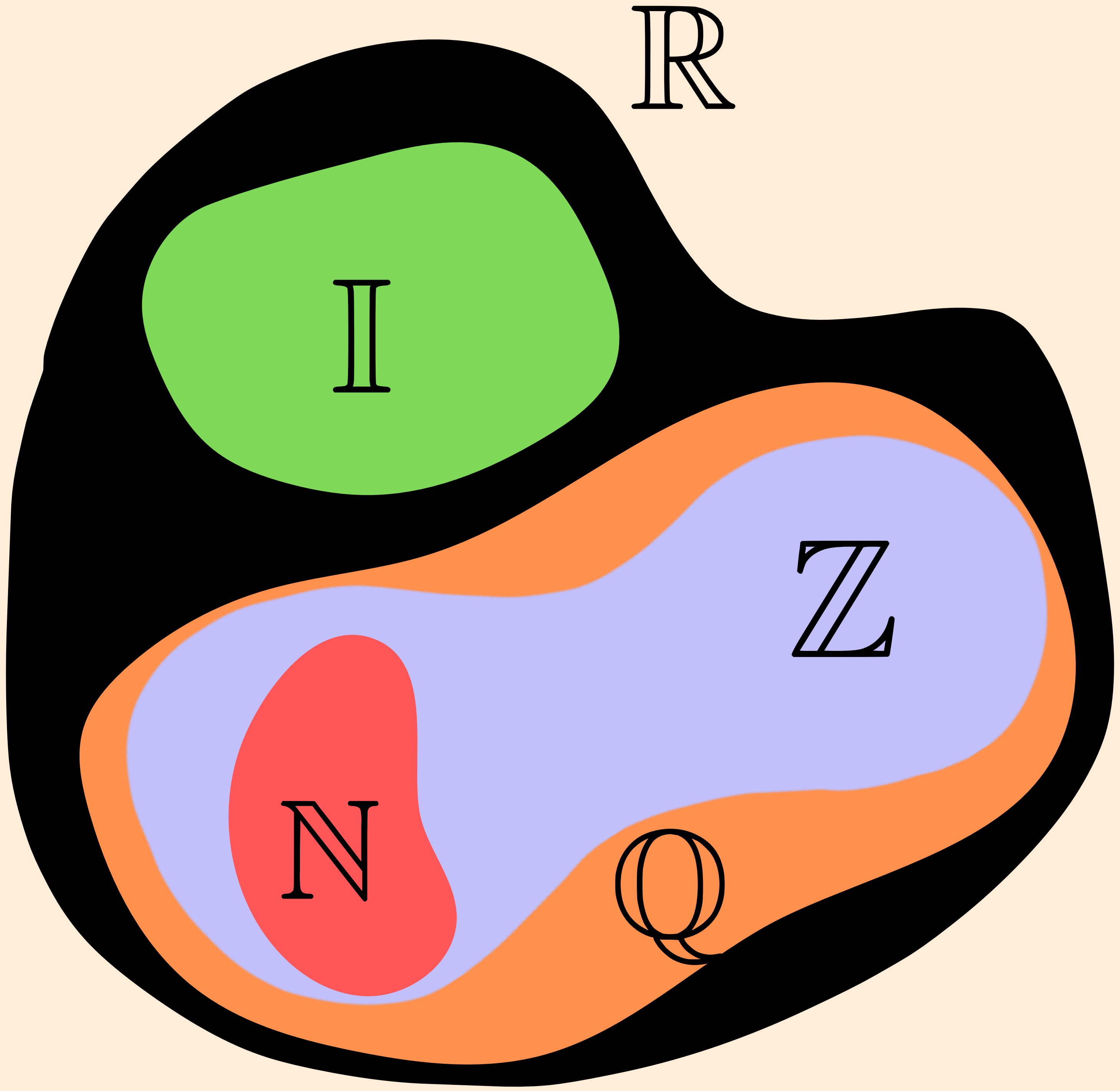
Números e funções reais

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1_1S2026

Referências:

- THOMAS, George B. Cálculo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. Um curso de cálculo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

Números reais



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\left\{\frac{a}{b}, b \neq 0 \text{ e } a \in \mathbb{Z}\right\} \in \mathbb{Q}$$

Números reais

- Duas operações são definidas

Adição

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \longrightarrow (x + y) \in \mathbb{R}$$

Multiplicação

$$x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \longrightarrow (x \cdot y) \in \mathbb{R}$$

Funções reais

- O valor de uma variável depende do valor de outra
- A relação entre esses falor é dado por uma regra ou fórmula

$$\boxed{y = f(x)}$$

Funções reais

- O valor de uma variável depende do valor de outra
- A relação entre esses falor é dado por uma regra ou fórmula

Variável independente

$$\boxed{y = f(x)}$$

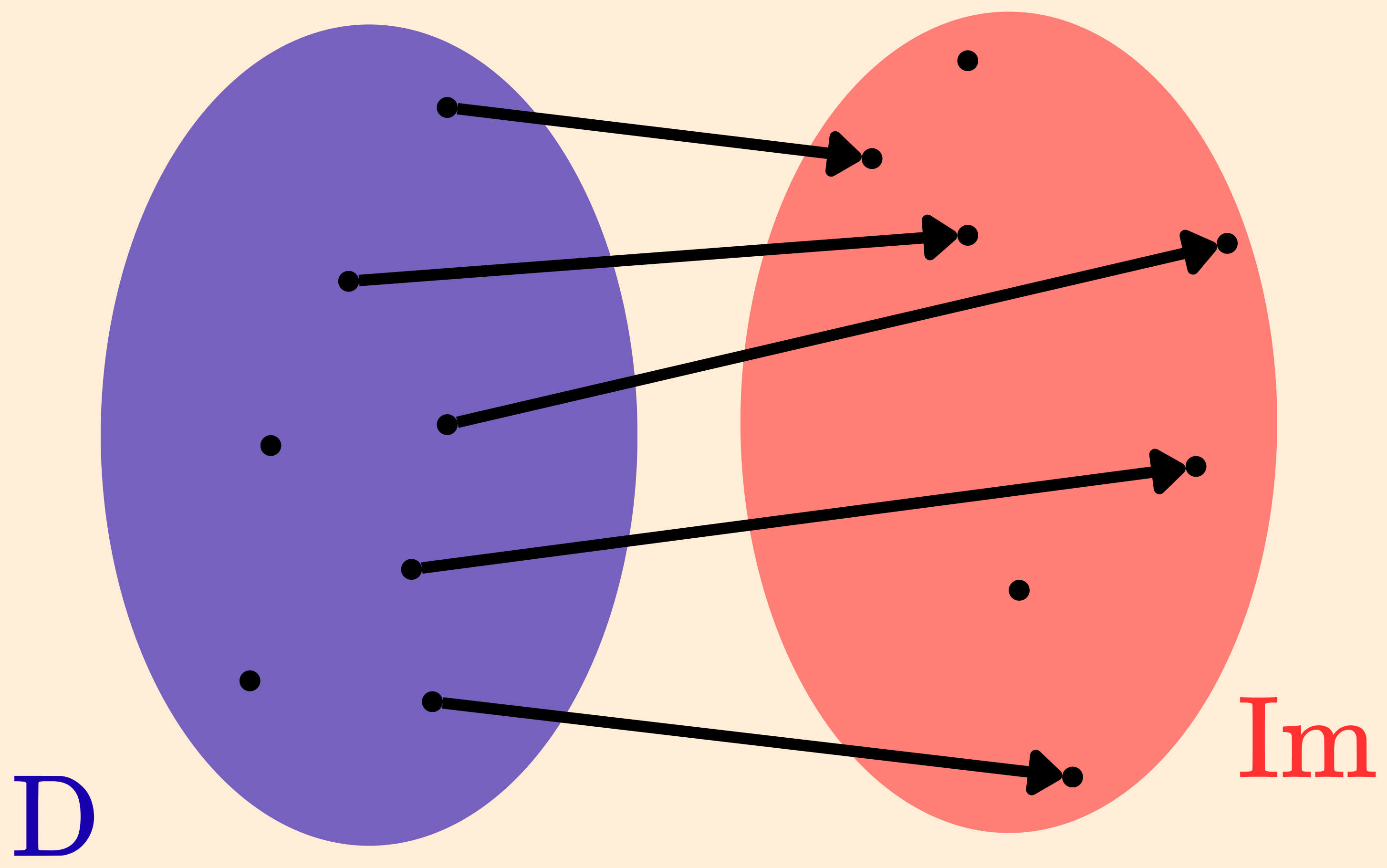
Variável dependente

Funções reais

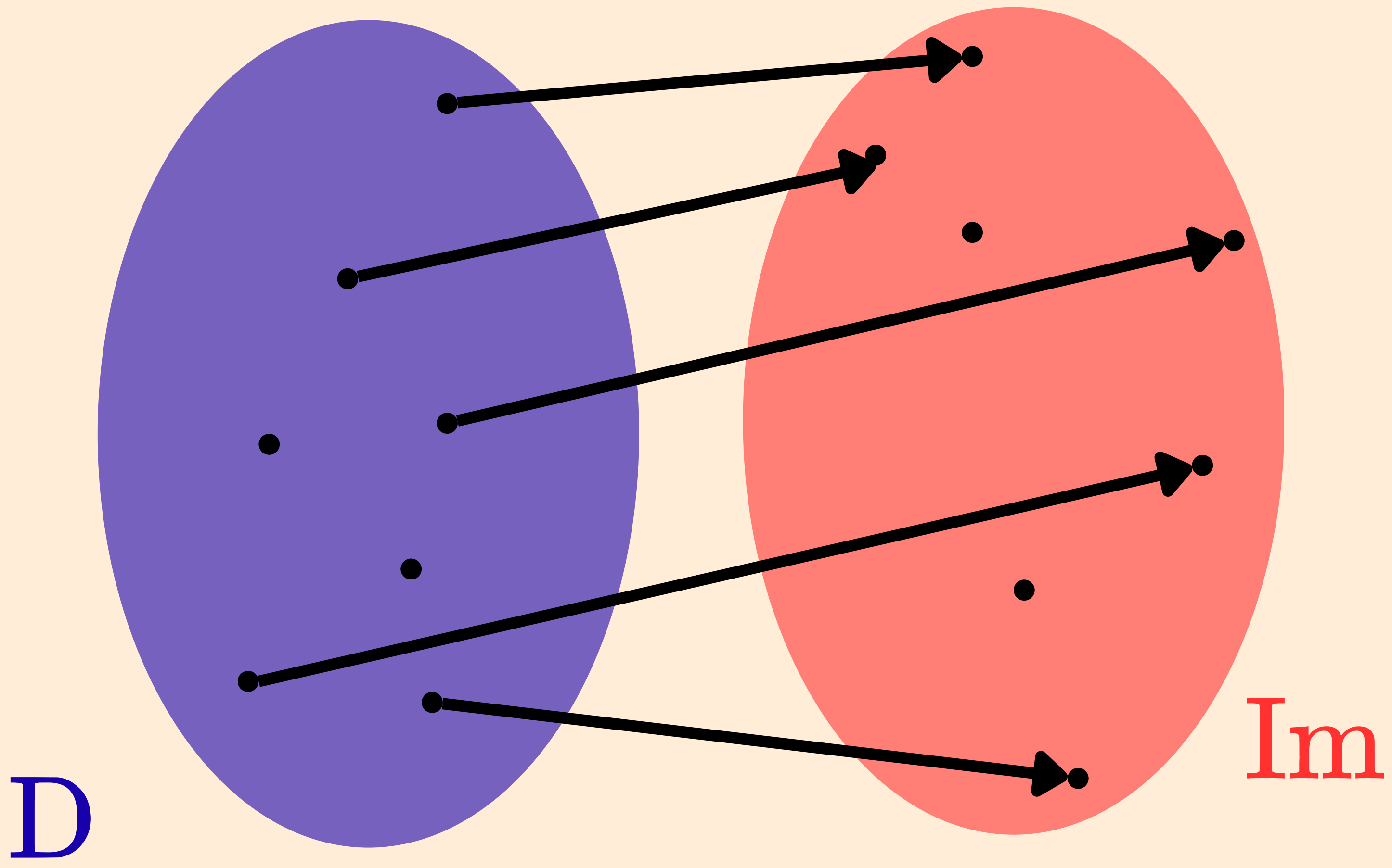
Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Im é uma regra que associa um <u>único</u> elemento $f(x) \in \mathrm{Im}$ a cada elemento $x \in \mathrm{D}$

Funções reais

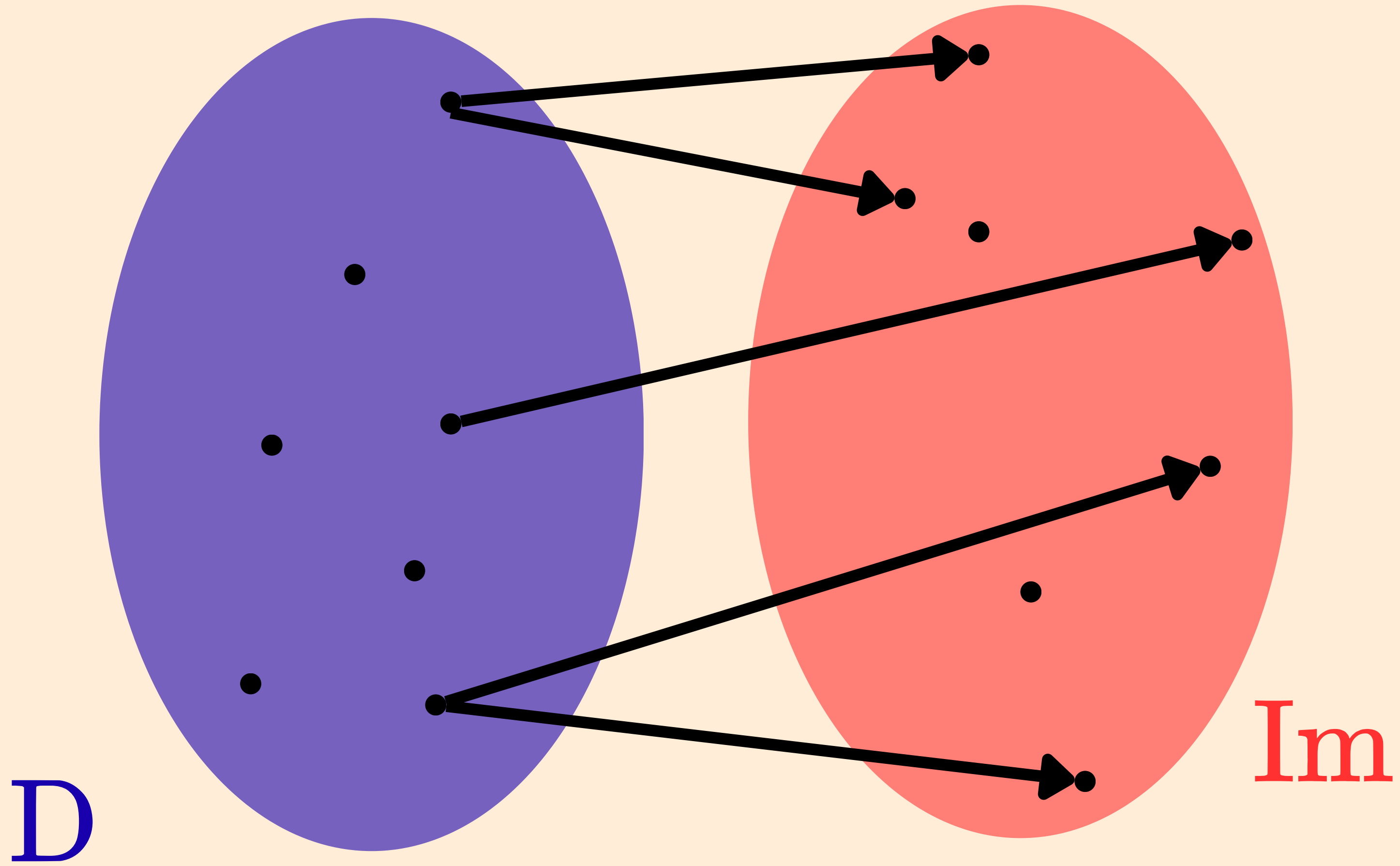
Definição: Uma **função** de um conjunto D para um conjunto Im é uma regra que associa um <u>único</u> elemento $f(x) \in \mathrm{Im}$ a cada elemento $x \in \mathrm{D}$



Funções reais



É função



NÃO é função

Funções reais

Domínio: todos os possíveis valores de entrada da função

Imagem: todos os valores resultantes da função enquanto a variável independente varia ao longo do domínio

Exemplo:

$$y = x^2$$

Funções reais

Domínio: todos os possíveis valores de entrada da função

Imagem: todos os valores resultantes da função enquanto a variável independente varia ao longo do domínio

Exemplo:

$$y = x^2 \quad \begin{cases} \textbf{Domínio:} \quad (-\infty, \infty) \quad \text{ou} \quad \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \\ \\ \textbf{Imagem:} \quad (0, \infty) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\} \end{cases}$$

Exemplos:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{4 - x}$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Exemplos:

$\rightarrow\ y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad \begin{cases} \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\ \mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\} \end{cases}$

$\rightarrow\ y = \sqrt{x}$ $\qquad \begin{cases} \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \\ \mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \end{cases}$

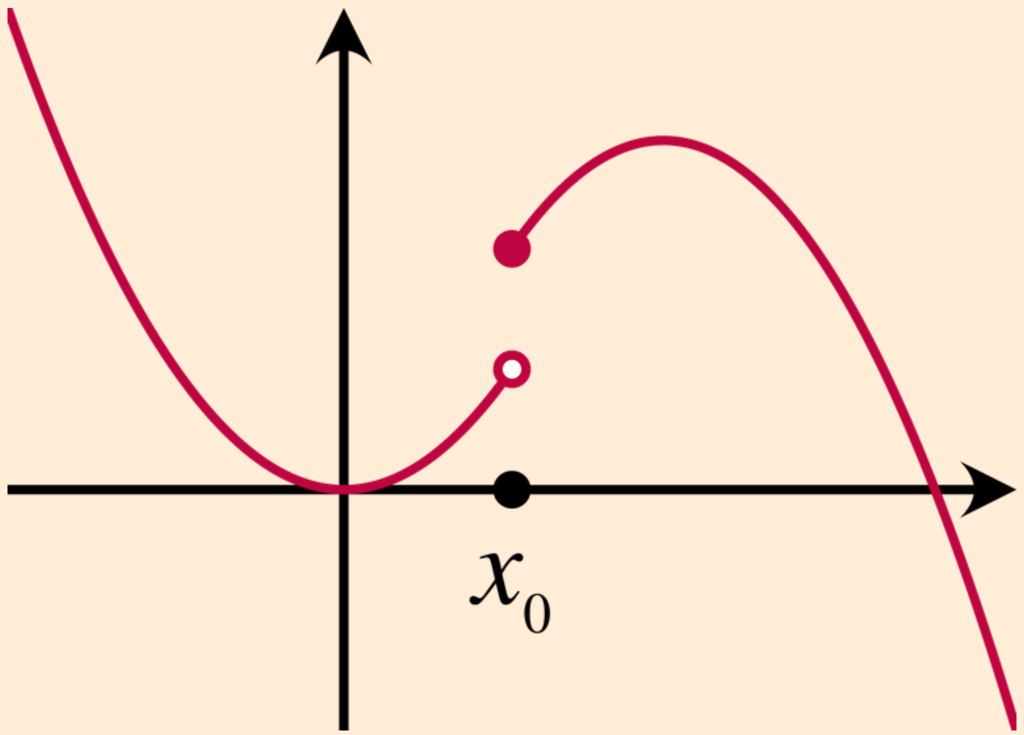
$\rightarrow\ y = \sqrt{4 - x}$ $\qquad \begin{cases} \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} \\ \mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\} \end{cases}$

$\rightarrow\ y = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad \begin{cases} \mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\} \\ \mathrm{Im} = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 1\} \end{cases}$

Funções reais

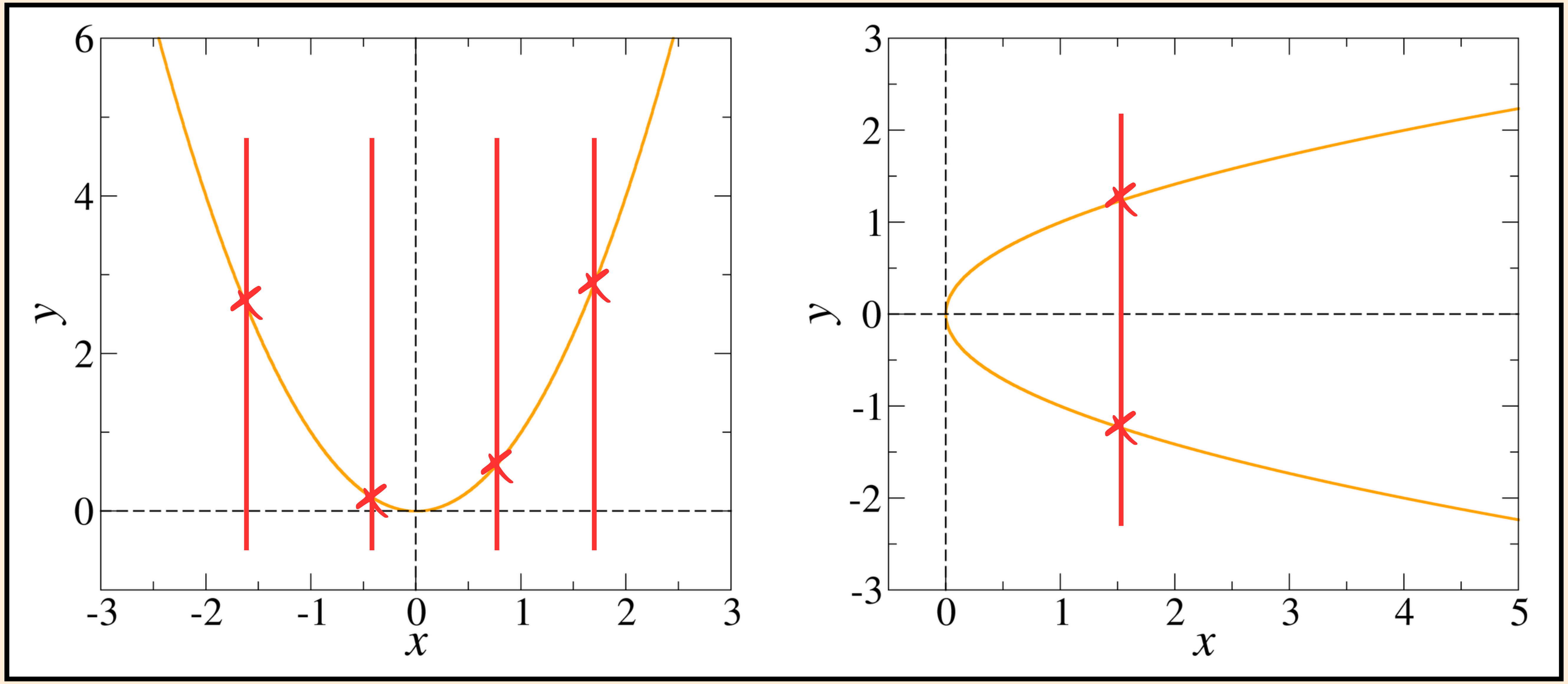
Gráficos: são formados pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são os pares (x, y) onde $y = f(x)$

$$\{(x, f(x)/x \in \mathrm{D}\}$$



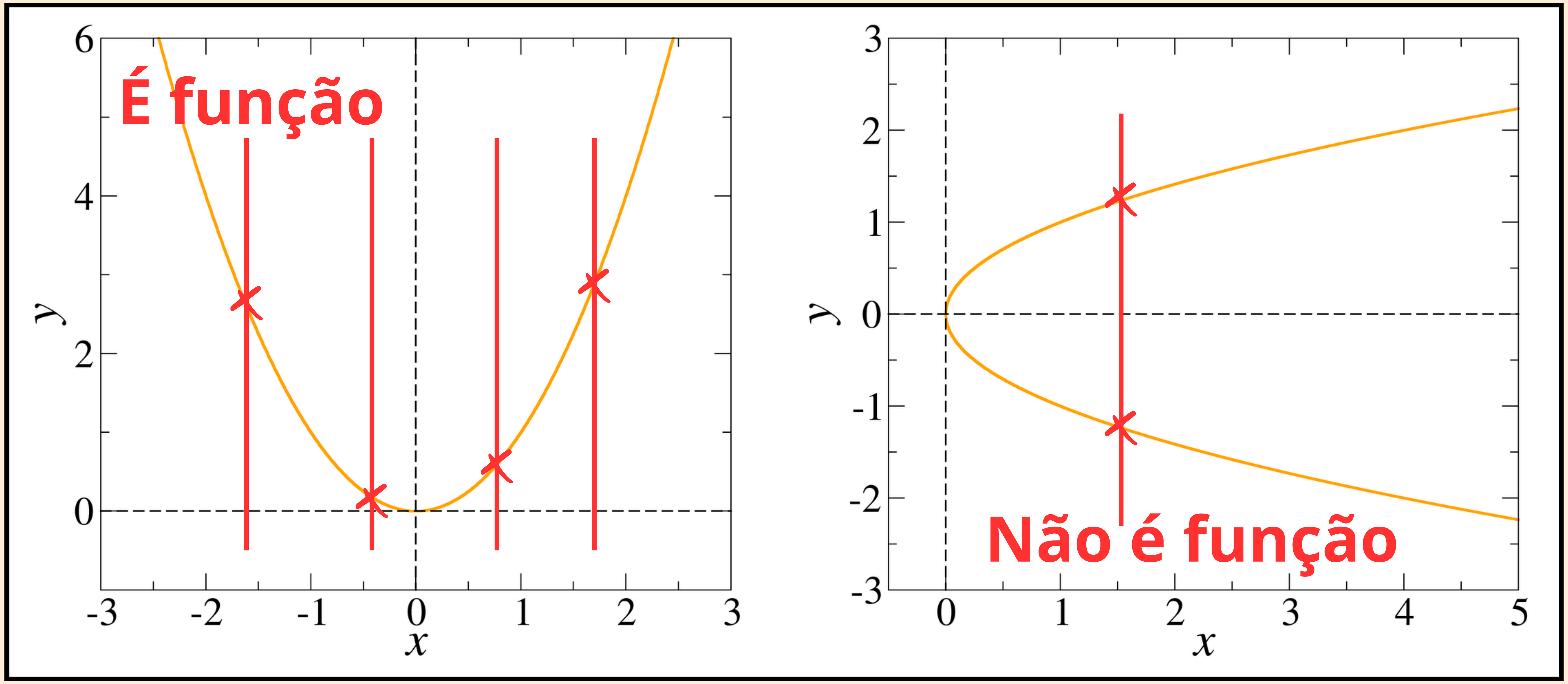
Funções reais

Teste da reta vertical: nenhuma reta vertical pode interceptar a curva da função mais de uma vez.



Funções reais

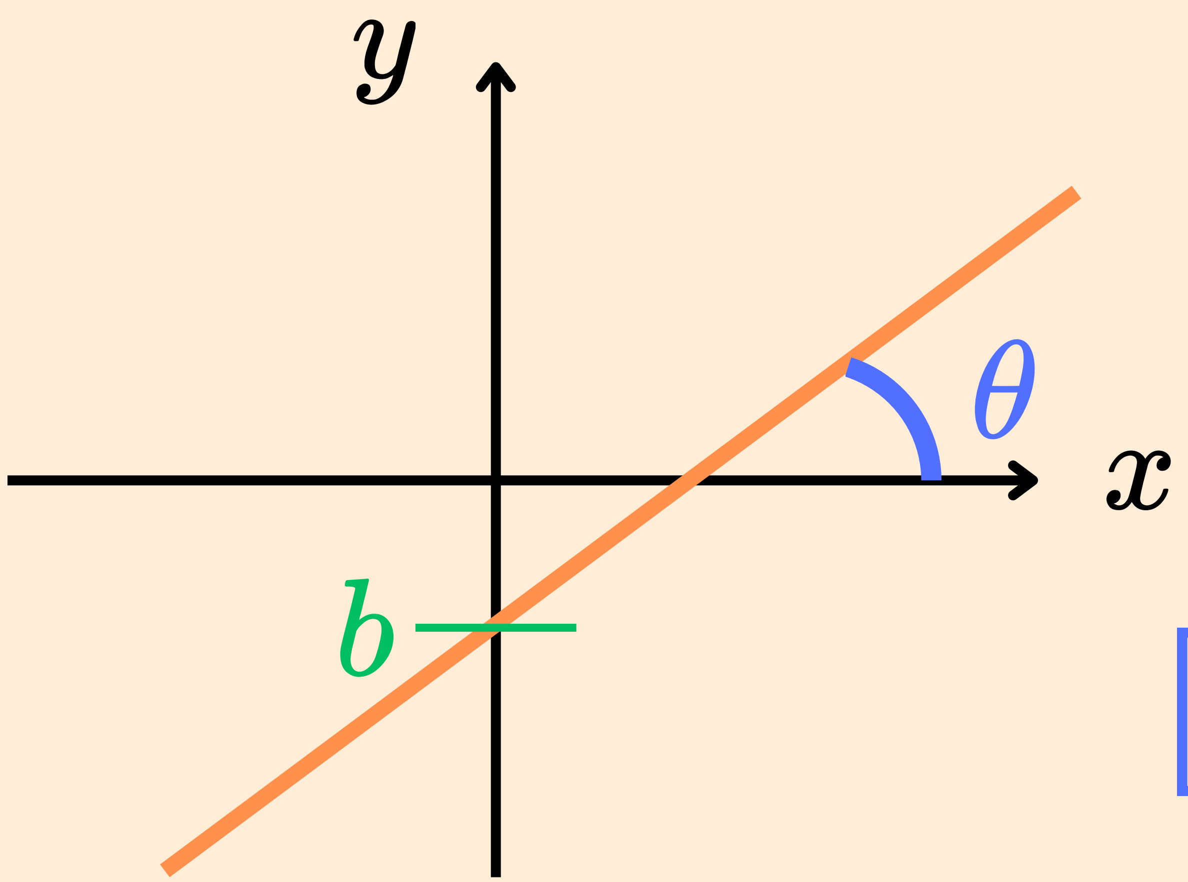
Teste da reta vertical: nenhuma reta vertical pode interceptar a curva da função mais de uma vez.



Algumas funções

Funções lineares:

$$\boxed{y = mx + b}$$

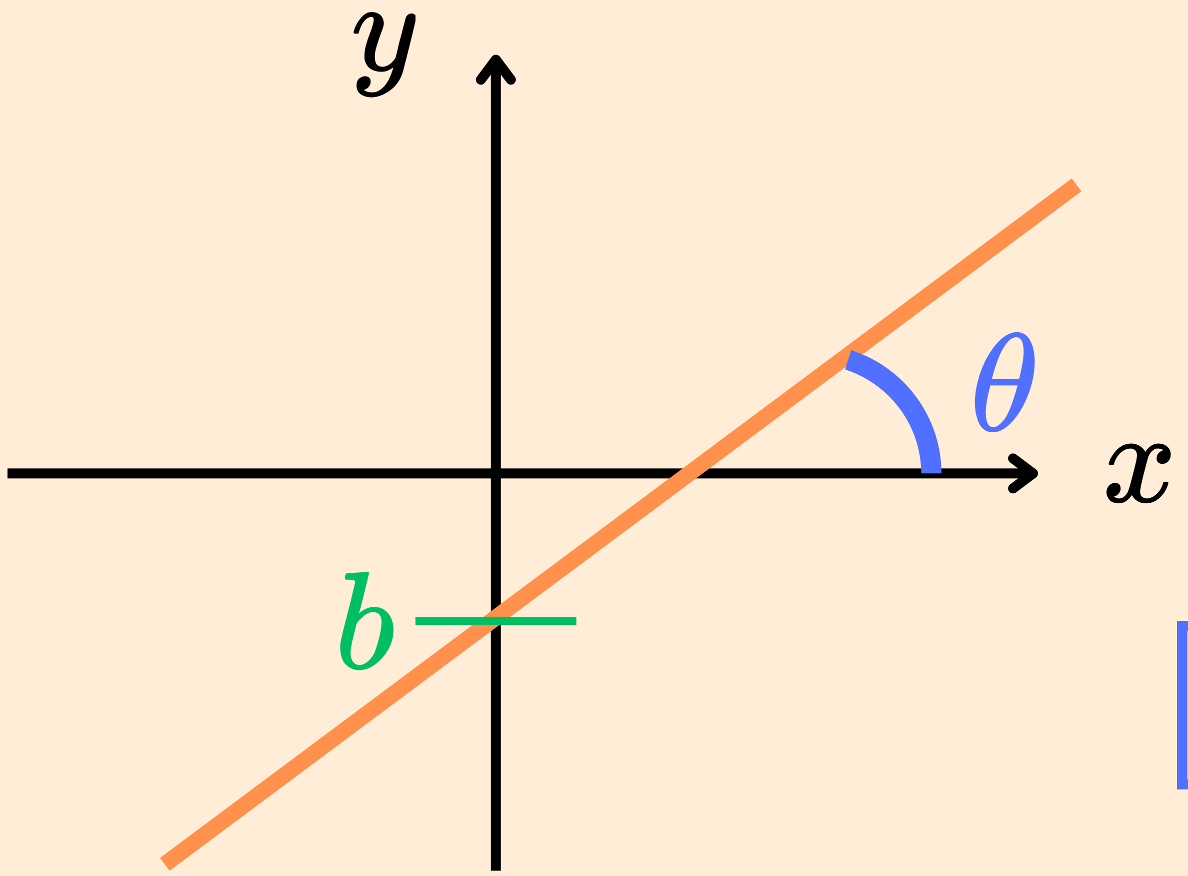


$$\boxed{m = \mathrm{tg}\theta}$$

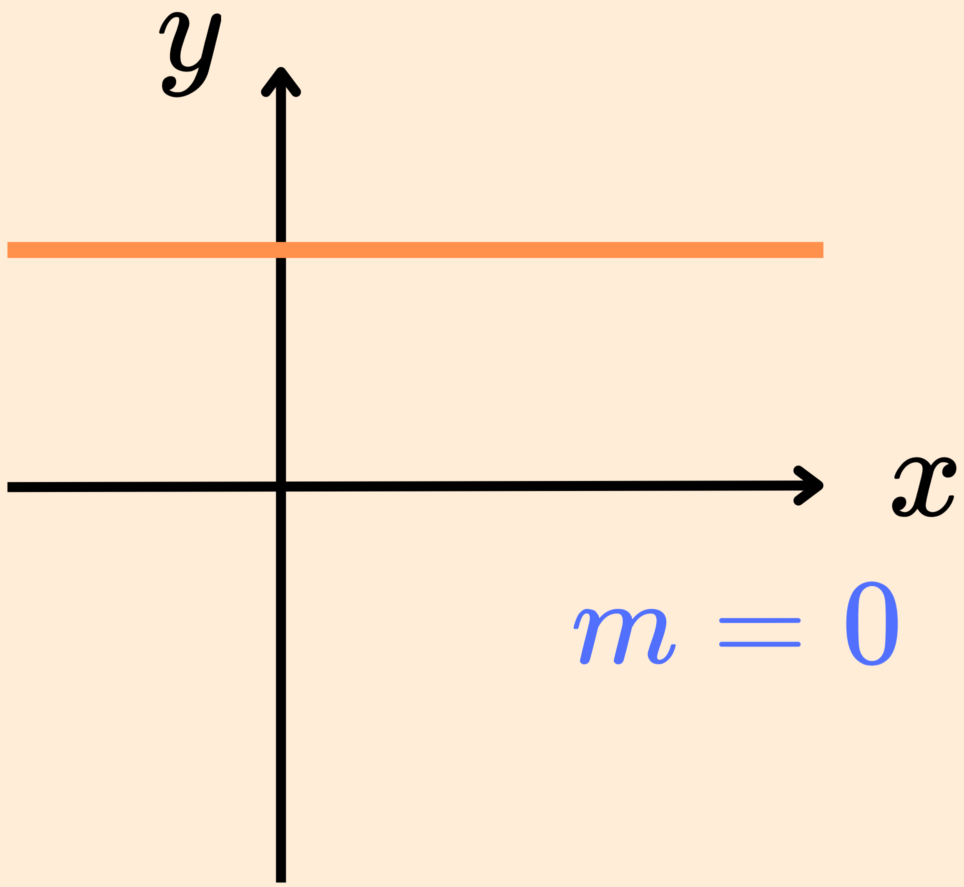
Algumas funções

Funções lineares:

$$\boxed{y = mx + b}$$



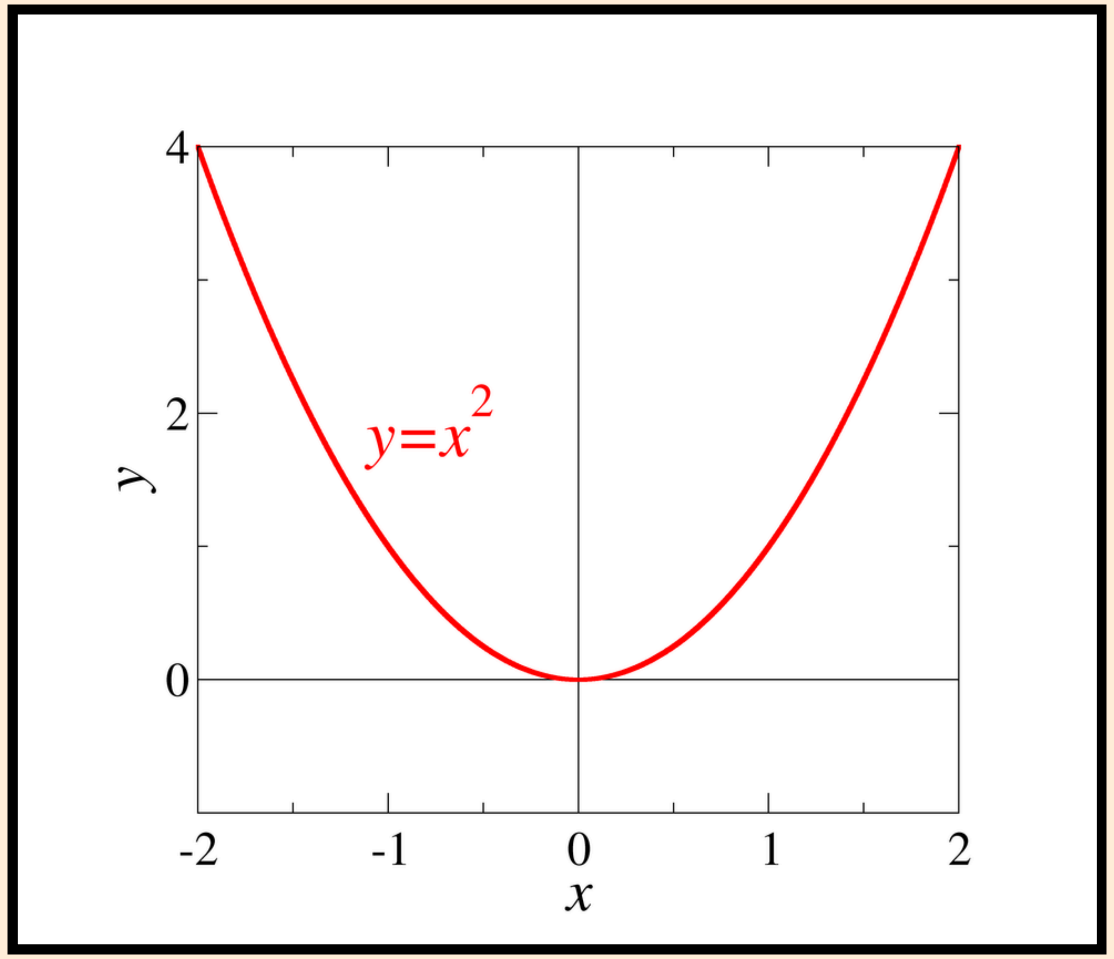
$$\boxed{m = \mathrm{tg}\theta}$$

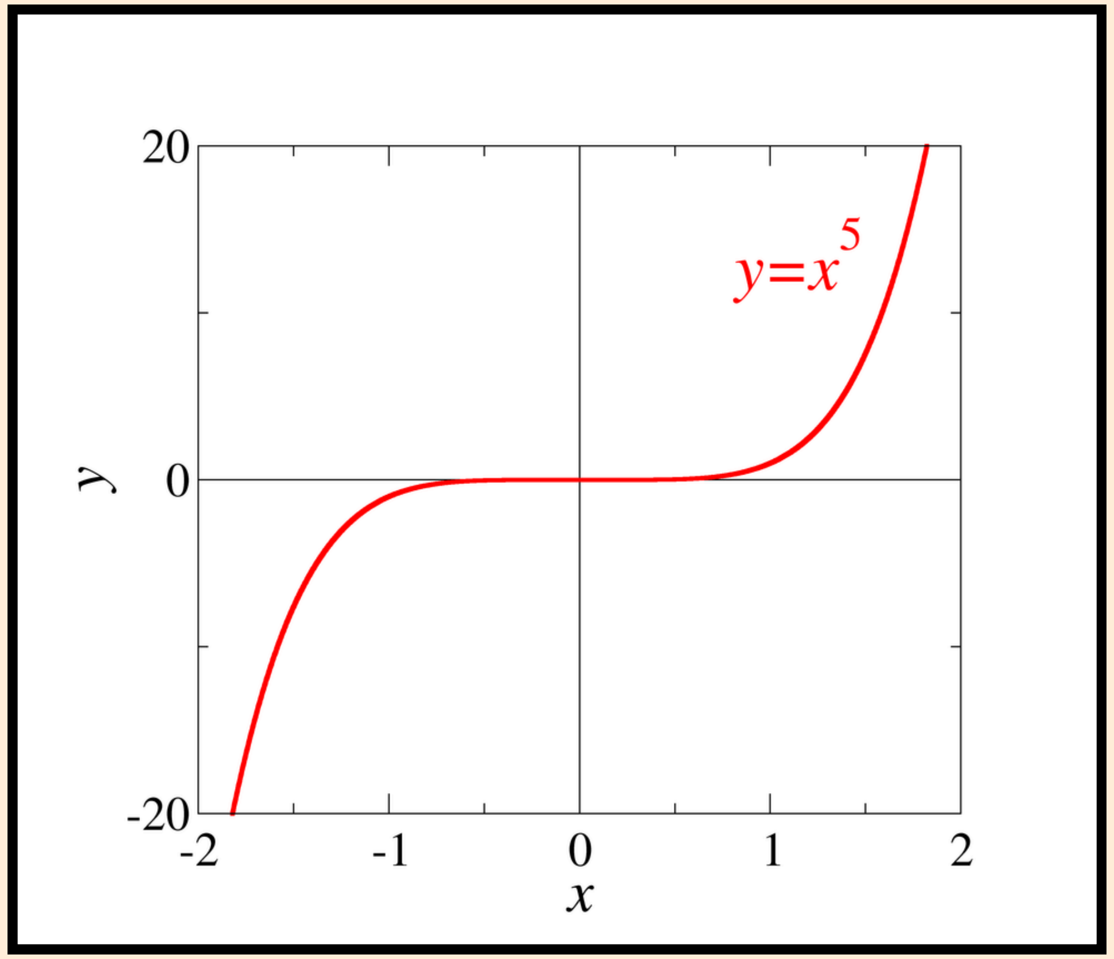


Algumas funções

<u>Funções de potência:</u>

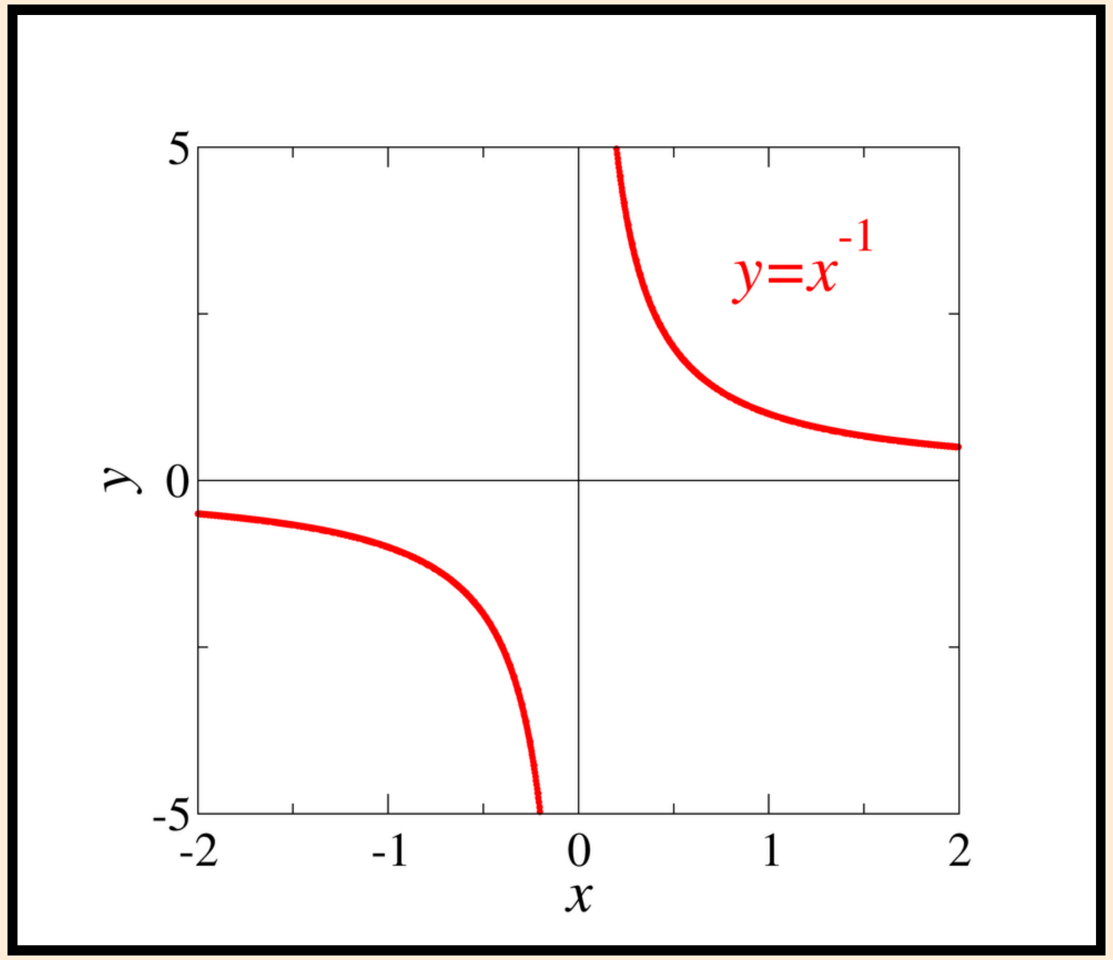
$$\boxed{y = x^a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

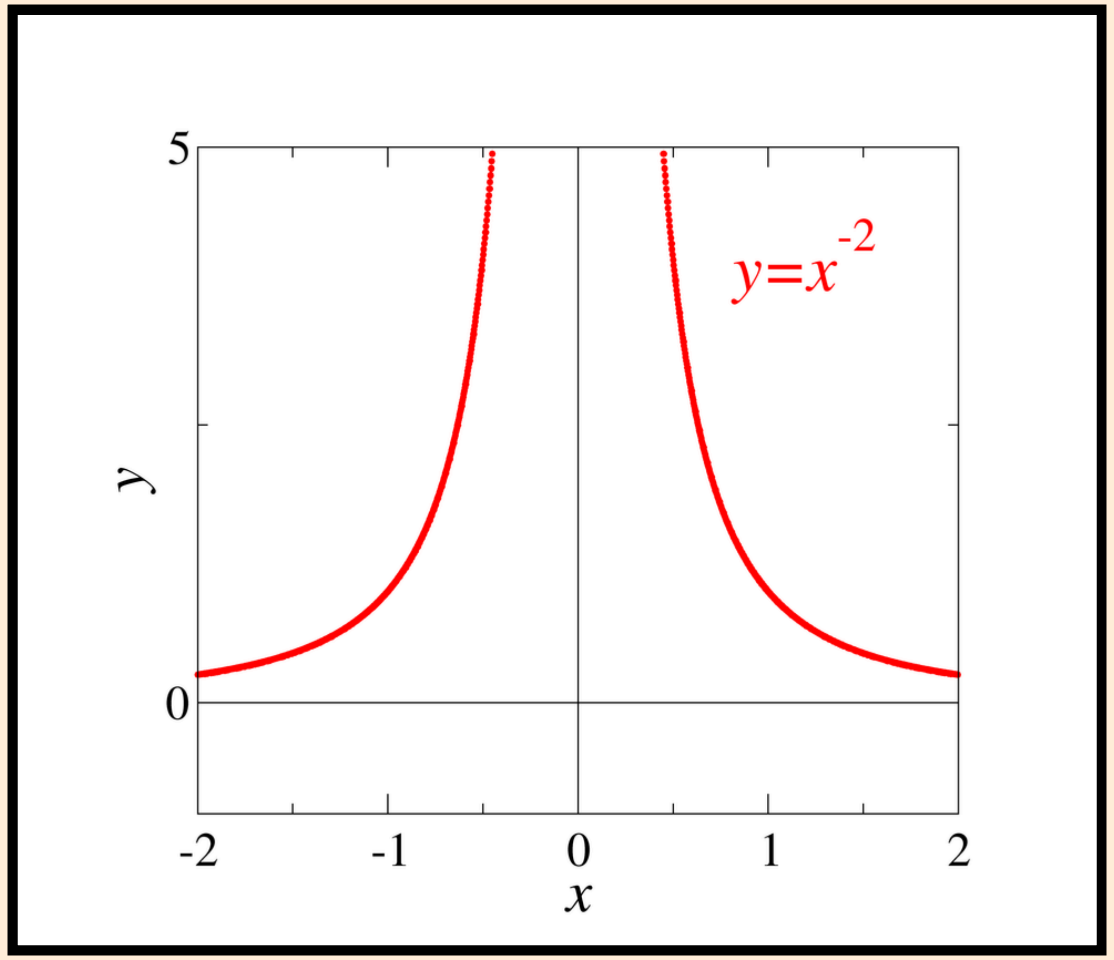


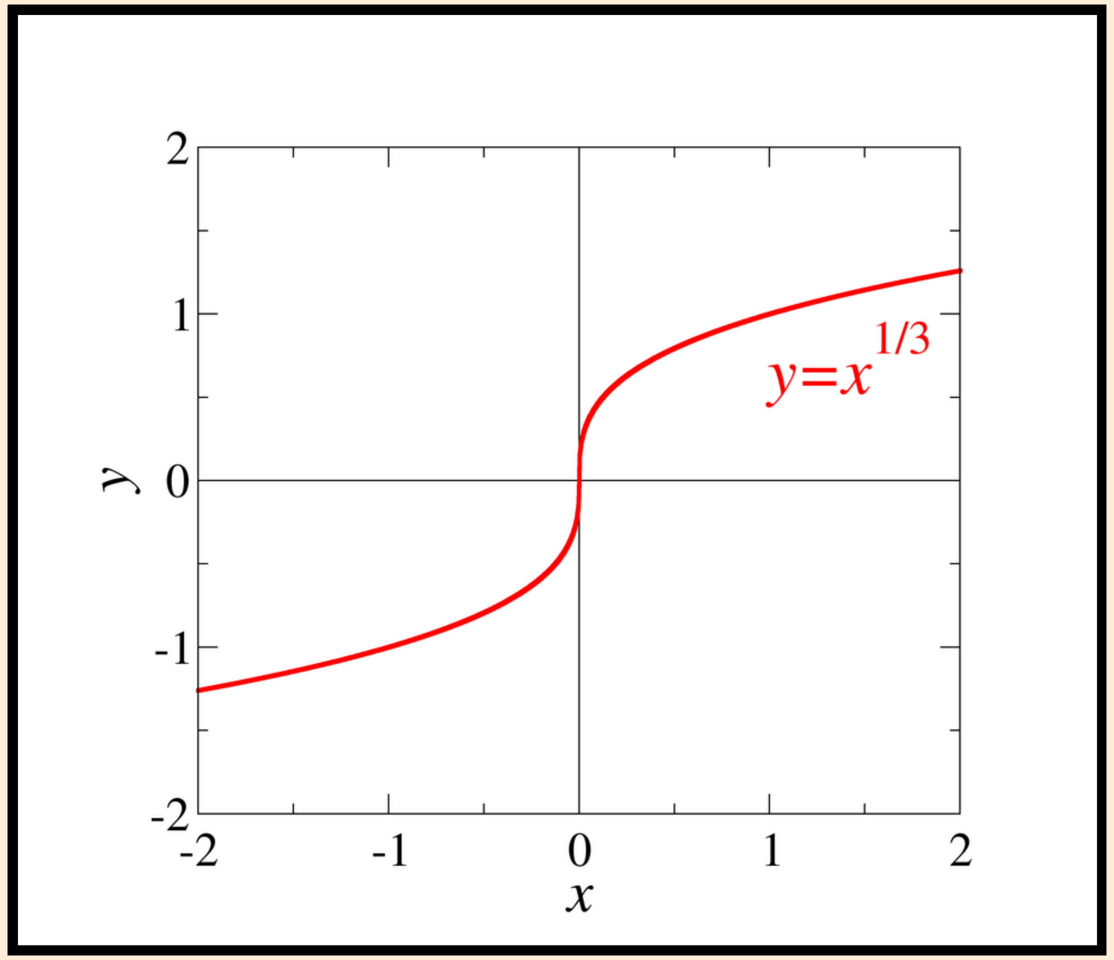


Algumas funções

<u>Funções de potência:</u>







Algumas funções

Funções de polinômios:

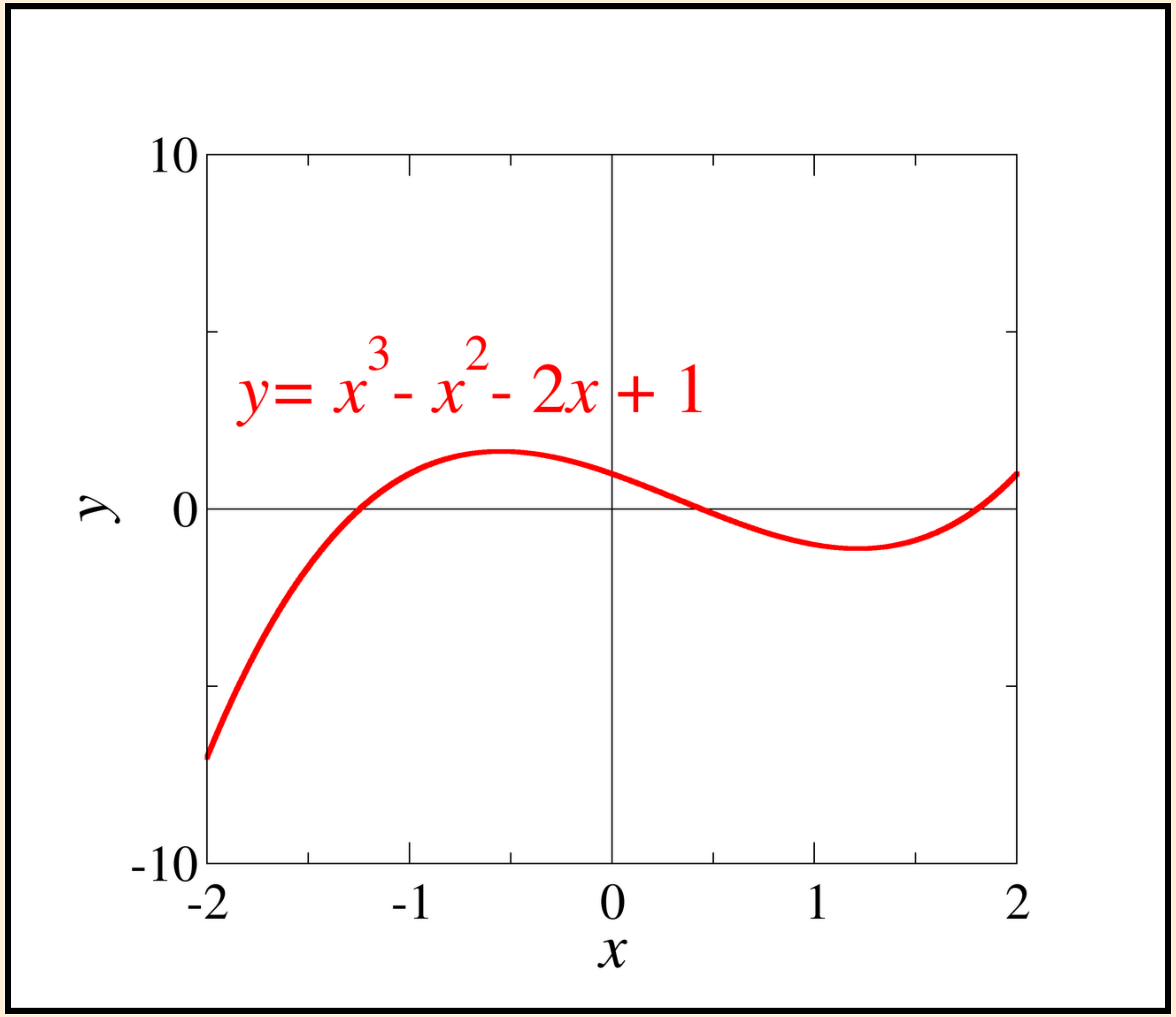
$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

$$n \in \mathbb{N}$$
$$a_i \in \mathbb{R}$$

- Todo polinômio tem domínio $(-\infty, \infty)$
- *n*, o maior expoente, é denominado **grau** do polinômio

Algumas funções

<u>Funções de polinômios:</u>

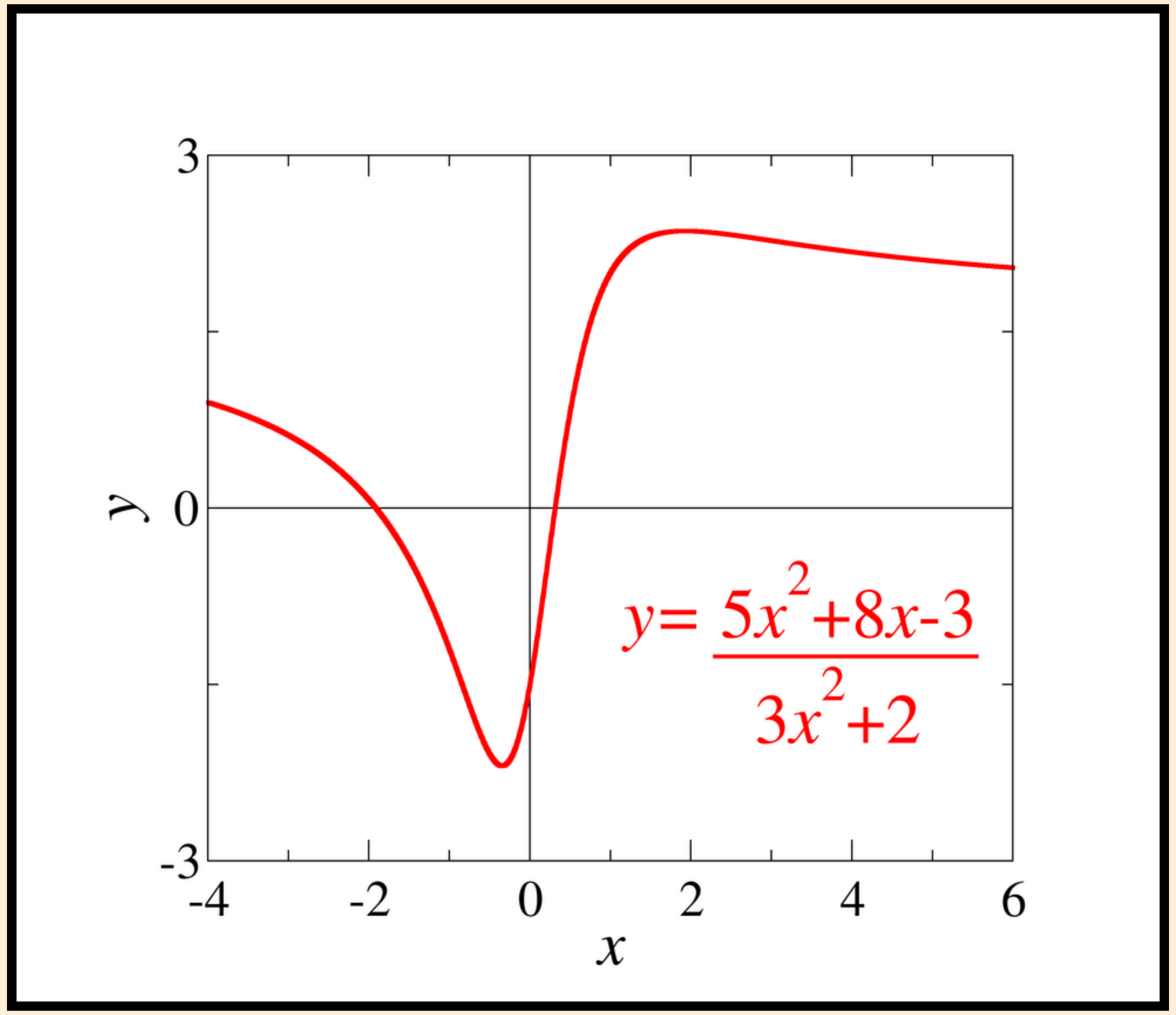


Algumas funções

Funções de racionais:

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}$$

- Razão entre dois polinômios
- **Domínio:** conjunto onde $q(x) \neq 0$

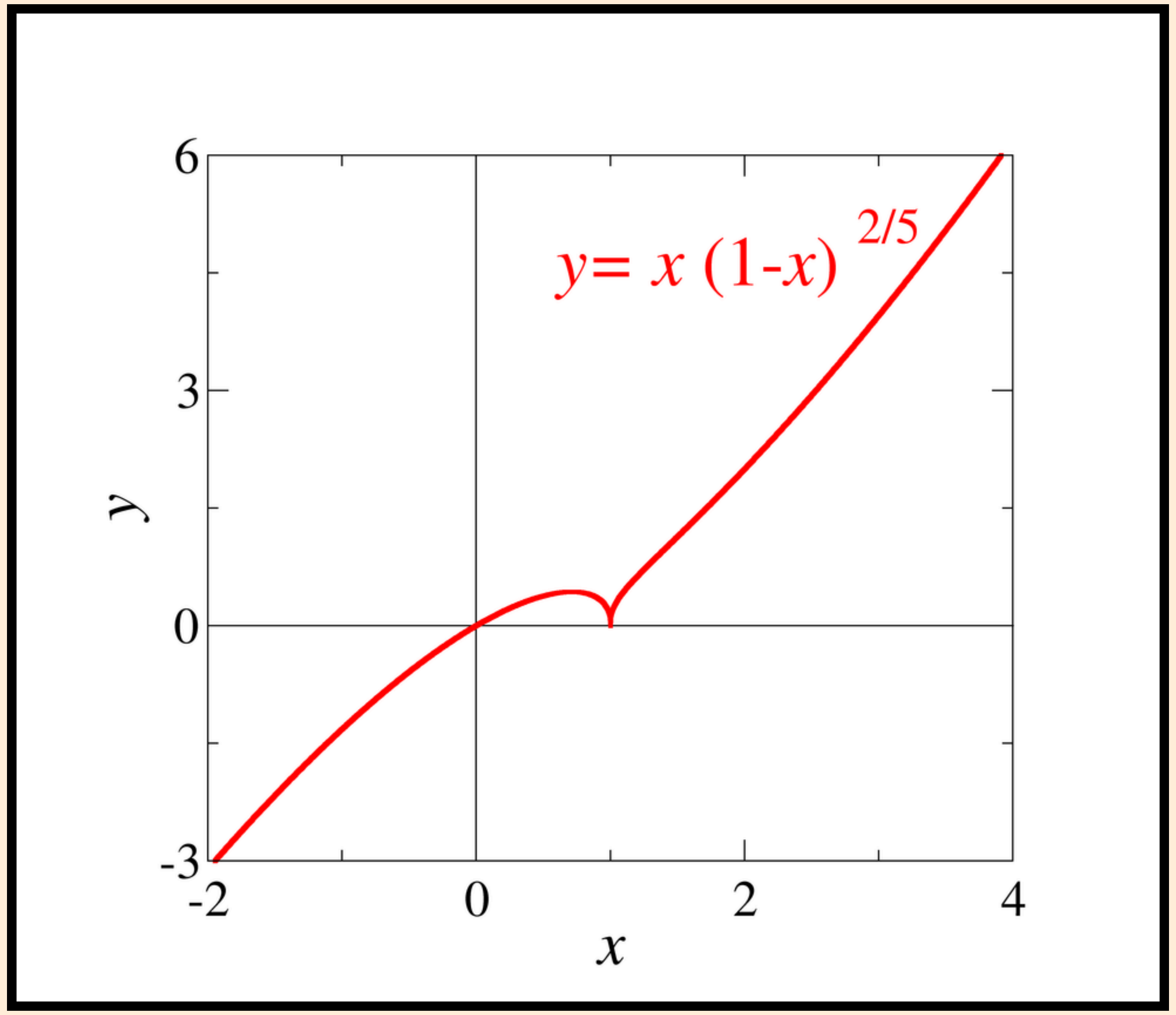


Algumas funções

Funções algébricas:

- Operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) de polinômios

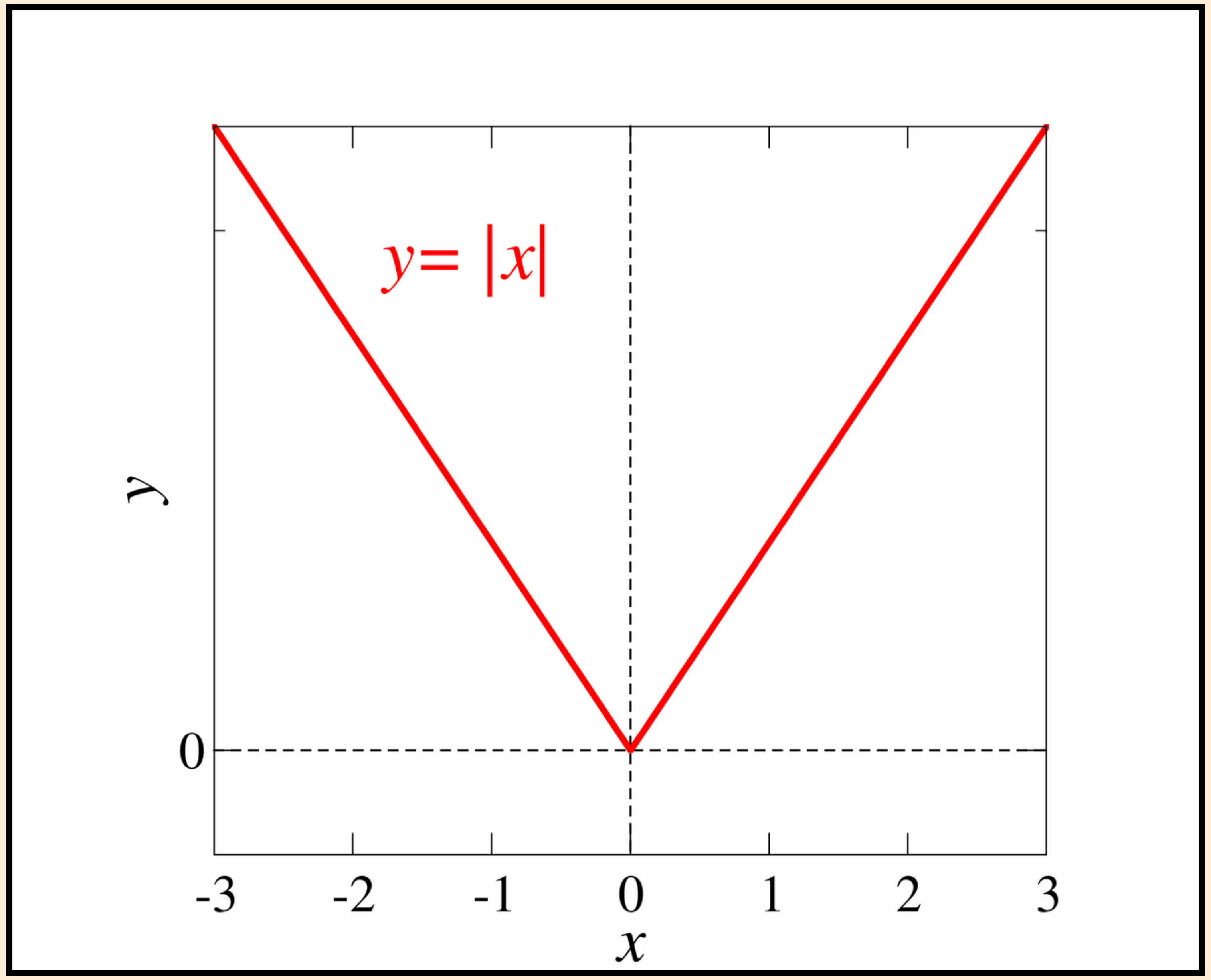
- Funções racionais são exemplos de funções algébricas



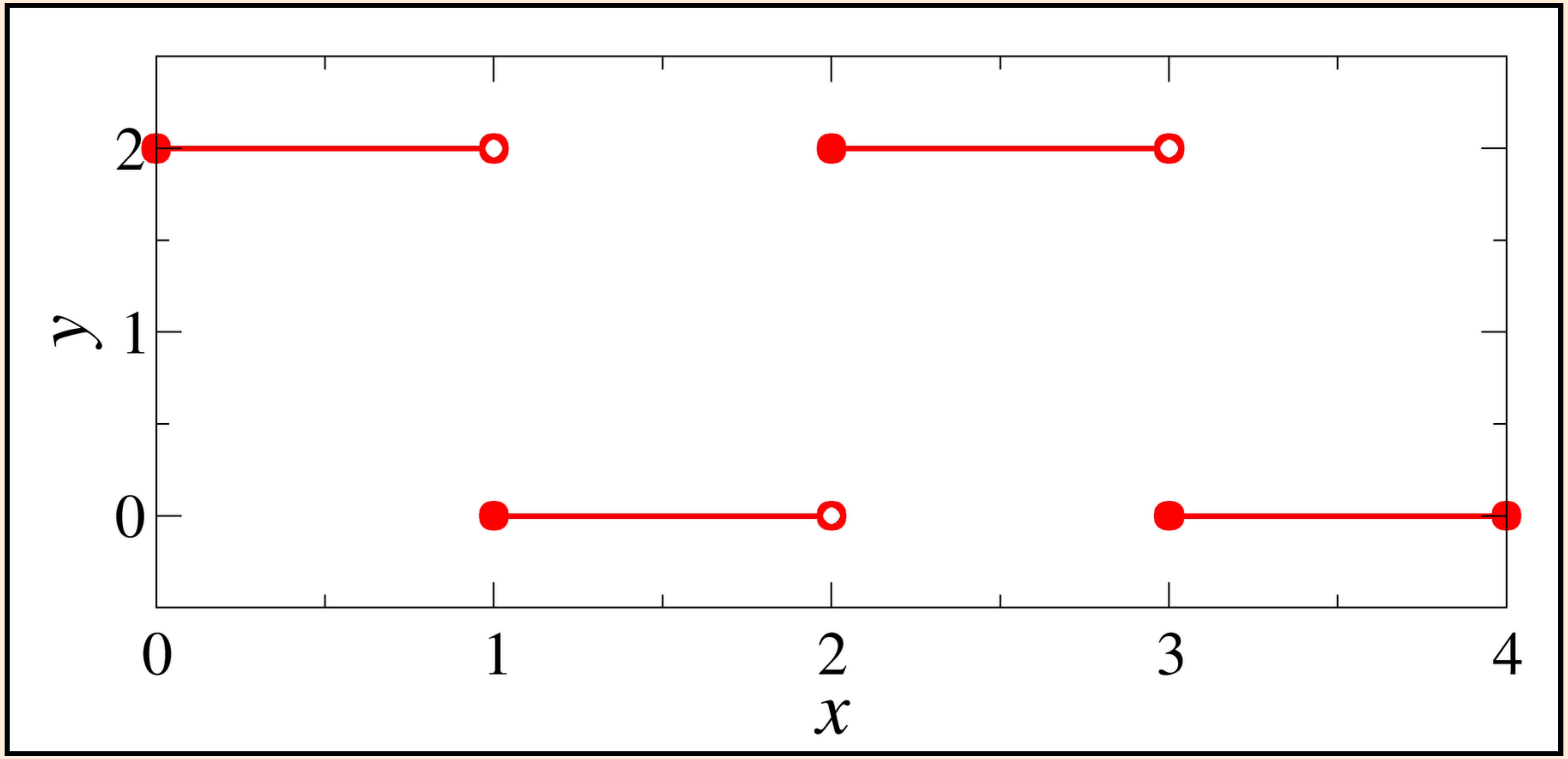
Algumas funções

<u>Funções definidas por partes:</u> fórmulas diferentes em partes diferentes do seu domínio.

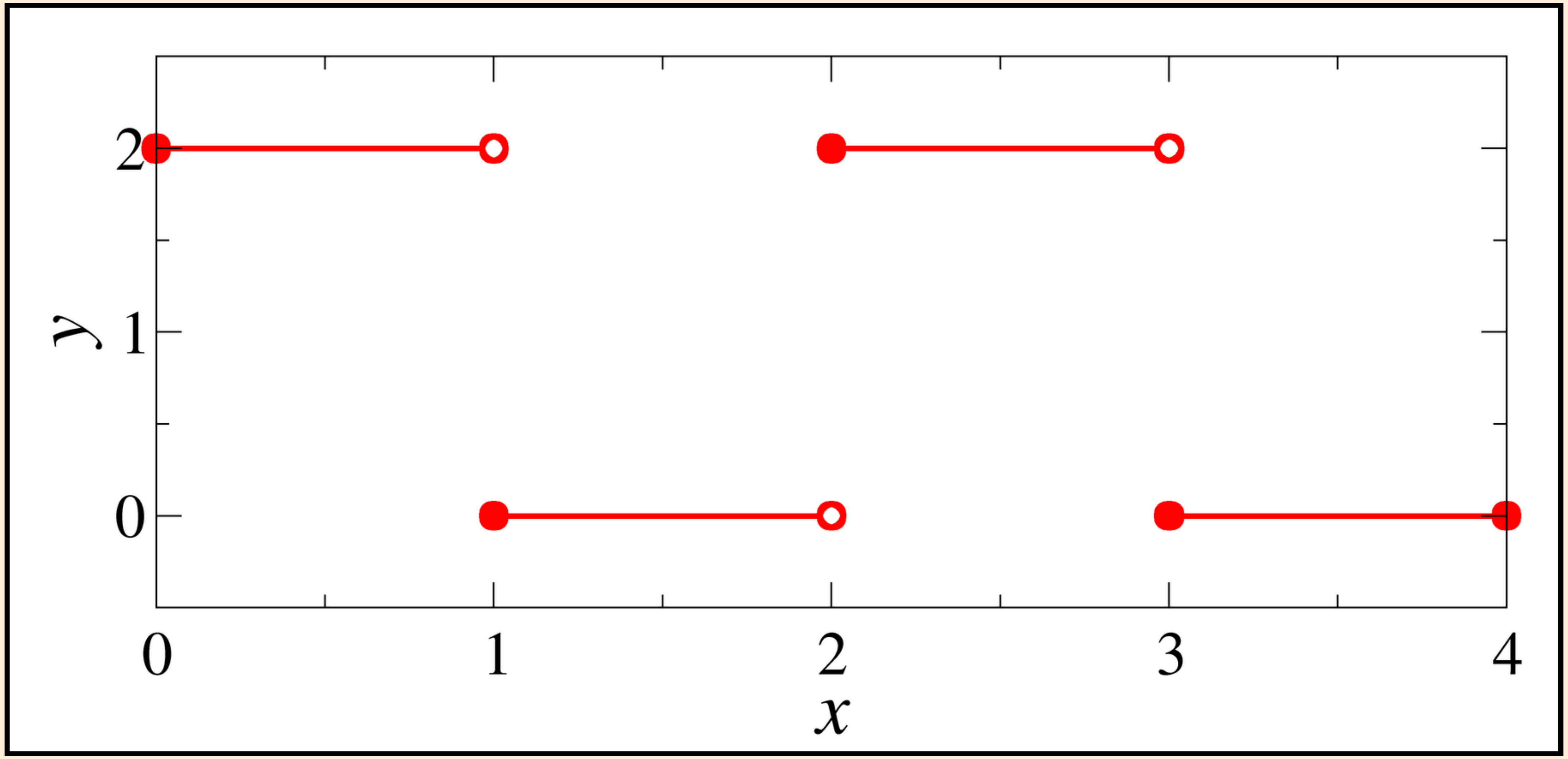
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$



Funções definidas por partes

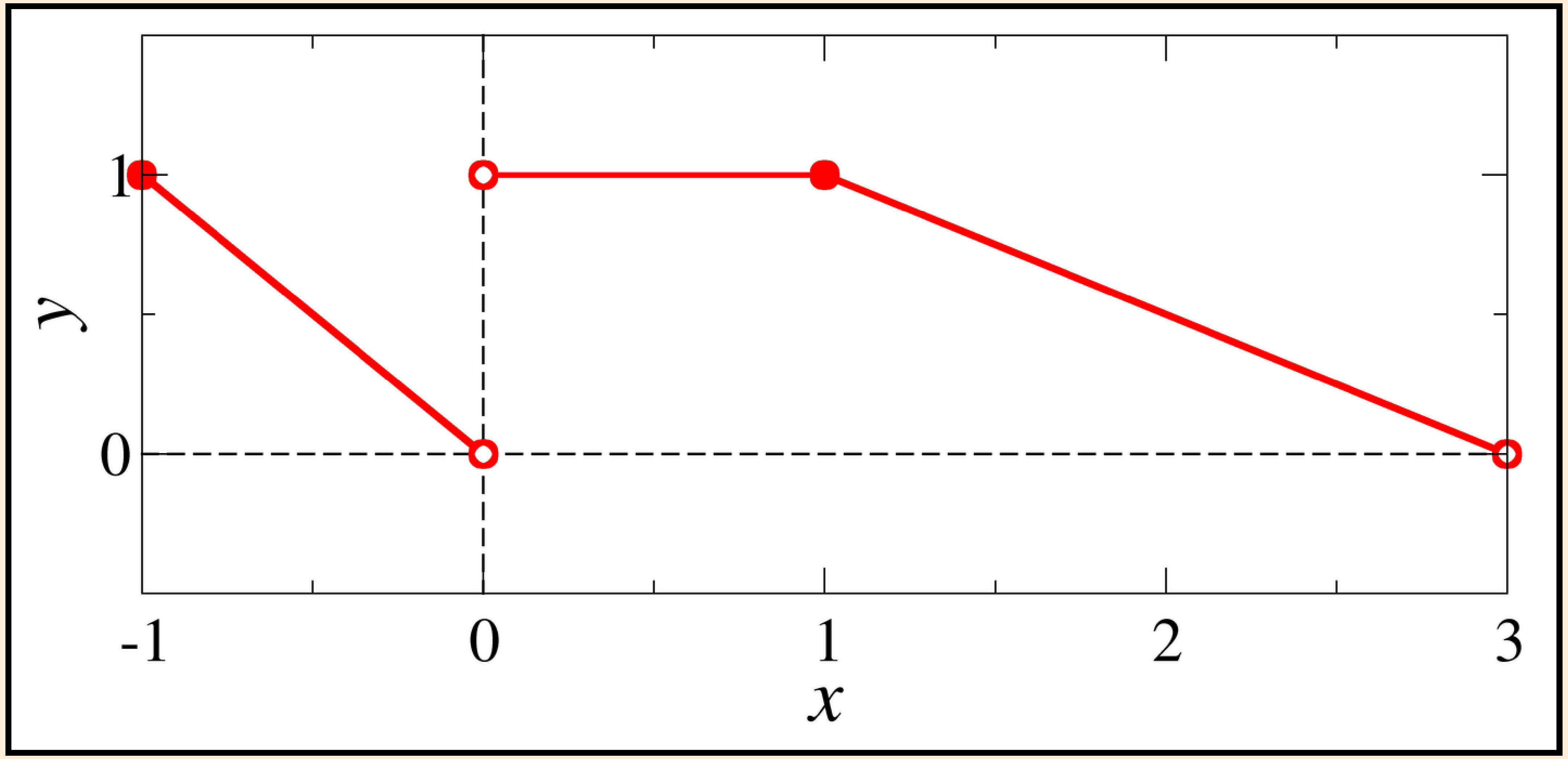


Funções definidas por partes



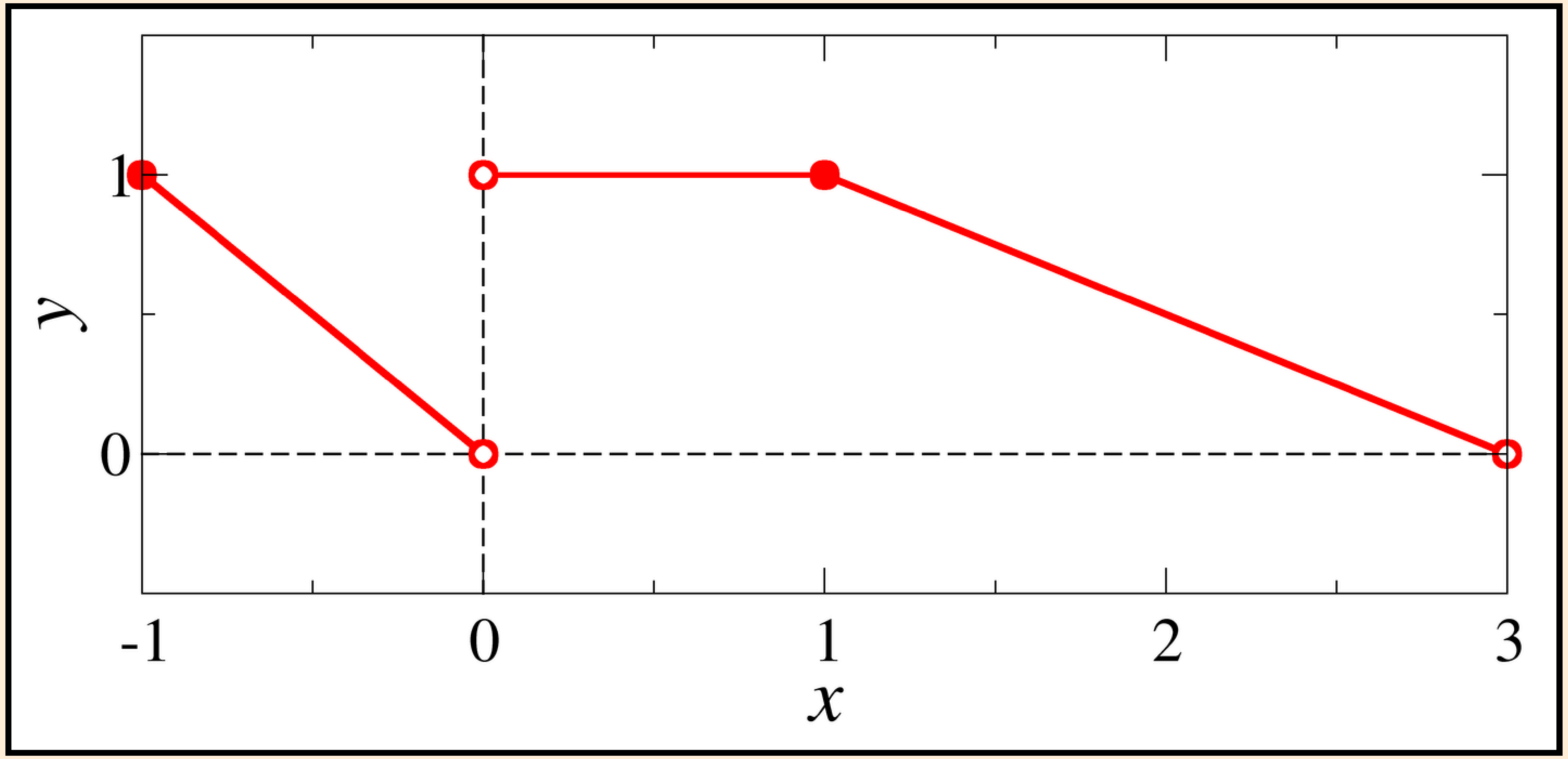
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \text{ e } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x < 2 \text{ e } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Funções definidas por partes



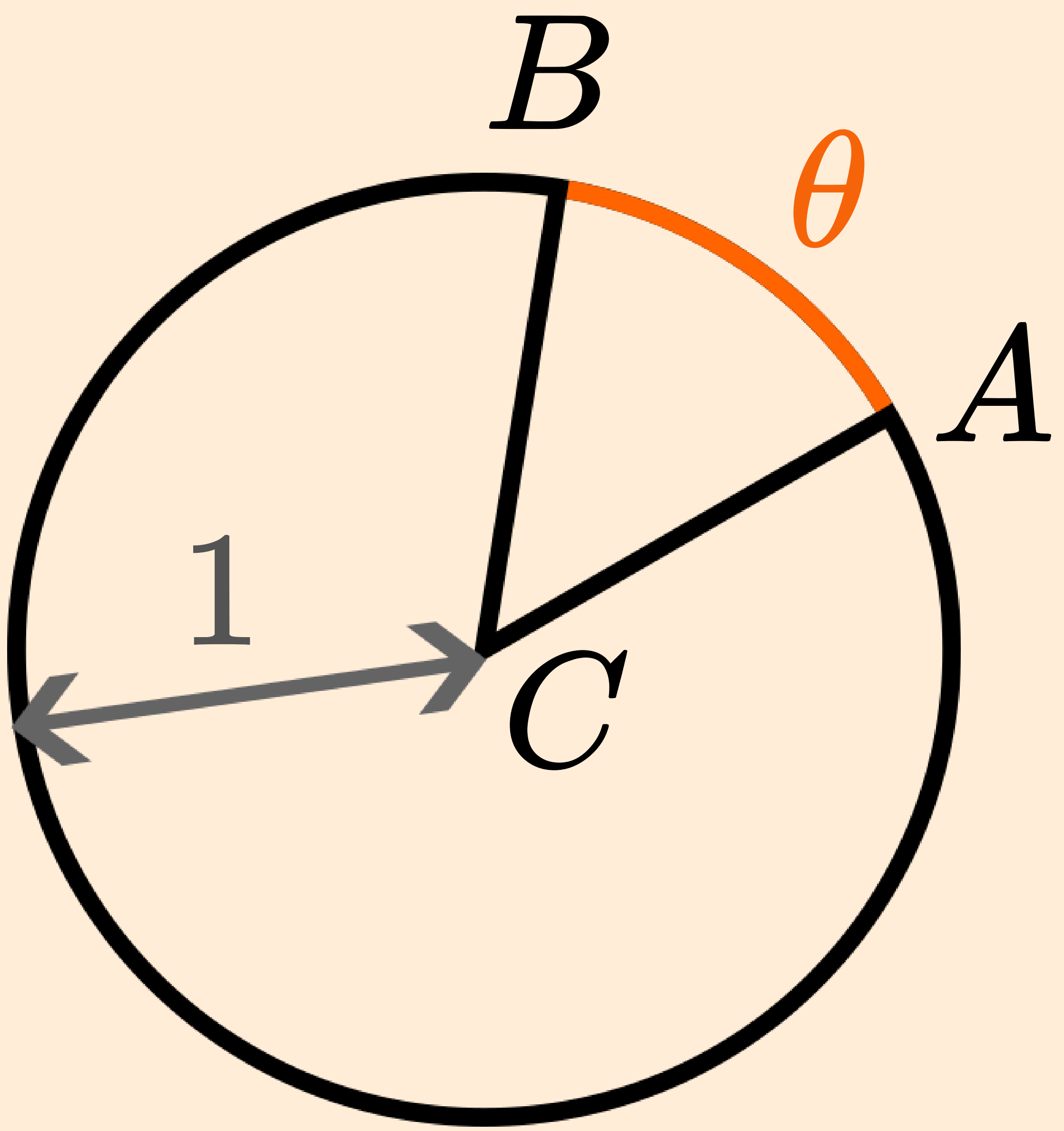
Funções definidas por partes

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}, & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$



Algumas funções

<u>**Radiano**</u>

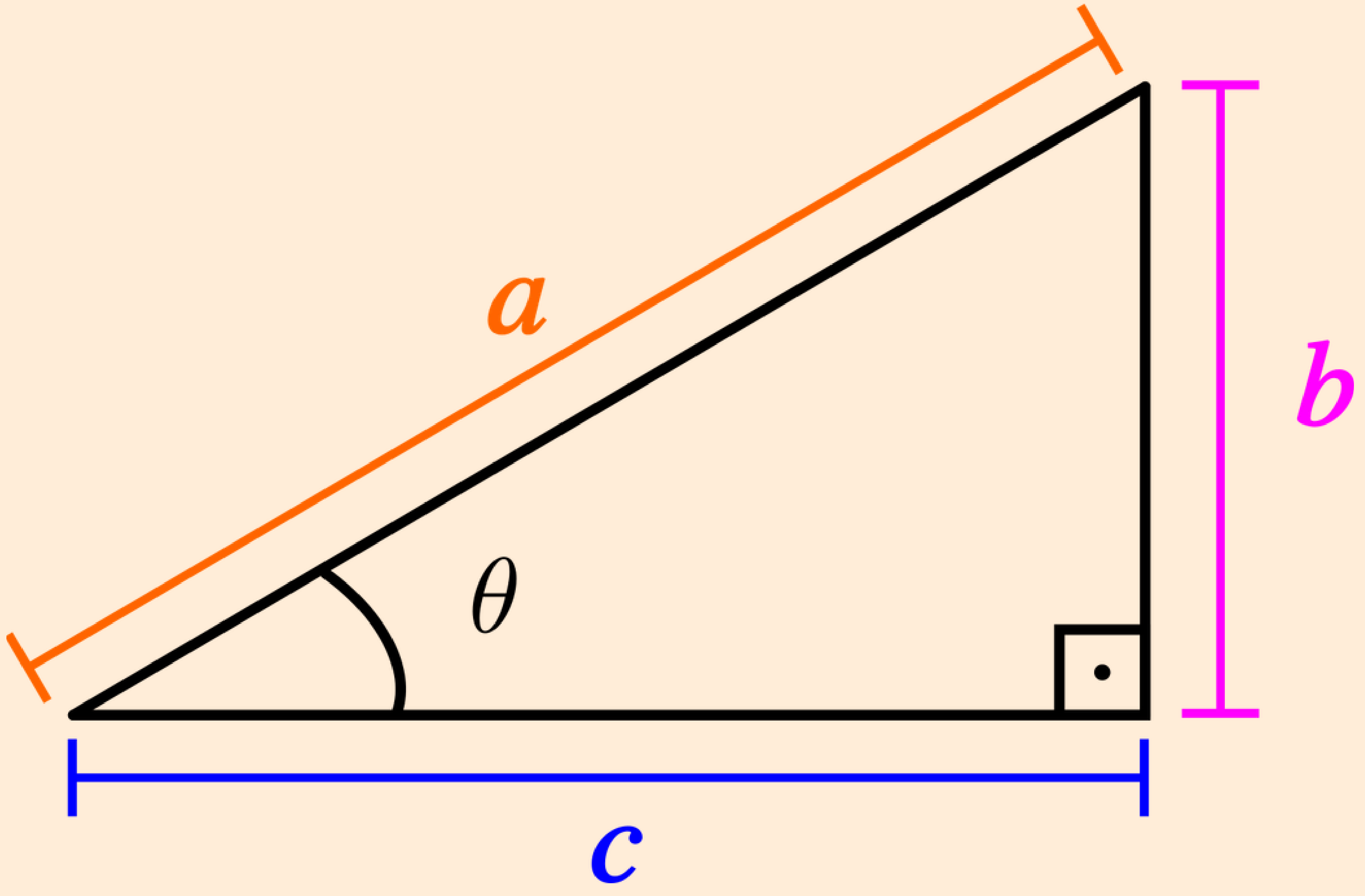


Definição: a medida, em radianos, do ângulo ACB é o comprimento θ do arco AB no círculo unitário de centro C.

Algumas funções

Funções trigonométricas

- Funções trigonométricas básicas: seno e cosseno



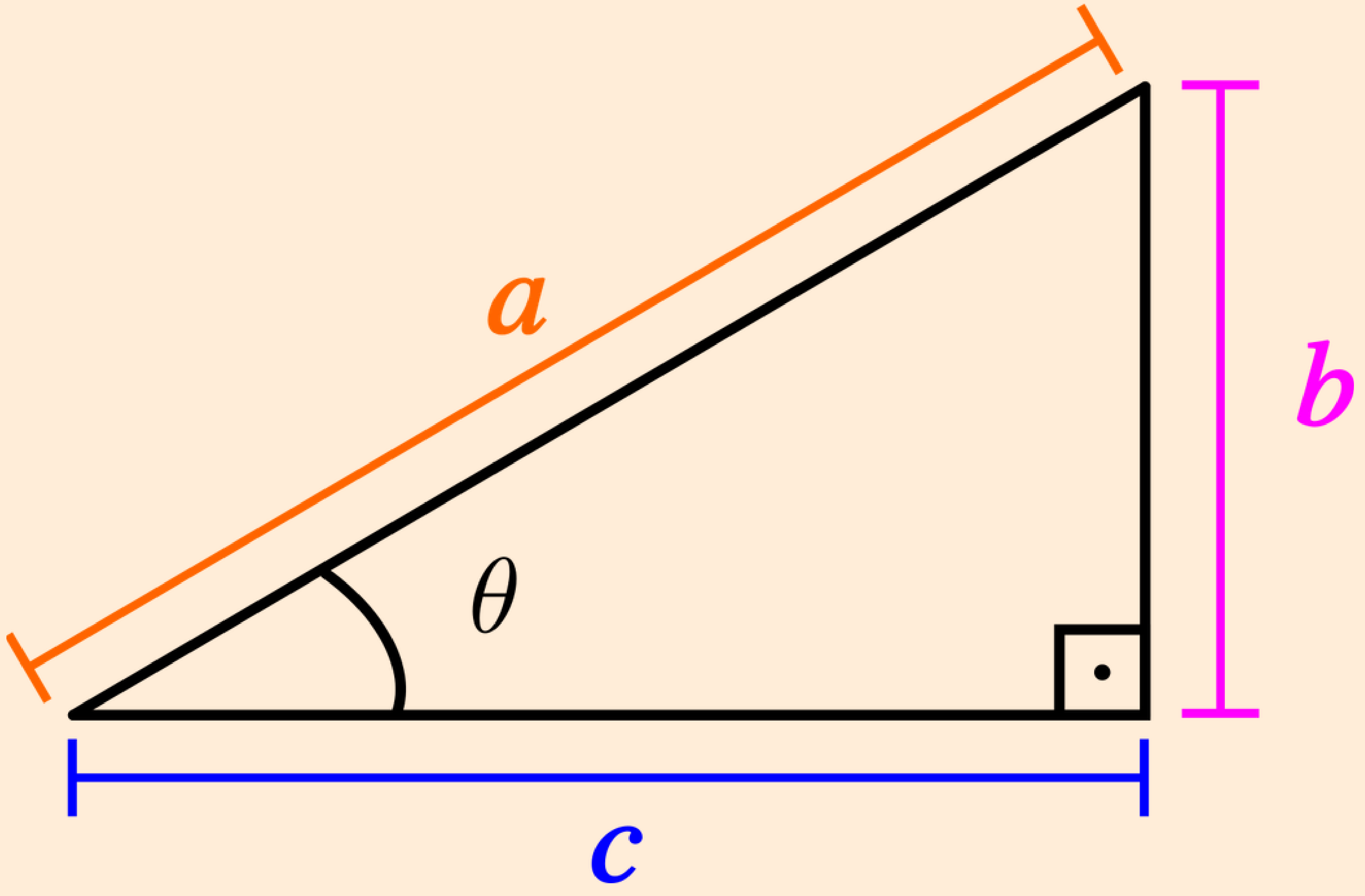
$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a}}$$

Algumas funções

Funções trigonométricas

- Funções trigonométricas básicas: seno e cosseno



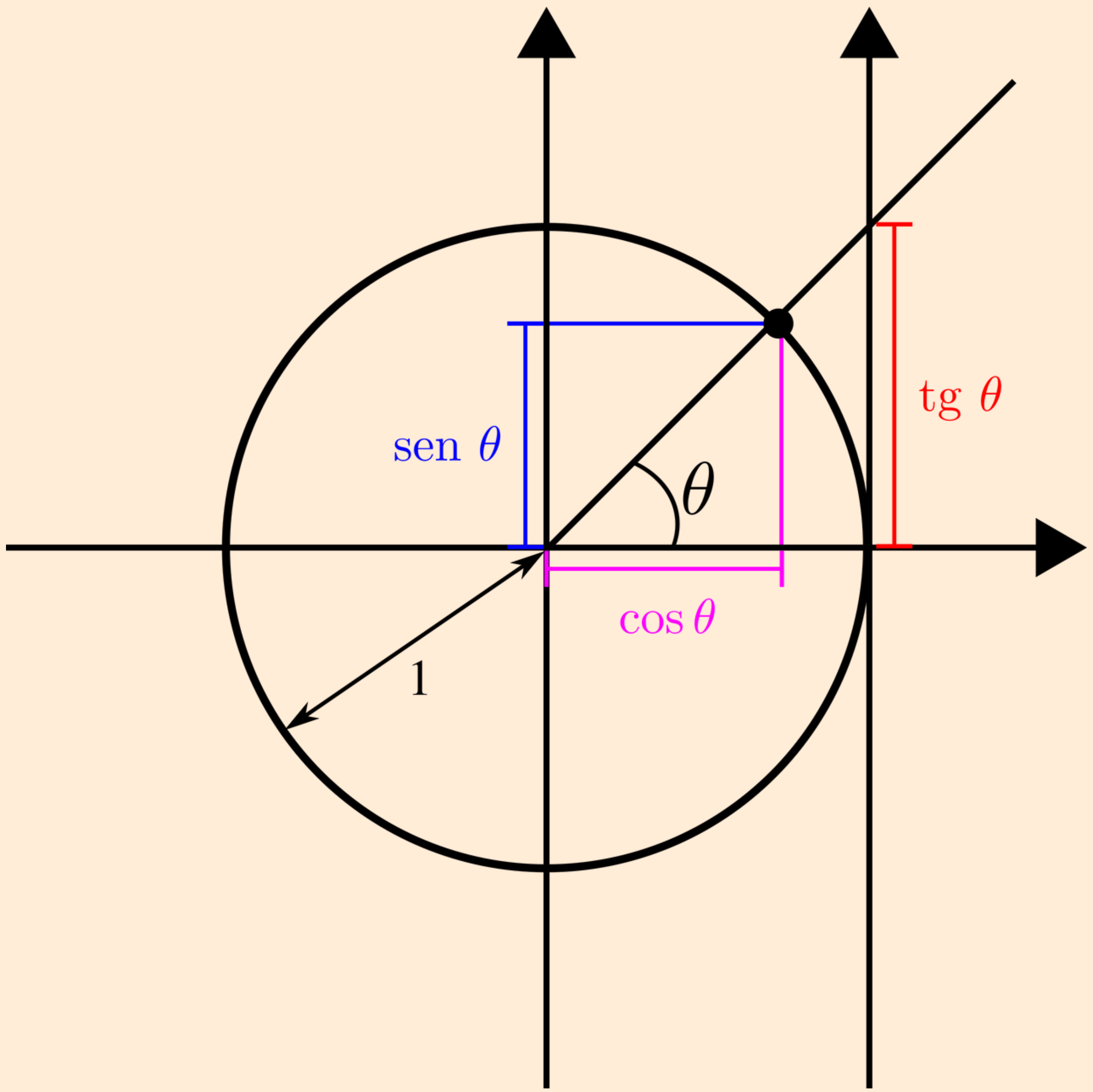
$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a}}$$

Ângulo agudo

Algumas funções

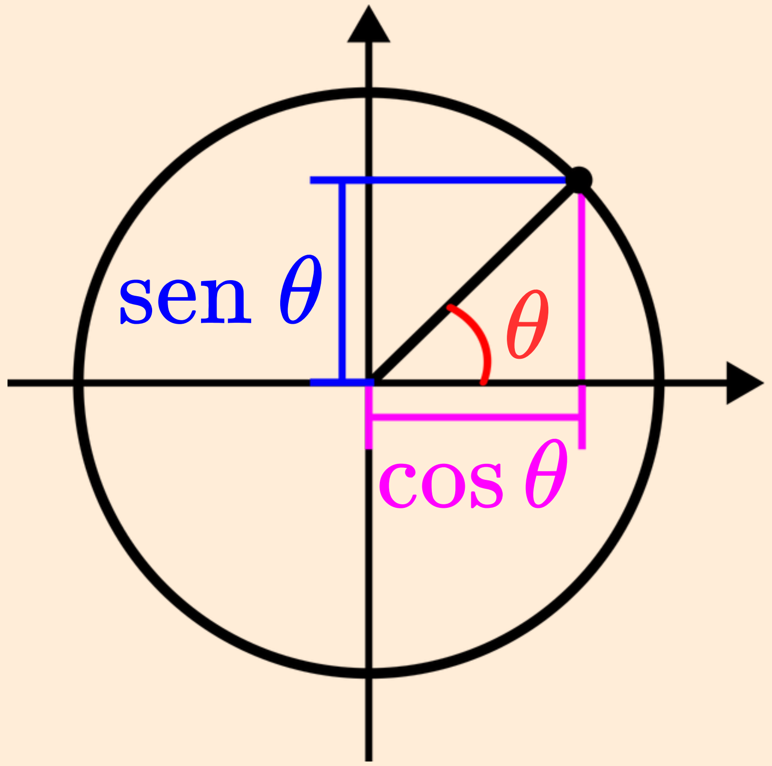
Funções trigonométricas



- As definições das funções seno e cosseno podem ser generalizadas para ângulos obtusos e negativos

Algumas funções

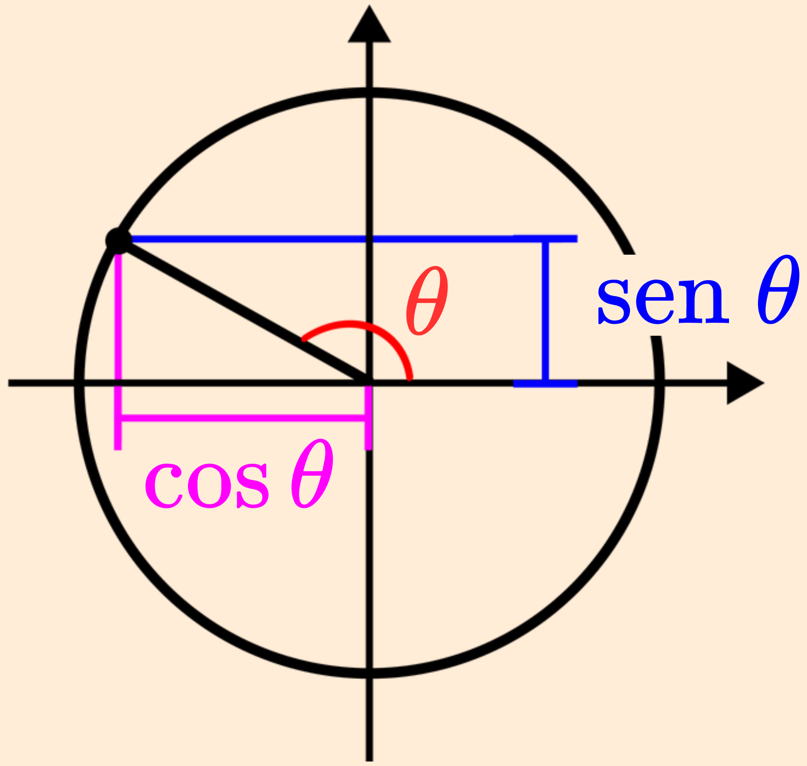
Funções trigonométricas



$\theta > 0$

$\text{sen}\,\theta > 0$

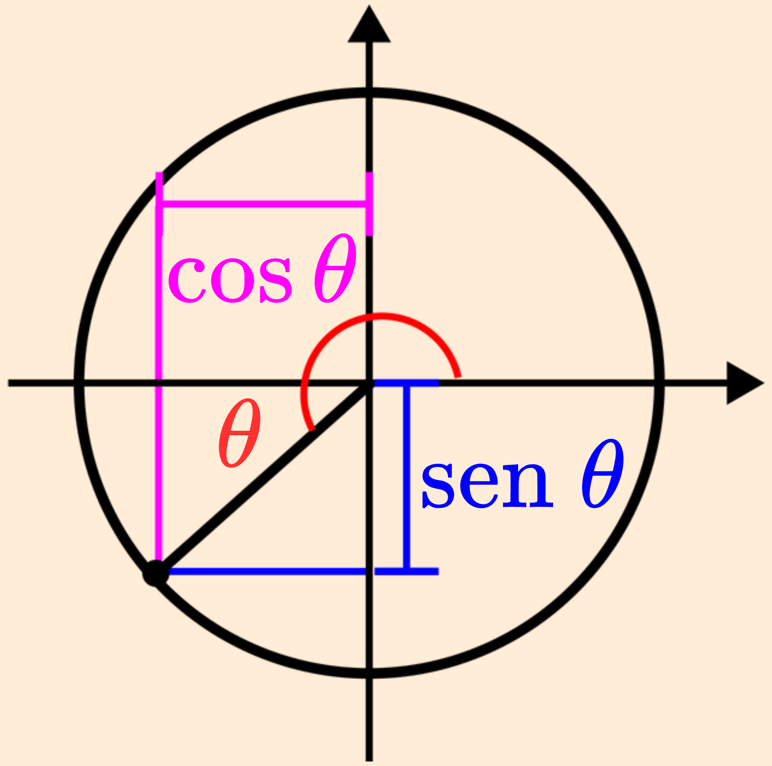
$\cos\theta > 0$



$\theta > 0$

$\text{sen}\,\theta > 0$

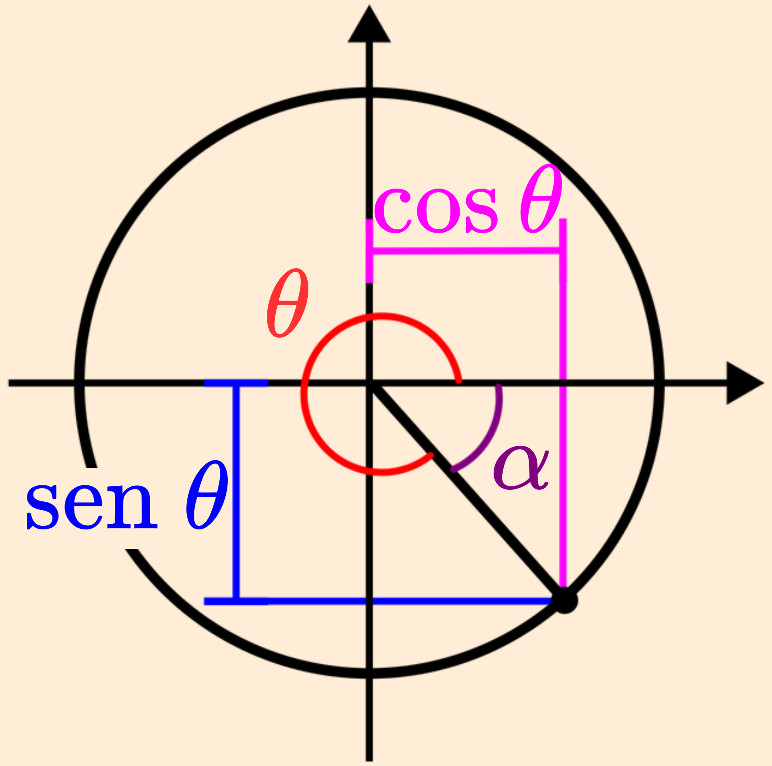
$\cos\theta < 0$



$\theta > 0$

$\text{sen}\,\theta < 0$

$\cos\theta < 0$



$\theta > 0, \alpha < 0$

$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\alpha < 0$

$\cos\theta = \cos\alpha > 0$

Algumas funções

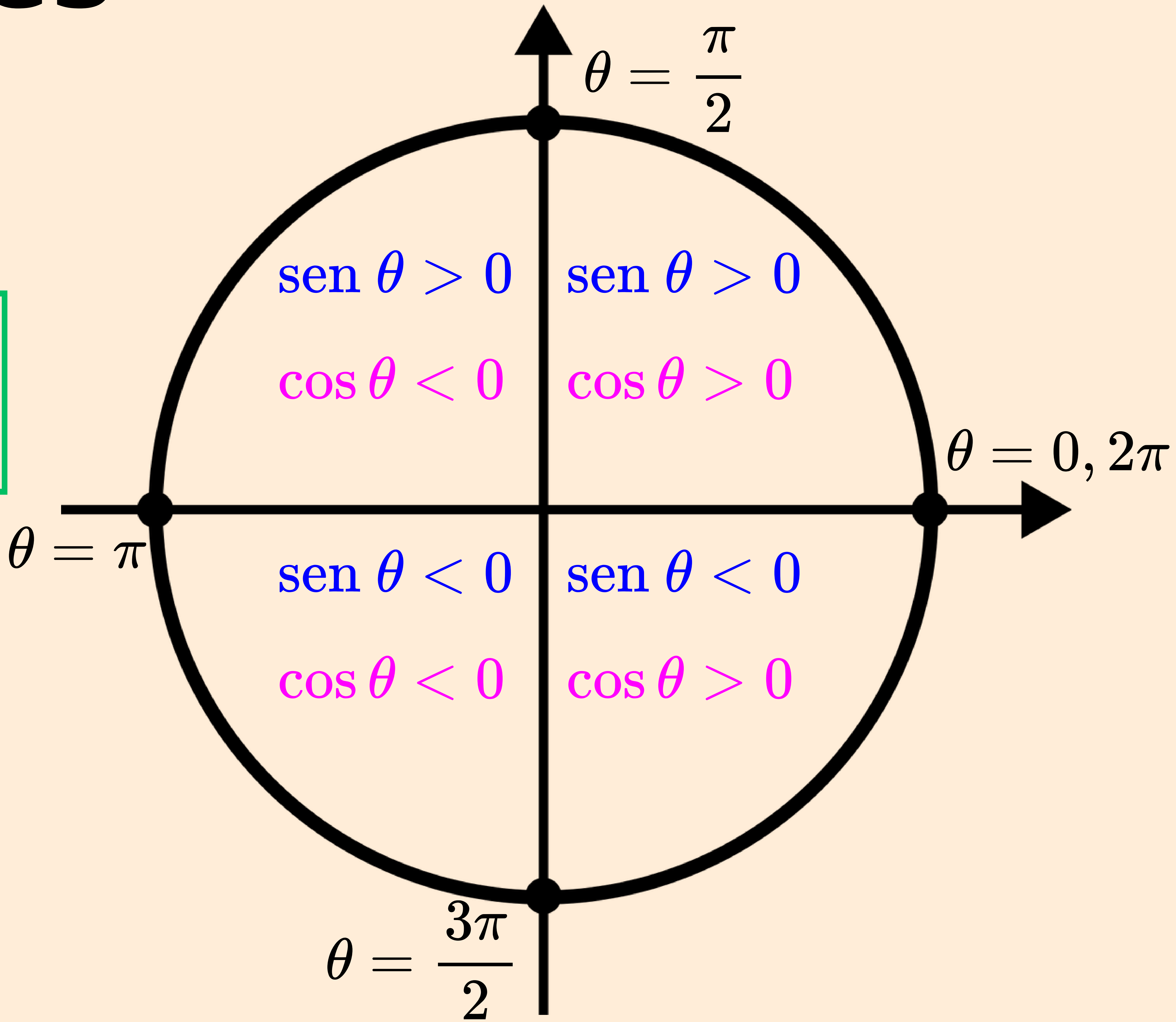
Funções trigonométricas

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

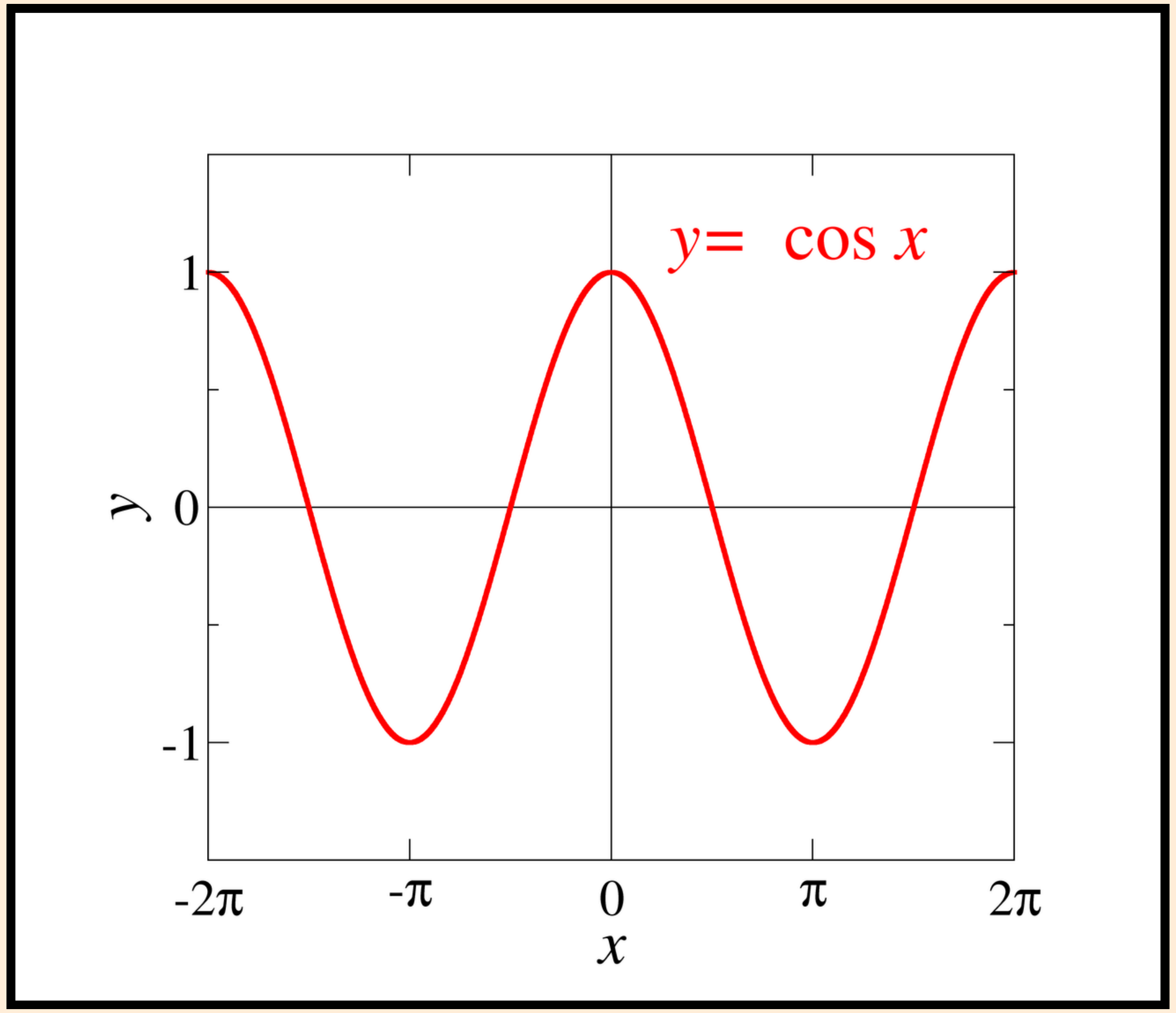
$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

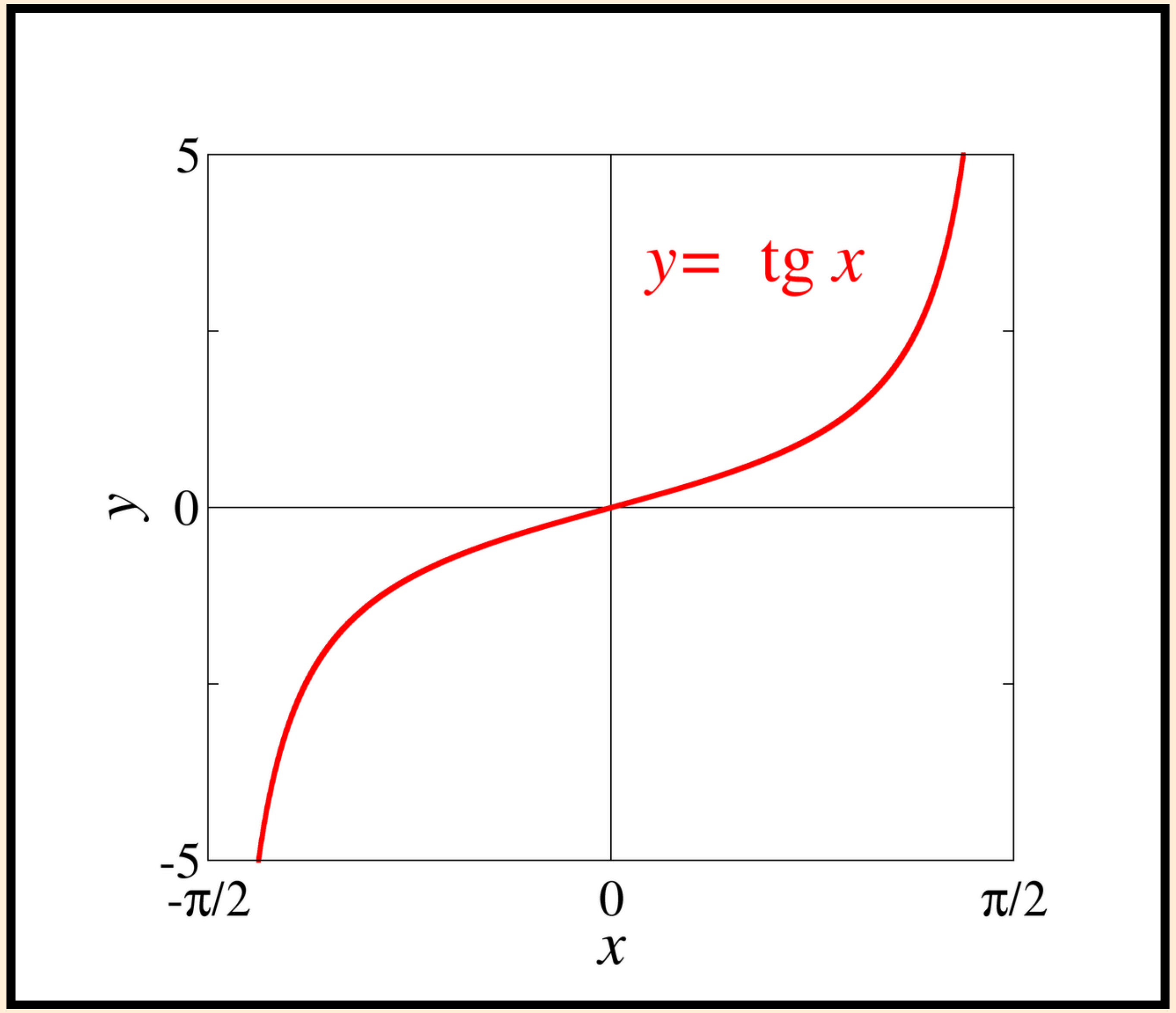
$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$



Algumas funções

Funções trigonométricas





Algumas funções

Funções trigonométricas: algumas relações

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos(\pi + x) =$$

$$(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 - \operatorname{sen} 2t =$$

Algumas funções

Funções trigonométricas: algumas relações

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 - \operatorname{sen} 2t = 1$$

Algumas funções

<u>**Funções exponenciais**</u>

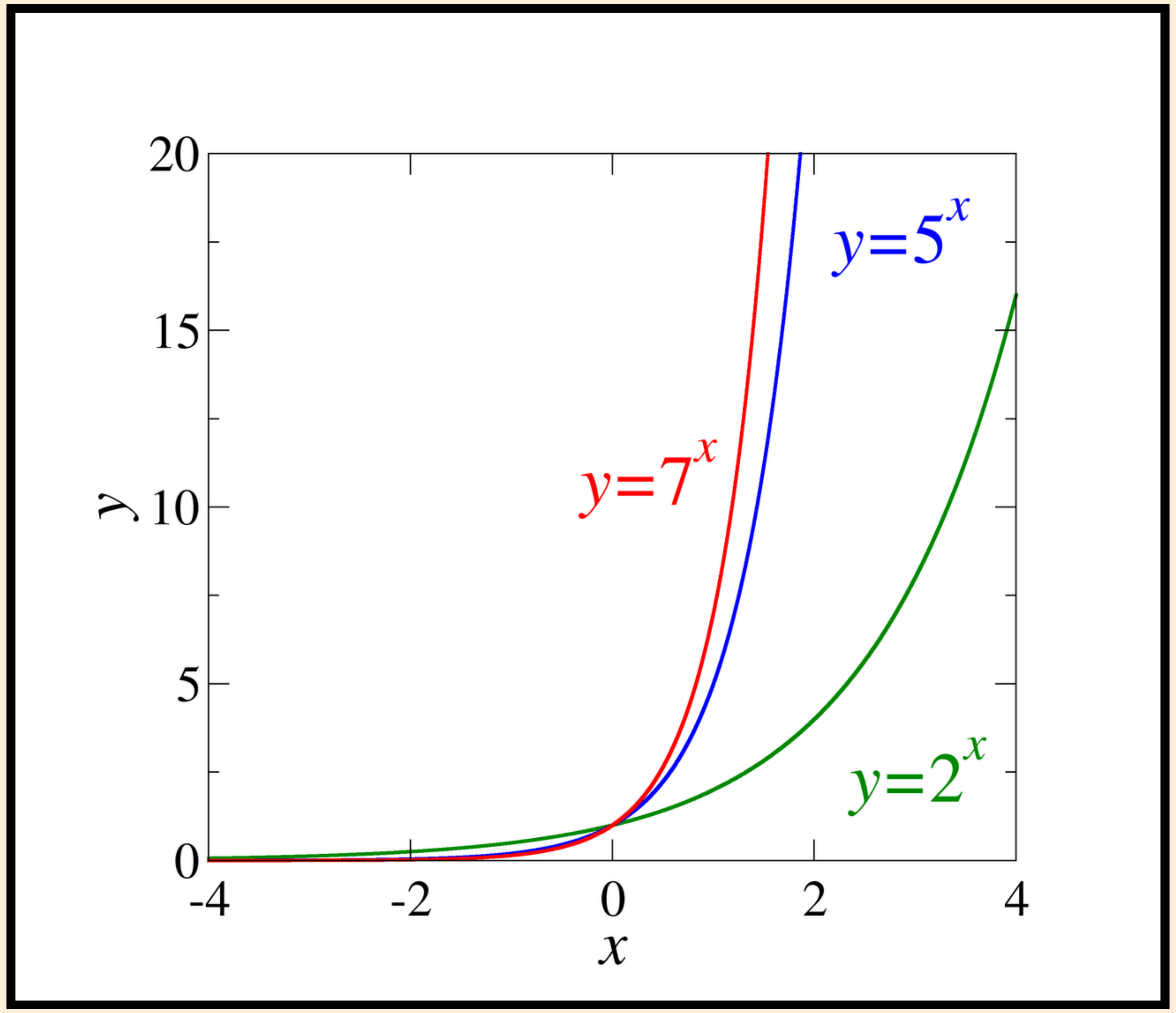
$$\boxed{f(x) = a^x} \qquad a \in \mathbb{R}, a \neq 1$$

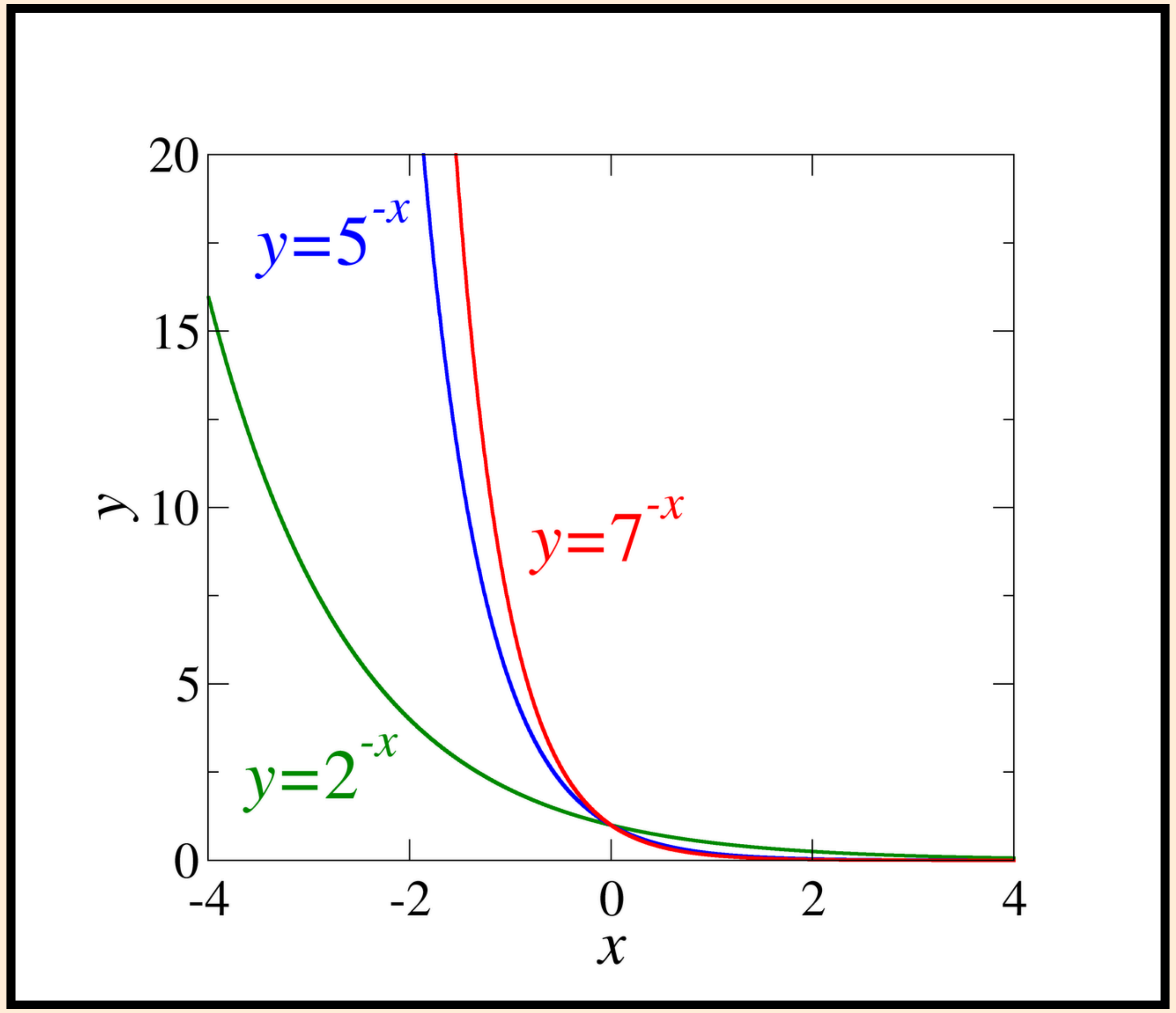
Domínio: $(-\infty, \infty)$

Imagem: $(0, \infty)$

Algumas funções

Funções exponenciais





Algumas funções

<u>**Função exponencial natural**</u>

$$\boxed{f(x) = e^{kx}}$$

$k > 0 \rightarrow$ **crescimento**

$k < 0 \rightarrow$ **decaimento**

Algumas funções

<u>Função exponencial natural</u> - Exemplo prático

Considerando que uma pessoa fez um depósito de 100 reais. A partir disso, este valor está sendo remunerado com juros cumulativos pagos anualmente a uma taxa de 5,5%. Pressupondo que esse foi o único depósito, determinar uma função que descreva a quantia *A* na conta em função de *x* anos transcorridos

Algumas funções

<u>Função exponencial natural</u> - Exemplo prático

Considerando que uma pessoa fez um depósito de 100 reais. A partir disso, este valor está sendo remunerado com juros cumulativos pagos anualmente a uma taxa de 5,5%. Pressupondo que esse foi o único depósito, determinar uma função que descreva a quantia *A* na conta em função de *x* anos transcorridos

$$A(x) = 100 \cdot (1{,}055)^x$$

Algumas funções

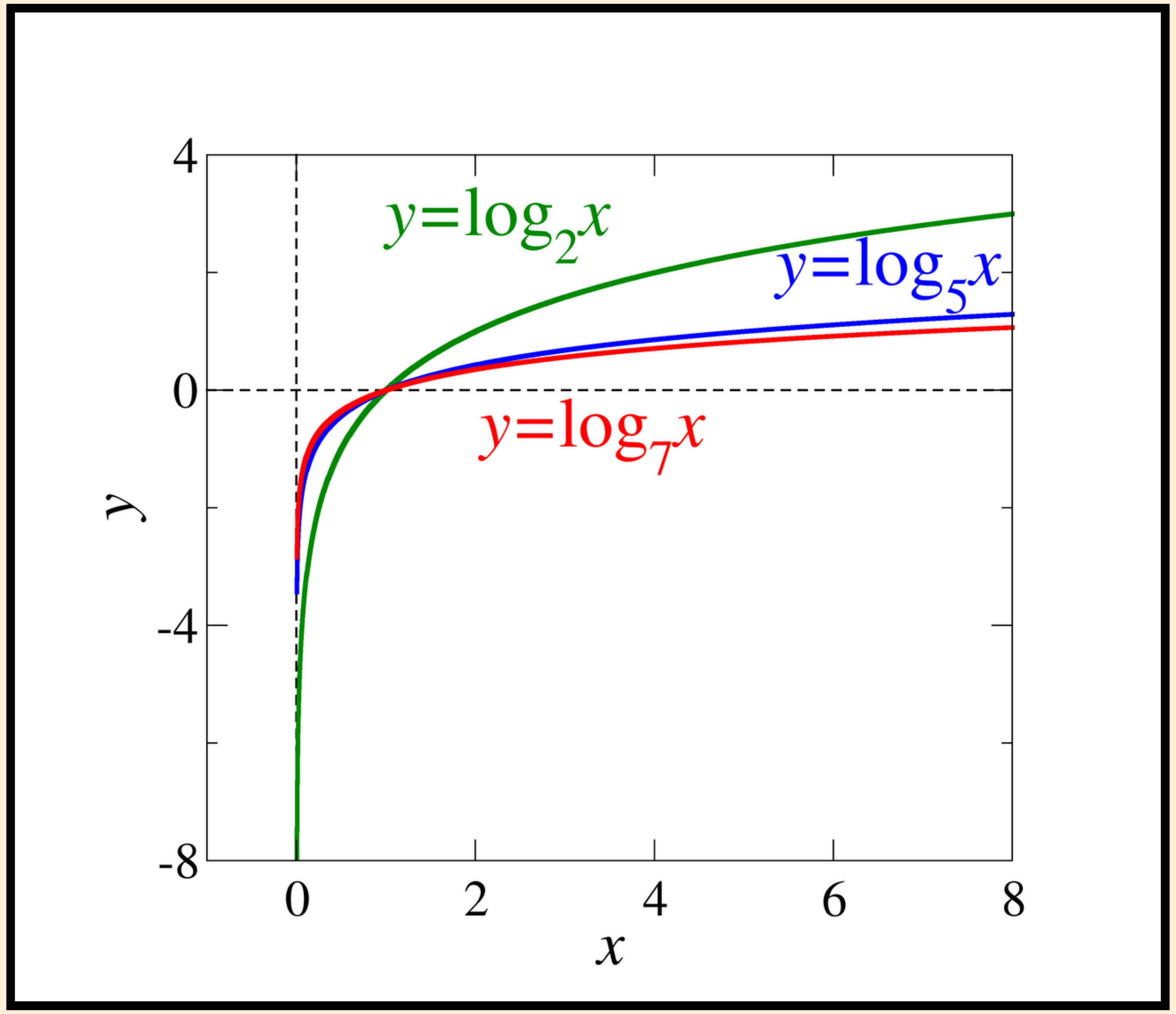
<u>Função logarítmica</u>

$$\boxed{f(x) = \log_a x} \qquad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Domínio: $(0, \infty)$
Imagem: $(-\infty, \infty)$

Algumas funções

<u>**Função logarítmica**</u>



$$f(x) = \log_a x$$

Algumas funções

<u>Função logarítmica:</u> relembrando algumas regras de logaritmos

$$\frac{1}{3}\ln(x+2)^3 + \frac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x^2+3x+2)^2\right]$$

Algumas funções

<u>Função logarítmica:</u> relembrando algumas regras de logaritmos

$$\frac{1}{3}\ln(x+2)^3 + \frac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x^2+3x+2)^2\right] = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$$

Função composta

- A composição é um método de combinadar funções

Definição: Se f e g são funções, a **função composta**, representada por $f \circ g$, é definida por

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

Função composta

Exemplo

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$(f \circ f)(x) =$$

$$(g \circ g)(x) =$$

Função composta

Exemplo

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

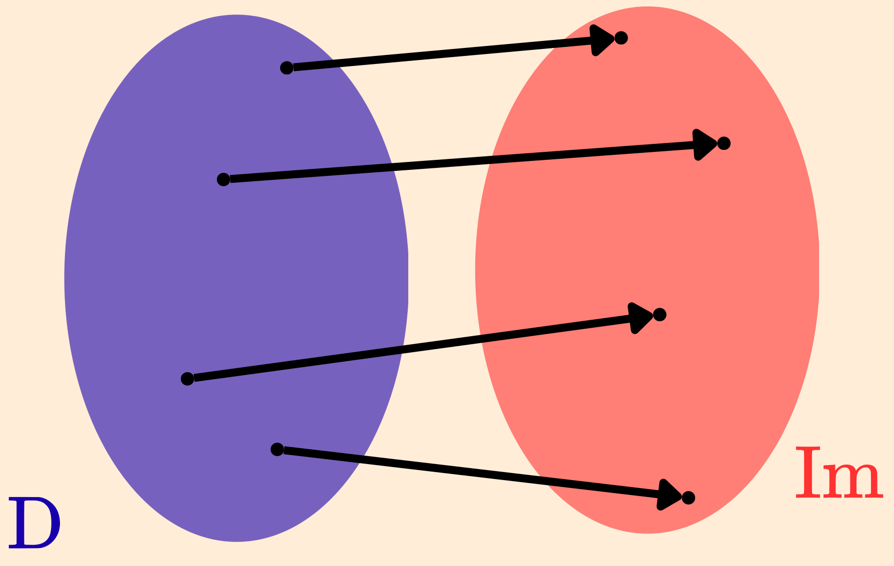
$$(f \circ f)(x) = x^{1/4}$$

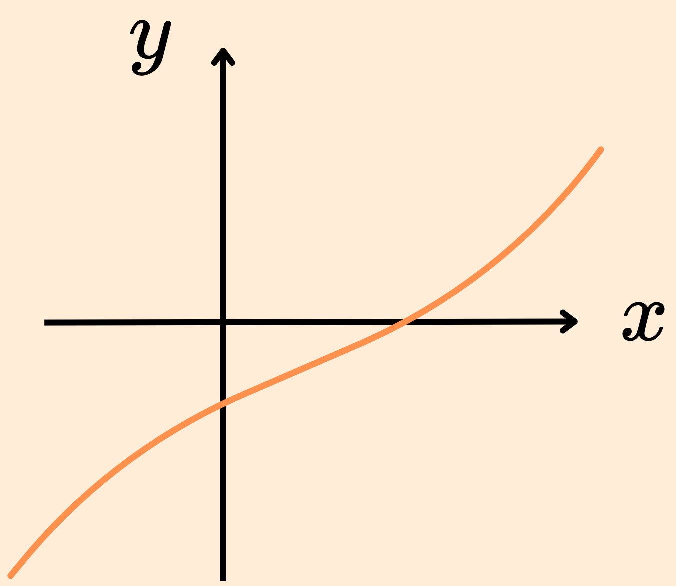
$$(g \circ g)(x) = x + 2$$

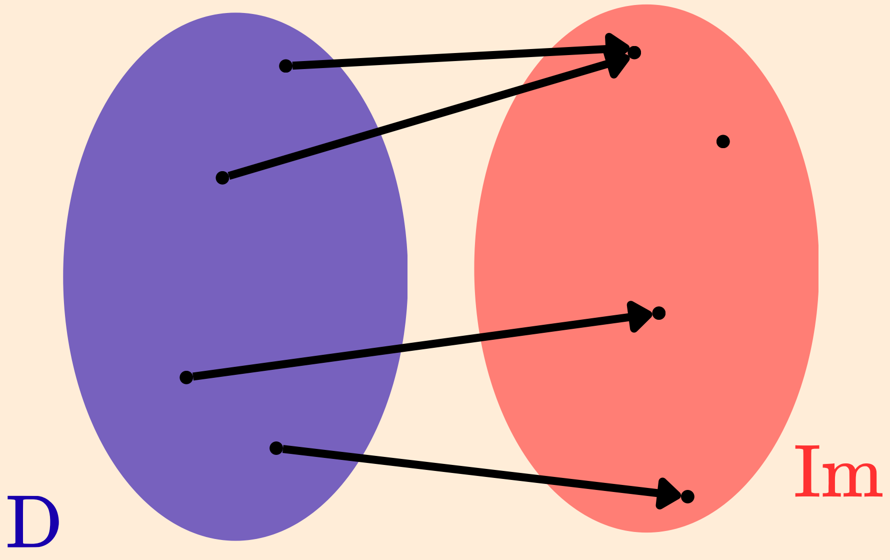
Função inversa

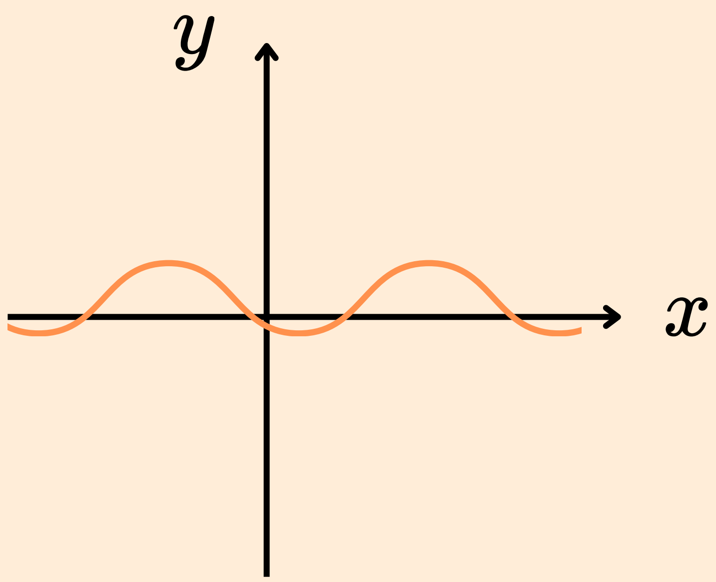
Funções injetoras

Definição: Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D





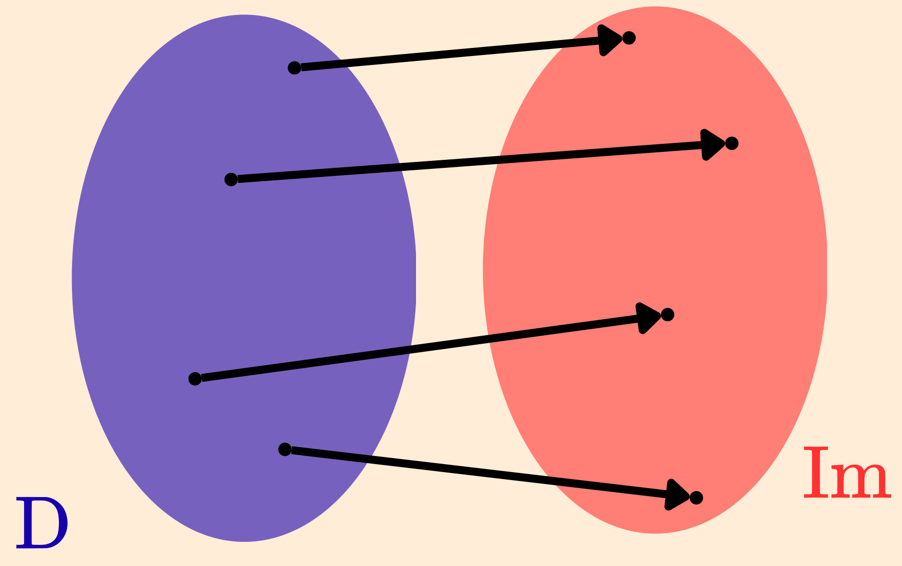


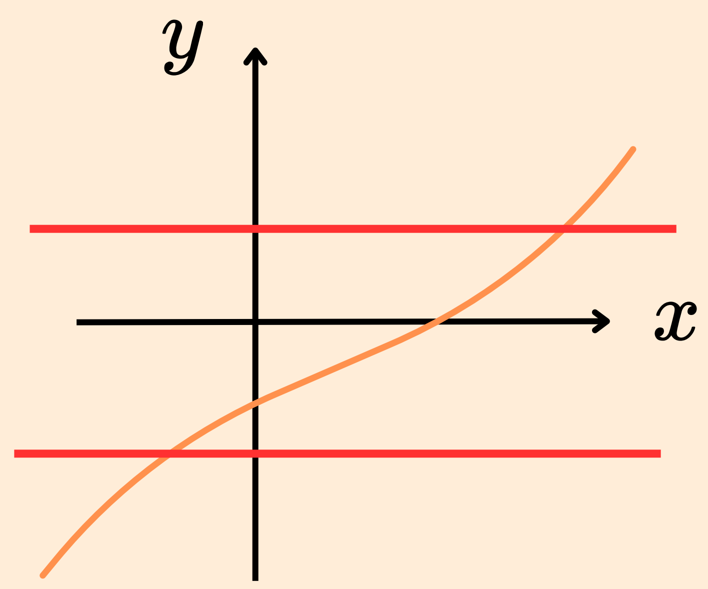


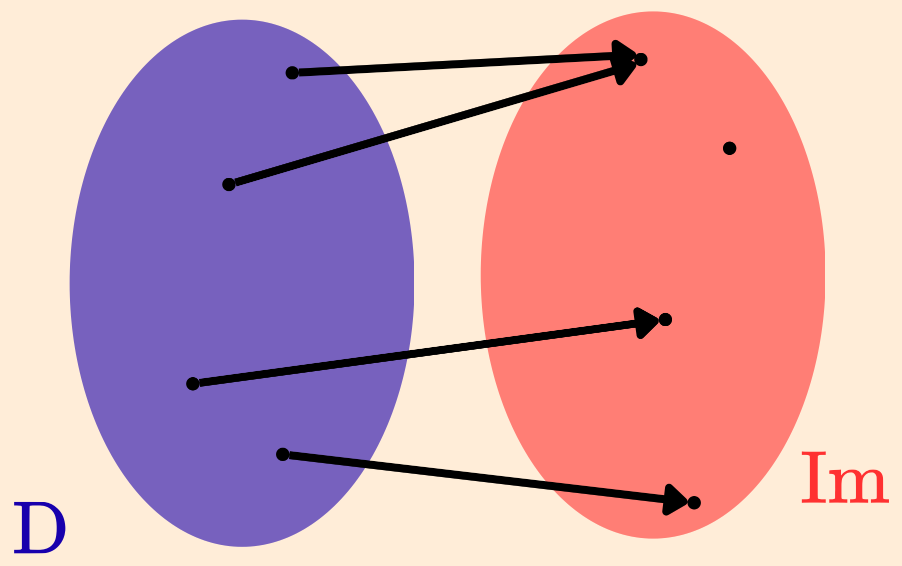
Função inversa

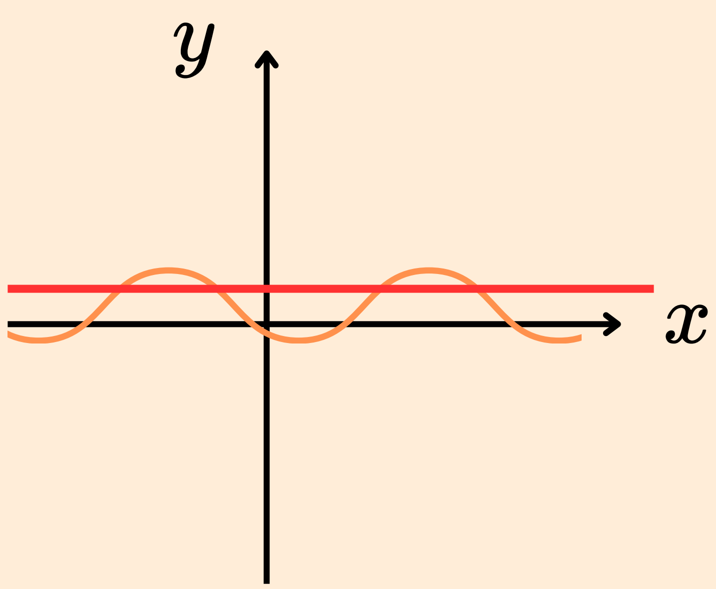
Funções injetoras

Definição: Uma função $f(x)$ é **injetora** no domínio D se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$ em D









Função inversa

Definição: Seja $f(x)$ uma função **injetora** em um domínio D com imagem Im. A **função inversa** f^{-1} é definida por

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{se} \quad f(b) = a$$

Domínio: $\mathrm{Im}\ \mathrm{de}\ f$

Imagem: $\mathrm{D}\ \mathrm{de}\ f$

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

Função inversa

O efeito de compor uma função com a sua inversa resulta no argumento da função (variável independente)

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 \longrightarrow f^{-1}(x) = 2x - 2$$

Função inversa

A função **logarítmica** é a função inversa da função **exponencial**

$$f(x) = \log_a x, \qquad\qquad f^{-1}(x) = a^x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \log_a a^x = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = a^{\log_a x} = x$$

Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \to \mathrm{D}: &\quad [-\pi/2, \pi/2] \\
\cos x \to \mathrm{D}: &\quad [0, \pi] \\
\operatorname{tg} x \to \mathrm{D}: &\quad (-\pi/2, \pi/2) \\
\operatorname{cotg} x \to \mathrm{D}: &\quad (0, \pi) \\
\sec x \to \mathrm{D}: &\quad [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \\
\operatorname{cossec} x \to \mathrm{D}: &\quad [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]
\end{aligned}$$

Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$
\begin{aligned}
y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \\
y = \cos^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \cos y \\
y = \operatorname{tg}^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \operatorname{tg} y \\
y = \operatorname{cotg}^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y \\
y = \sec^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \sec y \\
y = \operatorname{cossec}^{-1} x \quad &\rightarrow \quad x = \operatorname{cossec} y
\end{aligned}
$$

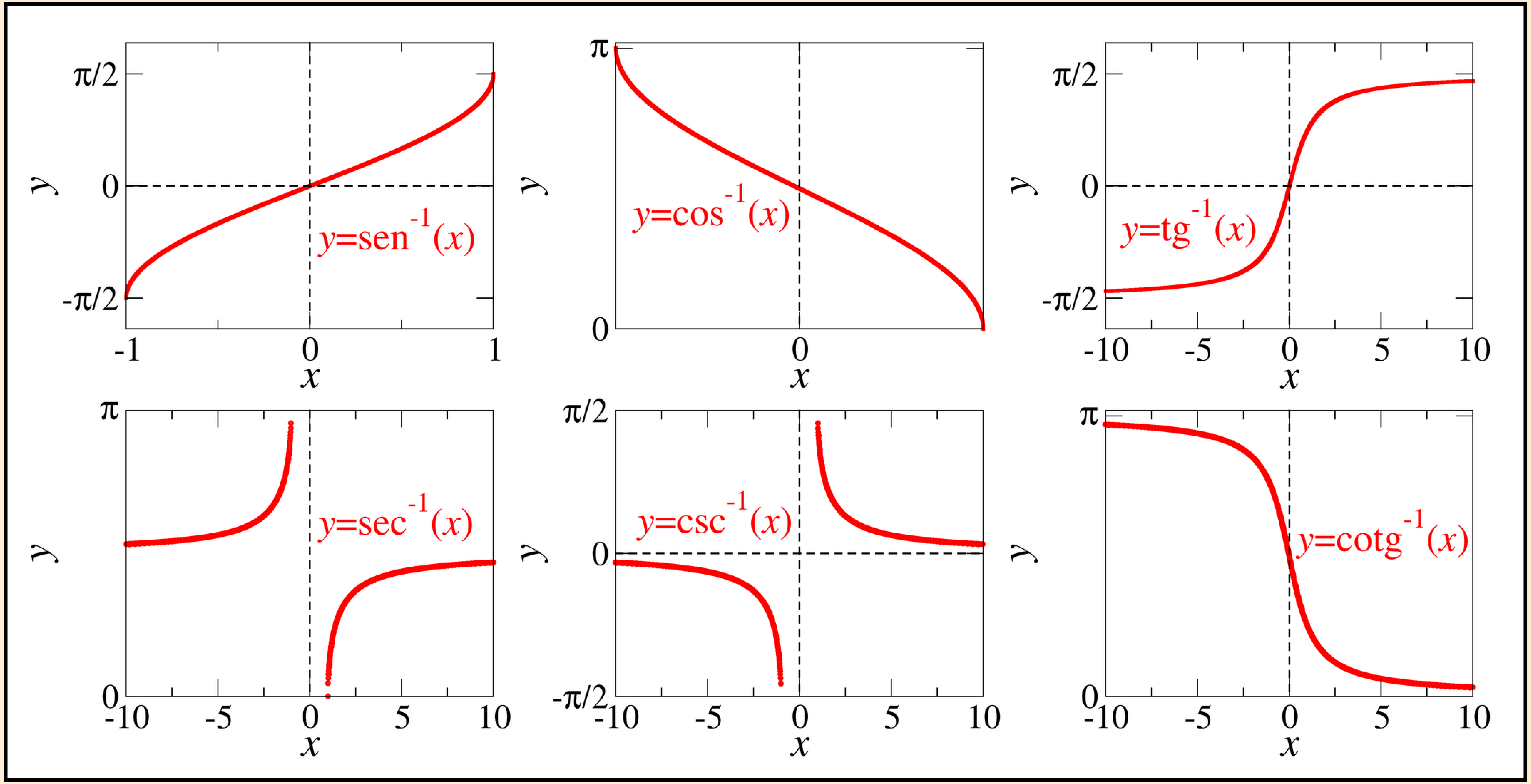
Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$
\begin{aligned}
y &= \operatorname{sen}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{sen} y \\
y &= \cos^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \cos y \\
y &= \operatorname{tg}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{tg} y \\
y &= \operatorname{cotg}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y \\
y &= \sec^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \sec y \\
y &= \operatorname{cossec}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{cossec} y
\end{aligned}
$$

https://www.desmos.com

Funções trigonométricas inversas:



Função inversa

Funções trigonométricas inversas: é necessário restringir os domínios para que as funções sejam injetoras.

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \text{sen}\, y$$

$$\boxed{\cos^{-1} x \neq (\cos x)^{-1}}$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \sec y$$

$$y = \text{cossec}^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \text{cossec}\, y$$

Função inversa

Exemplo

$$z = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}^{-1} x\right)$$

Função inversa

Exemplo

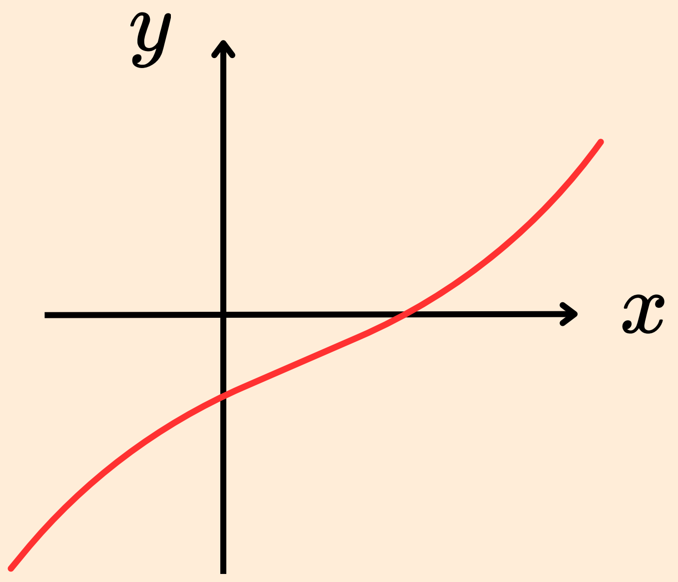
$$z = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}^{-1} x\right) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Propriedades das funções

Função crescente e decrescente

Definição: Uma função definida em um intervalo será **crescente** nesse intervalo se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

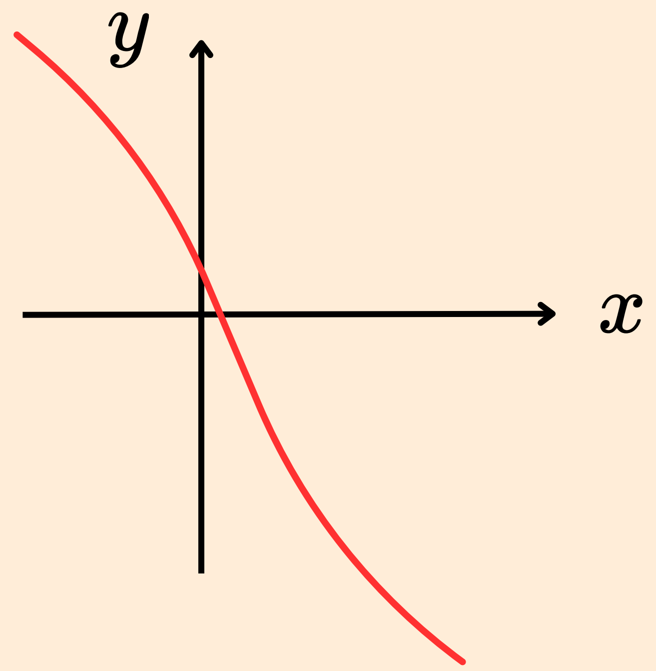


Propriedades das funções

<u>Função crescente e decrescente</u>

Definição: Uma função definida em um intervalo será **decrescente** nesse intervalo se e somente se

$$f(x_1) > f(x_2),\ \text{sempre que } x_1 < x_2$$



Propriedades das funções

Funções pares e ímpares

Definição: Uma função $y = f(x)$ é uma

Função par: $$f(-x) = f(x)$$

Função ímpar: $$f(-x) = -f(x)$$

Propriedades das funções

<u>Funções periódicas</u>

Definição: Uma função $y = f(x)$ é periódica se existir um número real p tal que

$$\boxed{f(x+p) = f(x)}$$

Translação de gráficos

Translação vertical $y = f(x) + k$

$k > 0:$ **Translação para cima**

$k < 0:$ **Translação para baixo**

Translação horizontal $y = f(x + h)$

$h > 0:$ **Translação para a esquerda**

$h < 0:$ **Translação para a direita**

Translação de gráficos

Translação vertical

$$y = f(x) + k$$

Translação horizontal

$$y = f(x + h)$$