

Formas indeterminadas e a regra de L'Hopital

John Bernoulli descobriu uma regra para calcular limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem a zero ou ao infinito.

↳ A regra é atualmente conhecida como regra de L'Hopital, em homenagem ao nobre francês Guillaume de L'Hopital que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

→ Forma indeterminada $0/0$

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x=a$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser encontrado por substituição.

Vimos que a partir de manipulações algébricas é possível determinar o limite.

↳ A regra de L'Hopital é uma forma alternativa de calcular limites com essas indeterminações a partir do uso de derivadas.

Teorema: Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que $f'(a)$ e $g'(a)$ existam e que $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Prova:

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = 2 \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Teorema: Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

Exemplo:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = 0$$

A regra de L'Hopital se aplica também a limites laterais

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = -\infty$$

→ Formas indeterminadas ∞/∞ , $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

A regra de L'Hopital também pode ser aplicada à forma indeterminada ∞/∞ .

↳ Se $f(x) \rightarrow \pm\infty$ e $g(x) \rightarrow \pm\infty$ quando $x \rightarrow a$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o último limite exista.

Exemplos

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$

↳ analisar limites laterais

Em alguns casos, é possível transformar algebricamente uma indeterminação na forma $\infty \cdot 0$ ou $\infty - \infty$ para as formas $0/0$ ou ∞/∞ .

Exemplos

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin^{1/2} x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h \right) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

→ Potências indeterminadas

Os limites que levam às formas indeterminadas 1^∞ , 0^0 , ∞^0 podem, às vezes, ser tratados utilizando-se primeiro logaritmos.

↳ Usamos a regra de L'Hopital para encontrar o limite do logaritmo e, calculando a exponencial nesse valor, obtemos o limite da função original.

Se $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = L$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

Aqui a pode ser finito ou infinito.

Exemplo:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$$

Outros exemplos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1} = -\frac{5}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{1/x} = \infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x} \right) = \infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^x = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = e^3$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{1/\ln x} = e$$

Fórmula de Taylor

Os valores de uma função polinomial podem ser encontrados a partir de um número finito de adições e multiplicações. Por outro lado, existem outras funções, tais como a logarítmica, a exponencial e as funções trigonométricas, que não podem ser calculadas tão facilmente.

↳ Aqui, vamos mostrar que muitas funções podem ser aproximadas por polinômios e que os polinômios, em vez da função original, podem ser usados para cálculos, quando a diferença entre o valor da função e o da aproximação polinomial for suficientemente pequena.

Existem vários métodos para aproximar uma função da por polinômios.

↳ Um dos métodos mais utilizados é o que envolve a fórmula de Taylor.

Teorema: Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas não são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b) . Então, existe um número ξ no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

A fórmula também é válida se $b < a$.

Se $n=0$, temos

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

onde ξ está entre a e b . Este é o **teorema do valor médio**. Assim, temos que o teorema que estabelece a fórmula de Taylor é uma generalização do teorema do valor médio.

Se substituirmos b por x , obtemos a fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

onde ξ está entre a e x .

Condições para a fórmula ser válida:

- 1) f e suas n derivadas não contínuas em um intervalo fechado contendo a e x
- 2) a $(n+1)$ -ésima derivada de f deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente.

A fórmula de Taylor pode ser escrita como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é o **polinômio de Taylor** de enésimo grau da função f no número a , e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

com ξ entre a e x , é o **resto**. O termo $R_n(x)$ nessa forma é chamado de **resto na forma de Lagrange**.

O caso especial da fórmula de Taylor, obtida quando $a=0$, é

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

com ξ entre 0 e x , e é denominada **fórmula de Maclaurin**. Nessa forma, o **polinômio de Maclaurin** de enésimo grau para uma função f é

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Exemplos

1) Polinômio de Maclaurin para $f(x) = e^x$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

2) Polinômio de Maclaurin para $f(x) = \sin x$

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

3) Calcule o polinômio de Taylor de terceiro grau de $f = \cos x$ em $\pi/4$ e o resto na forma de Lagrange

4) Use um polinômio de Maclaurin para encontrar um valor de $\sqrt{e}$ exato até a quarta casa decimal.