta através dos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Essa reta é o gráfico da função

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

A diferença na vertical entre os gráficos de f e g em x é

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b-a} (x-a)$$

A função $h(x)$ satisfaz a hipótese do teorema de Rolle em $[a, b]$: é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $h(a) = h(b) = 0$. Logo, $h' = 0$ em algum ponto $c \in (a, b)$.

Derivando $h(x)$,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b-a}$$

Em $x=c$, $h' = 0$

$$0 = f'(c) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

• A hipótese do teorema do valor médio não exige que f seja derivável em a ou b , a continuidade em a e b é suficiente.

Exemplos: 3 e 4, Thomas, p. 280.

Corolário 1: Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo aberto (a, b) , então $f(x) = C$ para qualquer $x \in (a, b)$ onde C é uma constante.

Prova: Se x_1 e x_2 são dois pontos quaisquer em (a, b) , numerando x_1 e x_2 da esquerda para a direita, teremos $x_1 < x_2$. Assim, f satisfaz a hipótese do teorema do valor médio no intervalo $[x_1, x_2]$: é derivável e, portanto, contínua em qualquer ponto de $[x_1, x_2]$. Assim,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

em algum ponto c entre x_1 e x_2 . Como $f' = 0$ ao longo de (a, b) ,

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \longrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

Corolário 2: Se $f'(x) = g'(x)$ em cada ponto x de um intervalo aberto (a, b) , então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para qualquer $x \in (a, b)$. Ou seja, $f - g$ é uma constante em (a, b) .

Prova: Em cada ponto $x \in (a, b)$, a derivada da função diferença $h(x) = f(x) - g(x)$ é

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Dessa forma, $h(x)$ é uma constante C , o que leva a $f(x) = g(x) + C$.

Exemplo: Com o corolário 2, podemos provar que $\ln bx = \ln b + \ln x$.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx} \ln bx = \frac{1}{bx} \cdot b = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \ln bx$$

Então, $\ln bx = \ln x + C$. Escolhendo $x=1$, $\ln b = C$ e

$$\ln bx = \ln x + \ln b.$$

Funções monotônicas e o teste da primeira derivada

Definições: Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em I .

1) Se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **crecente** em I .

2) Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que f é **decrecente** em I .

Uma função que é crescente ou decrescente em I é chamada **monotônica** em I .

↳ As definições de funções crescentes e decrescentes precisam ser satisfeitas para qualquer par de pontos x_1 e x_2 em I no qual $x_1 < x_2$.

Corolário 3: Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

- Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é **crecente** em $[a, b]$.

- Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in (a, b)$, então f é **decrecente** em $[a, b]$.

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois pontos em $[a, b]$, sendo $x_1 < x_2$. O Teorema do valor médio aplicado a f em $[x_1, x_2]$ diz que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

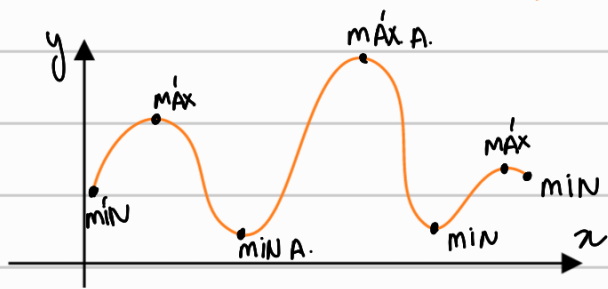
para algum c entre x_1 e x_2 . O sinal do lado direito dessa equação é o mesmo de $f'(c)$ pois $x_2 - x_1 > 0$. Por-

tanto se $f' > 0$ em (a, b) , $f(x_2) > f(x_1)$, e se $f' < 0$ em (a, b) , $f(x_2) < f(x_1)$.

Exemplo: Determinar os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identificar os intervalos onde f é crescente e decrescente.

Thomas, p. 288.

→ O teste da primeira derivada para extremos locais



Nos pontos onde f possui valor de mínimo, $f' < 0$ imediatamente à esquerda e $f' > 0$ imediatamente à direita. Assim, a curva

está decendo à esquerda do valor mínimo e subindo à sua direita.

De forma análoga, nos pontos onde f possui valor máximo, $f' > 0$ imediatamente à esquerda e $f' < 0$ imediatamente à direita. Portanto, a curva está subindo à esquerda do valor máximo e decendo à sua direita.

Em suma, em um ponto de extremo local, o sinal de $f'(x)$ muda.

Exemplo: Determine os pontos críticos de $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente. Determine os extremos locais e absolutos da função.

p. 289, Thomas

Exemplo: Determine os pontos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x-4)$$

Identifique os intervalos nos quais f é crescente e decrescente. Determine os valores extremos absolutos e locais da função.

Concavidade e esboço de curvas

Vimos que a primeira derivada nos diz onde uma função é crescente e onde é decrescente. Além disso, em um ponto crítico de uma função derivável, o teste da primeira derivada nos diz se existe um mínimo ou máximo local, ou se o gráfico simplesmente continua a crescer ou decrescer.

Agora, veremos como a segunda derivada nos fornece informações sobre o modo como a curva de uma função derivável se inclina ou muda de direção.

→ Concavidade

Definição: O gráfico de uma função derivável $y=f(x)$ é

- 1) côncavo para cima em um intervalo aberto I , se f' é crescente em I .
- 2) côncavo para baixo em um intervalo aberto I , se f' é decrescente em I .

O comportamento de inclinação e mudança de direção define a concavidade da curva.

Se uma função $y=f(x)$ possui uma segunda derivada, então podemos aplicar o corolário 3 do teorema do valor médio para concluir que f' é crescente se $f'' > 0$ em I , e decrescente se $f'' < 0$.

Teste da segunda derivada para concavidade

Seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo I .

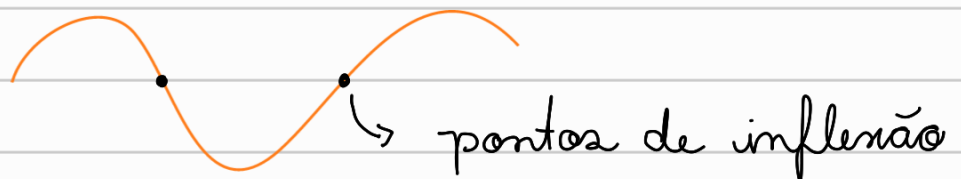
- 1) Se $f'' > 0$ em I , o gráfico de f ao longo de I é convexo para cima.
- 2) Se $f'' < 0$ em I , o gráfico de f ao longo de I é convexo para baixo.

Exemplos:

- $y = x^3$
- $y = x^2$
- $y = 3 + \sin x, \quad x \in [0, 2\pi]$

→ Pontos de inflexão

Definição: Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um ponto de inflexão.



↳ No ponto de inflexão, $f'' = 0$ ou f'' é indefinida.

Exemplos:

- $y = x^4$
- $y = x^{1/3}$

Exemplo: Estudar o movimento dado pelo deslocamento

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$$

Teorema: Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x=c$.

1) Se $f'(c)=0$ e $f''(c)<0$, então f possui um **máximo local** quando $x=c$.

2) Se $f'(c)=0$ e $f''(c)>0$, então f possui um **mínimo local** quando $x=c$.

3) Se $f'(c)=0$ e $f''(c)=0$, então o **teste falha**. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.

Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

Exemplo: Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

Exemplo: Esboce o gráfico de $f(x) = e^{2/x}$.