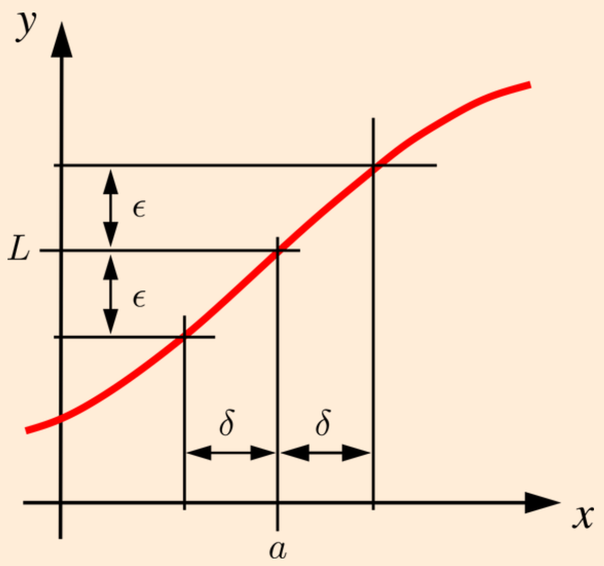
Limites



https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1_1S2026

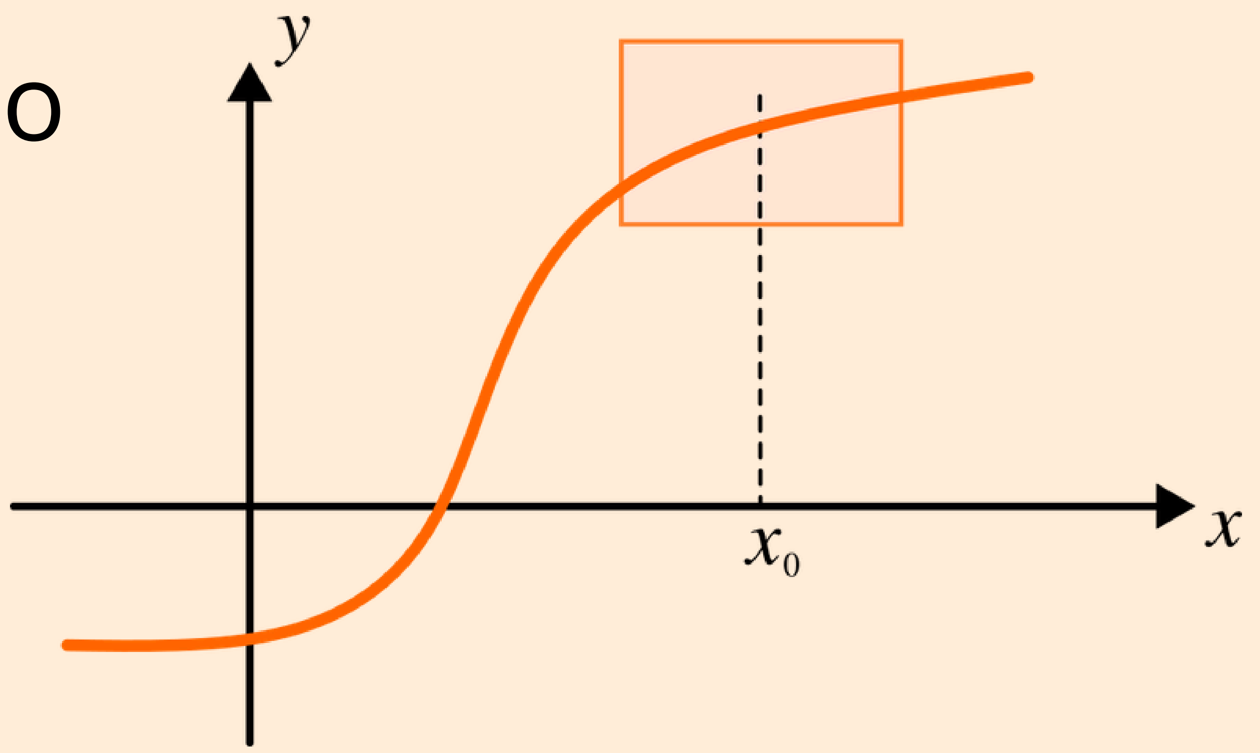
Referências:

- THOMAS, George B. Cálculo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. Um curso de cálculo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

Limites

Em muitas aplicações do Cálculo, estamos interessados em valores de uma função $f(x)$ que estejam próximos de um número x_0 mas que não necessariamente iguais a x_0

De fato, há muitos casos em que o ponto não está nem no domínio da função, isto é, $f(x_0)$ não está definida



Limites

Por exemplo, vamos considerar a função

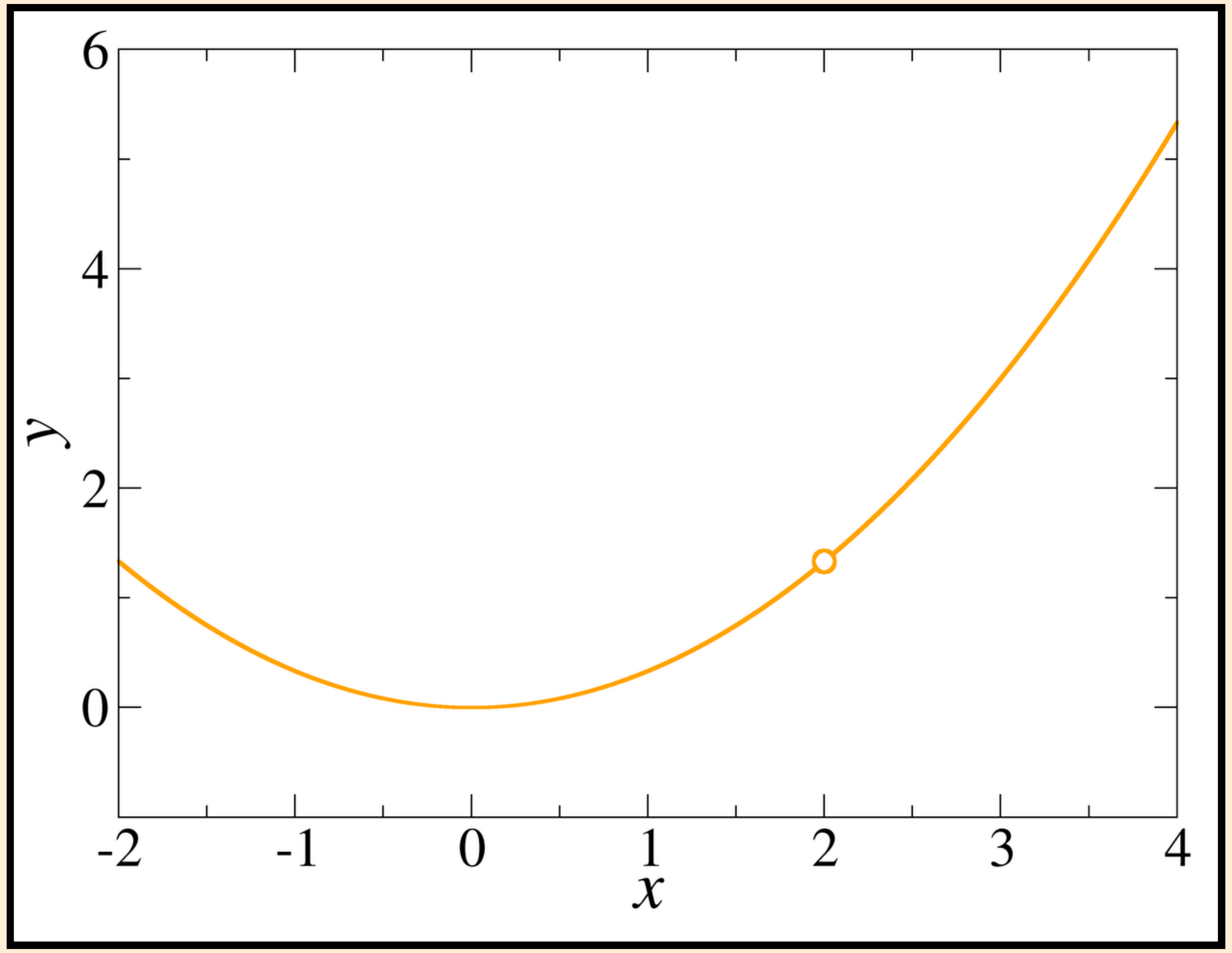
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

$x = 2 \to$ Não está no domínio da função

Qual o valor da função quando x é muito próximo de 2?

Limites

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,9	1,20333333333333	2,01	1,3467
1,99	1,32003333333333	2,001	1,33466699999942
1,999	1,33200033333327	2,0001	1,33346666999751
1,9999	1,33320000333049	2,00001	1,33334666670724
1,99999	1,33332000000877	2,000001	1,3333346667852
1,999999	1,33333200027621	2,00000001	1,33333333333333
1,9999999	1,33333320109344	2,0000000001	1,33333333333333

Limites

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

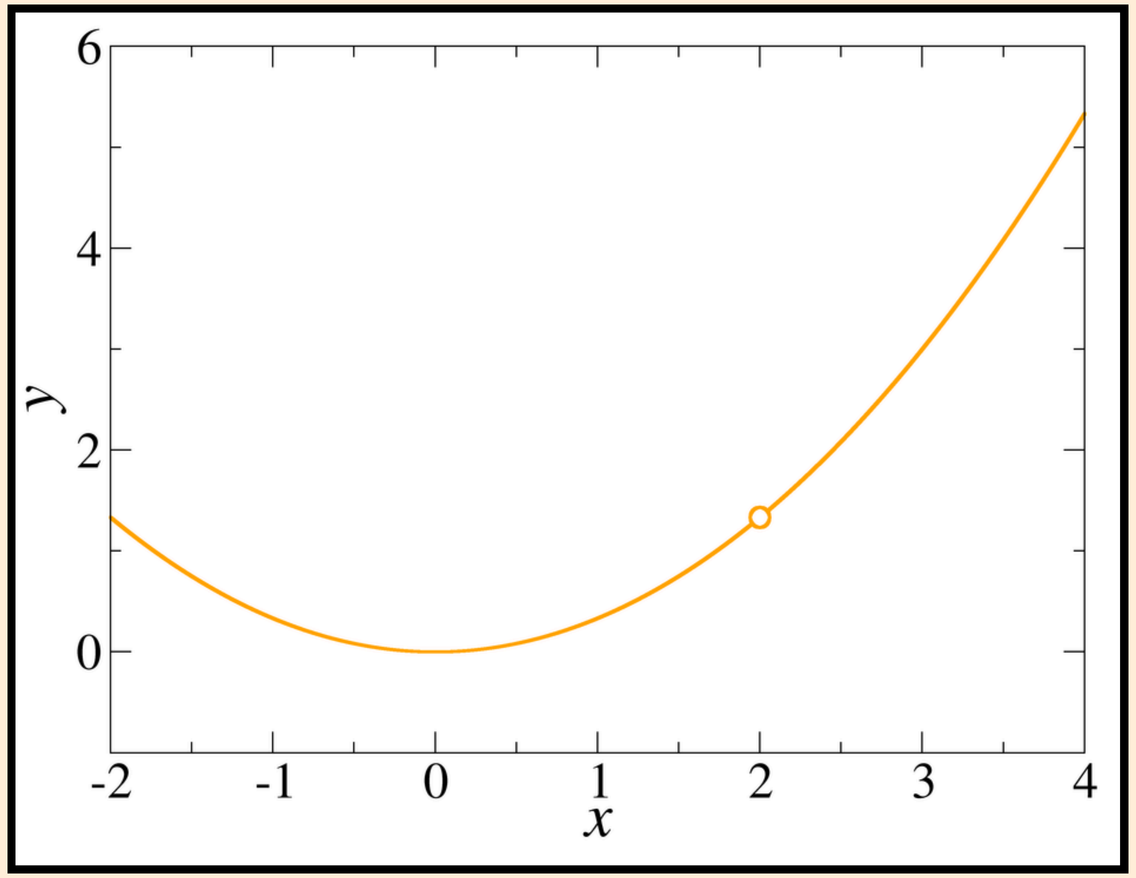
$$x \neq 2$$

Limites

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

$x \neq 2$

$$f(x) = \frac{x^2}{3}$$



Limites

Se uma função é definida em todo um intervalo aberto contendo um número real x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 , podemos nos perguntar

1. À medida que x está cada vez mais próximo de x_0 (mas $x \neq x_0$), o valor de $f(x)$ tende para um número real? (L)
2. Podemos tornar o valor da função tão próximo de L quanto queiramos, escolhendo x suficiente próximo de x_0 ?

Limites

Se uma função é definida em todo um intervalo aberto contendo um número real x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 , podemos nos perguntar

1. À medida que x está cada vez mais próximo de x_0 (mas $x \neq x_0$), o valor de $f(x)$ tende para um número real? (L)
2. Podemos tornar o valor da função tão próximo de L quanto queiramos, escolhendo x suficiente próximo de x_0 ?

Se sim, temos:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

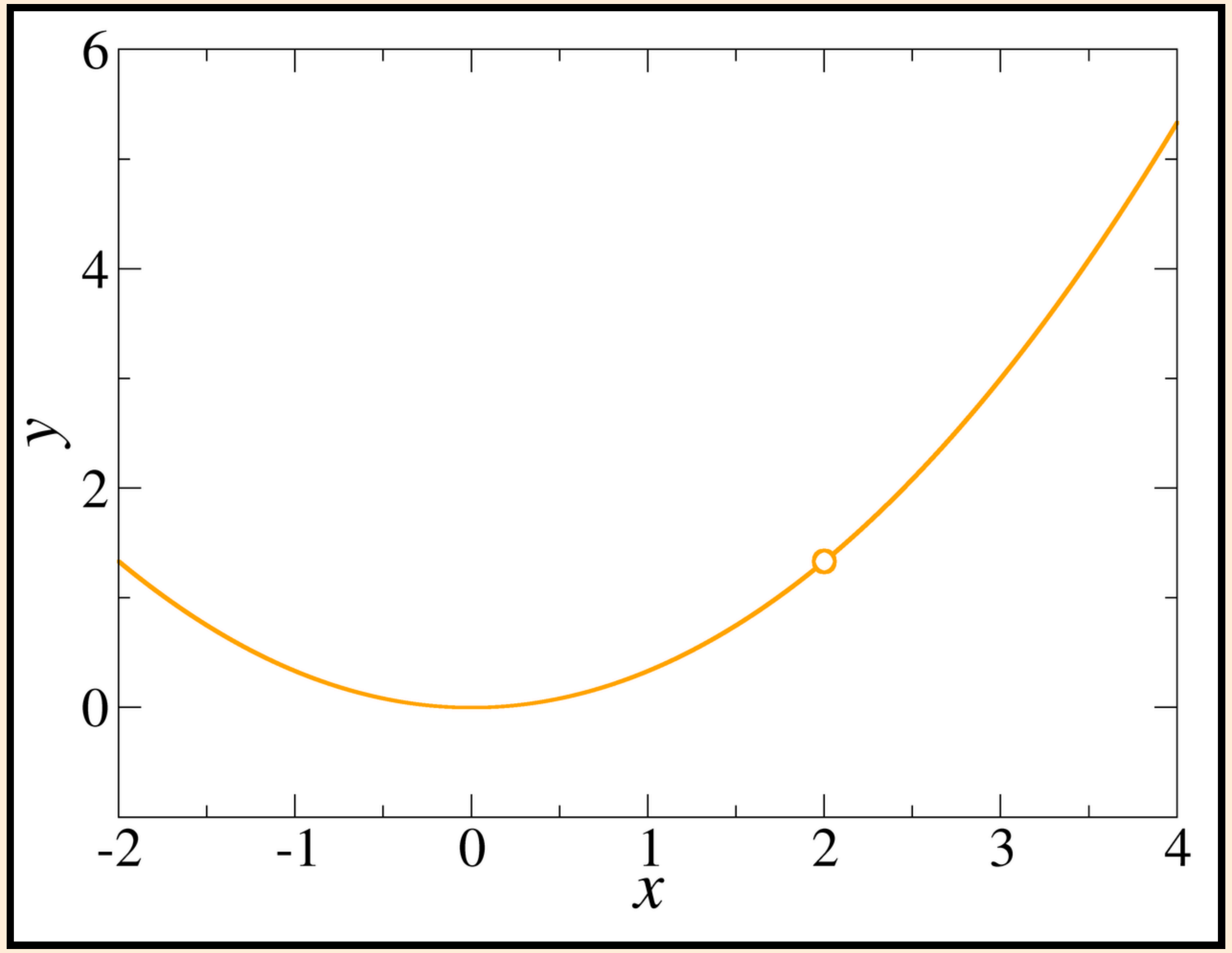
Limites

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

- os valores de $f(x)$ ficarão próximos ao número real L sempre que a variável x estiver próxima de x_0, em qualquer lado de x_0.

Limites

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,9	1,20333333333333	2,01	1,3467
1,99	1,32003333333333	2,001	1,33466699999942
1,999	1,33200033333327	2,0001	1,33346666999751
1,9999	1,33320000333049	2,00001	1,33334666670724
1,99999	1,33332000000877	2,000001	1,3333346667852
1,999999	1,33333200027621	2,00000001	1,33333333333333
1,9999999	1,33333320109344	2,0000000001	1,33333333333333

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{4}{3}}$$

Cálculo de limites por substituição

Em muitos casos, é possível calcular o limite apenas substituindo os valor de x_0 na função. Esta é uma propriedade que é válida para um conjunto específico de funções, as **funções contínuas.**

Cálculo de limites por substituição

Em muitos casos, é possível calcular o limite apenas substituindo os valor de x_0 na função. Esta é uma propriedade que é válida para um conjunto específico de funções, as **funções contínuas.**

Exemplos:

$$\lim_{x \to 13} 4 \qquad \lim_{x \to 3} x \qquad \lim_{x \to 2} (5x - 3) \qquad \lim_{x \to -2} \frac{3x + 4}{x + 5}$$

Cálculo de limites por substituição

As vezes precisamos trabalhar com a expressão antes de realizar a substituição

Exemplos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \qquad\qquad \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

Leis do limite

Teorema: Se L, M, c, k são números reais, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, temos

- $$\lim_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$
- $$\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$
- $$\lim_{x \to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$$
- $$\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$$
- $$\lim_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}, \text{ desde que } r, s, \in \mathbb{Z}, s \neq 0 \text{ e } L^{r/s} \in \mathbb{R}$$

Leis do limite

Exemplos:

$$\lim_{x \to c} (x^3 + 4x^2 - 3)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$$

Leis do limite

Teorema: O limite de polinômios pode ser obtido por substituição

$$P(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$\boxed{\lim_{x \to c} P(x) = a_n c^x + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0}$$

Leis do limite

Teorema: Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}}$$

Leis do limite

Teorema: Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}}$$

Exemplo: $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5}$

Leis do limite

Teorema: Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}}$$

- Este teorema só pode ser aplicado quando o denominador é não nulo.
- Em alguns casos onde o denominador é nulo, podemos eliminar algebricamente estes denominadores e obter o limite por substituição da fração simplificada

Leis do limite

Teorema: Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(c) \neq 0$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}}$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$$

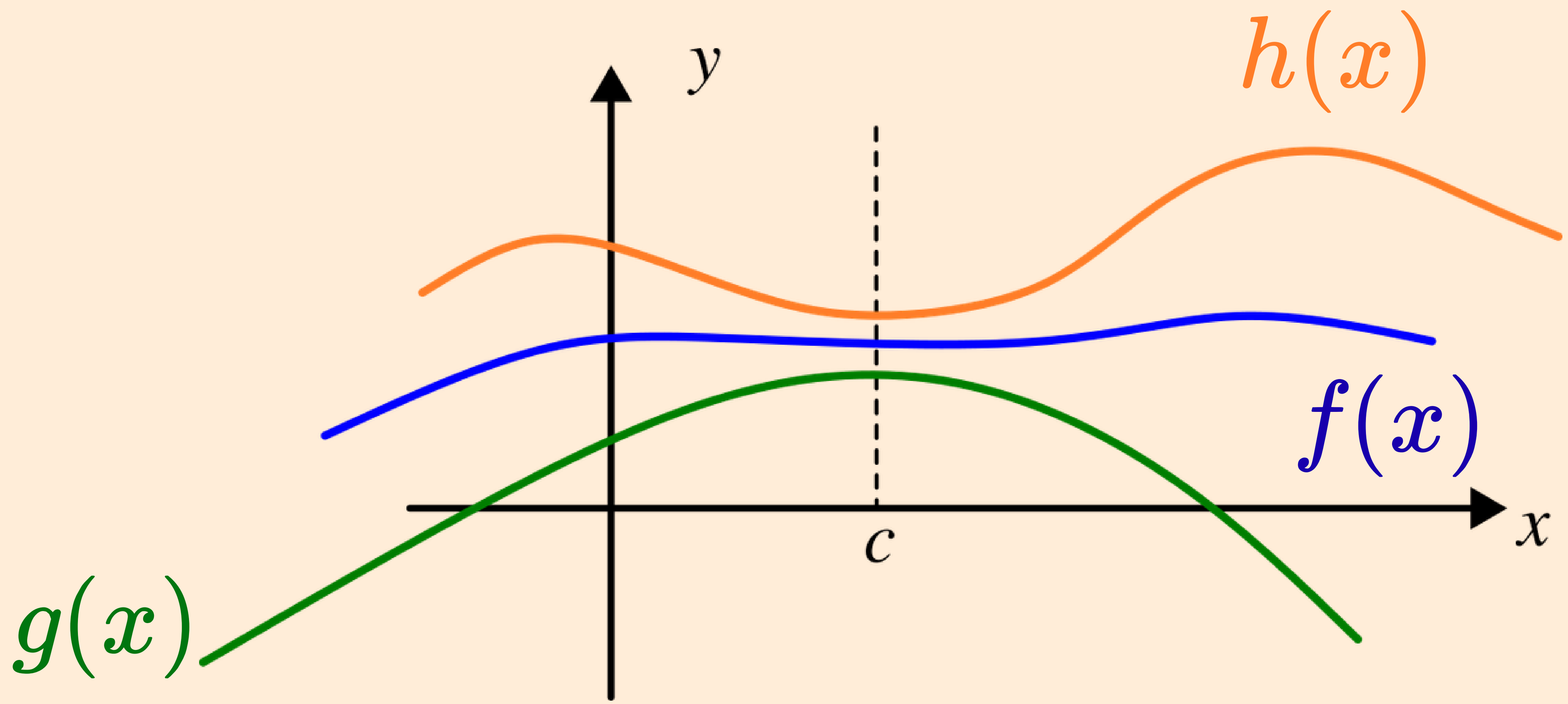
Teorema do confronto

Teorema: Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio c. Supondo também que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Então,

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$



Teorema do confronto

Exemplo: Seja

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} u(x) = ?$$

Teorema do confronto

Teorema: Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio c, e os limites de f e g existem, então

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

Definição precisa de limite

Definição: Seja $f(x)$ definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0 . Dizemos que o limite de $f(x)$, conforme x se aproxima de x_0 , é o número L , e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

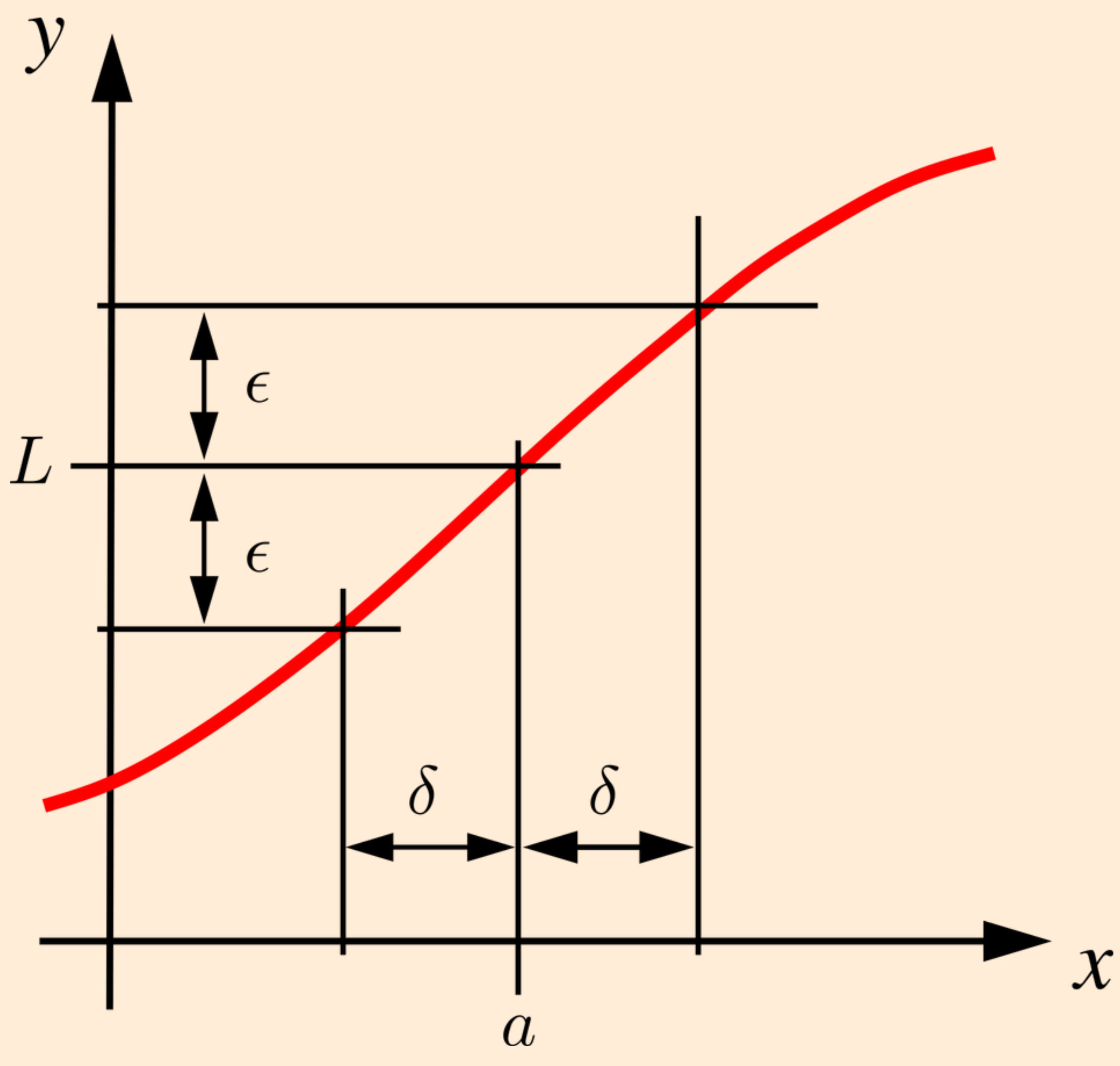
se para cada número $\epsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição precisa de limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L : 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

O limite de $f(x)$ em x_0 não depende de $f(x_0)$ (caso ele exista), mas sim dos valores que $f(x)$ assume nos pontos próximos de x_0.



Definição precisa de limite

Exemplo: Vamos mostrar pela definição que

$$\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L : 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição precisa de limite

Exemplo: Provar que o limite abaixo não existe

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L : 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição precisa de limite

Determinando δ algebricamente

Para o limite

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = 2$$

determinar $\delta > 0$ para $\epsilon = 1$, isto é, encontrar δ tal que

$$0 < |x-5| < \delta \longrightarrow |f(x)-2| < 1$$

Limites laterais - à direita

Definição: Dizemos que $f(x)$ tem **um limite L à direita em** x_0 e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x

$$x_0 < x < x_0 + \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites laterais - à esquerda

Definição: Dizemos que $f(x)$ tem **um limite L à esquerda em** x_0 e escrevemos

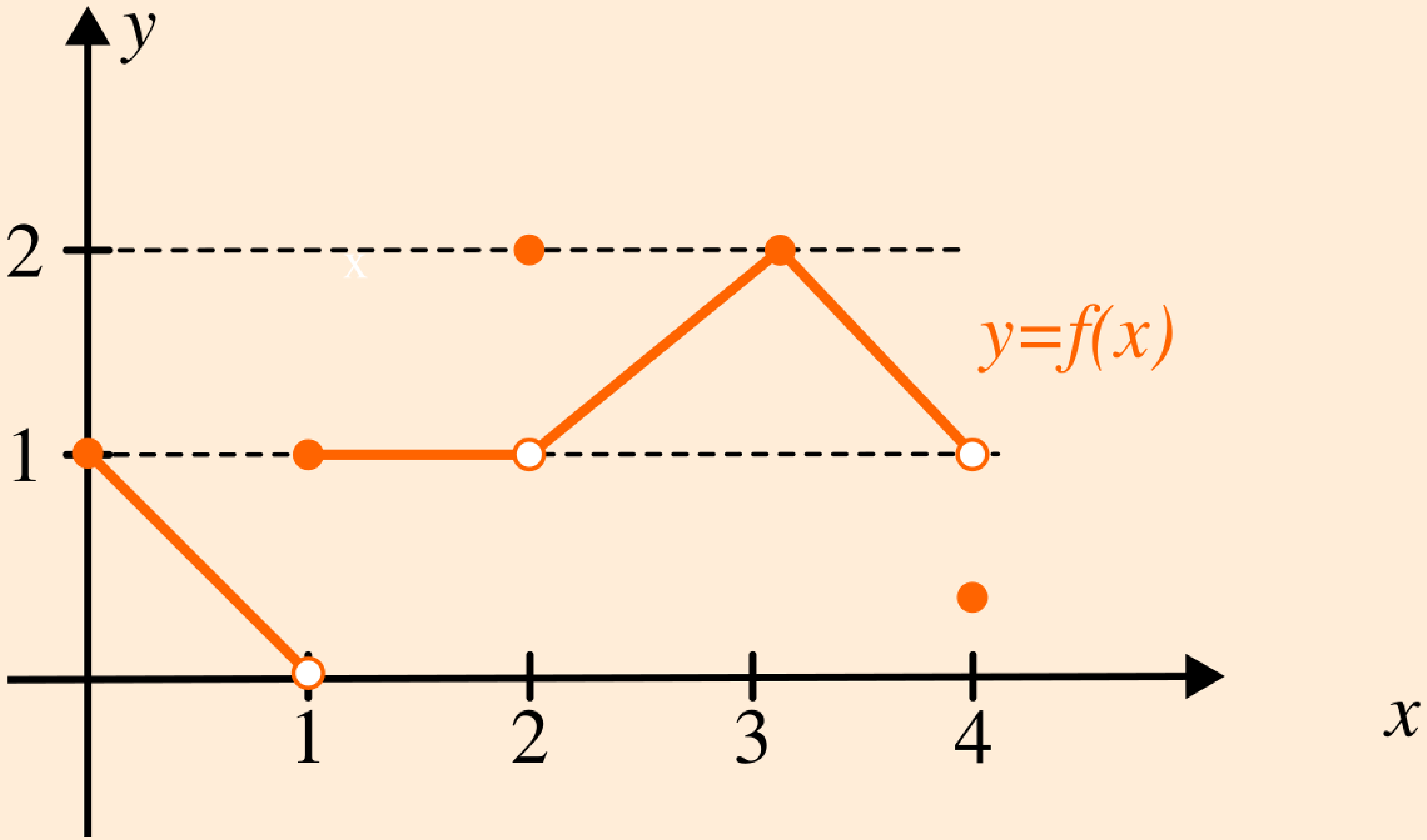
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se para qualquer número $\epsilon > 0$ existe um correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites laterais

Exemplo:



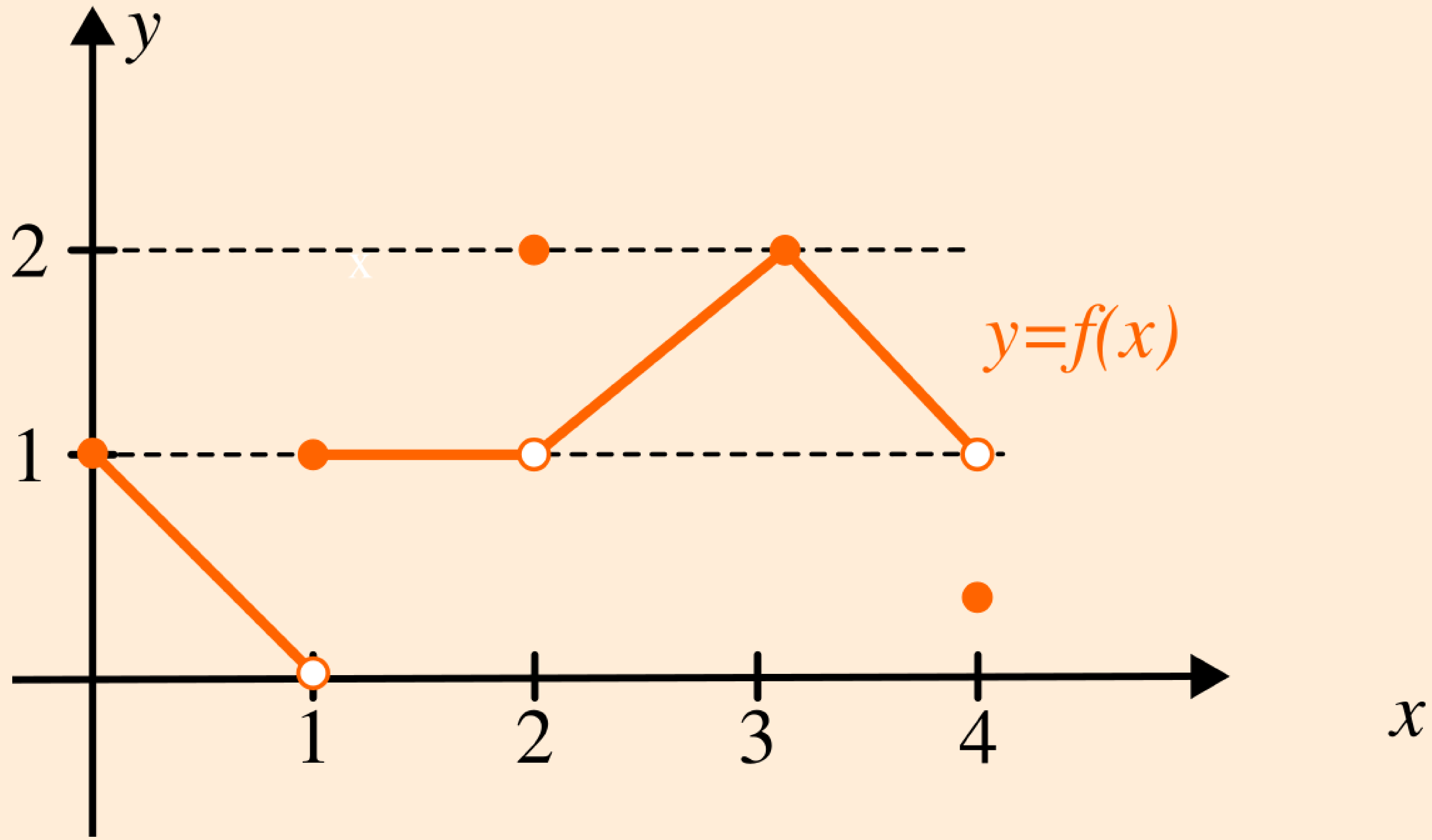
Limites laterais

Teorema: Uma função $f(x)$terá limite quando x se aproximar de **se e somente se** tiver um limite lateral à esquerda e um à direita, e os dois limites laterais forem **iguais**:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Limites laterais

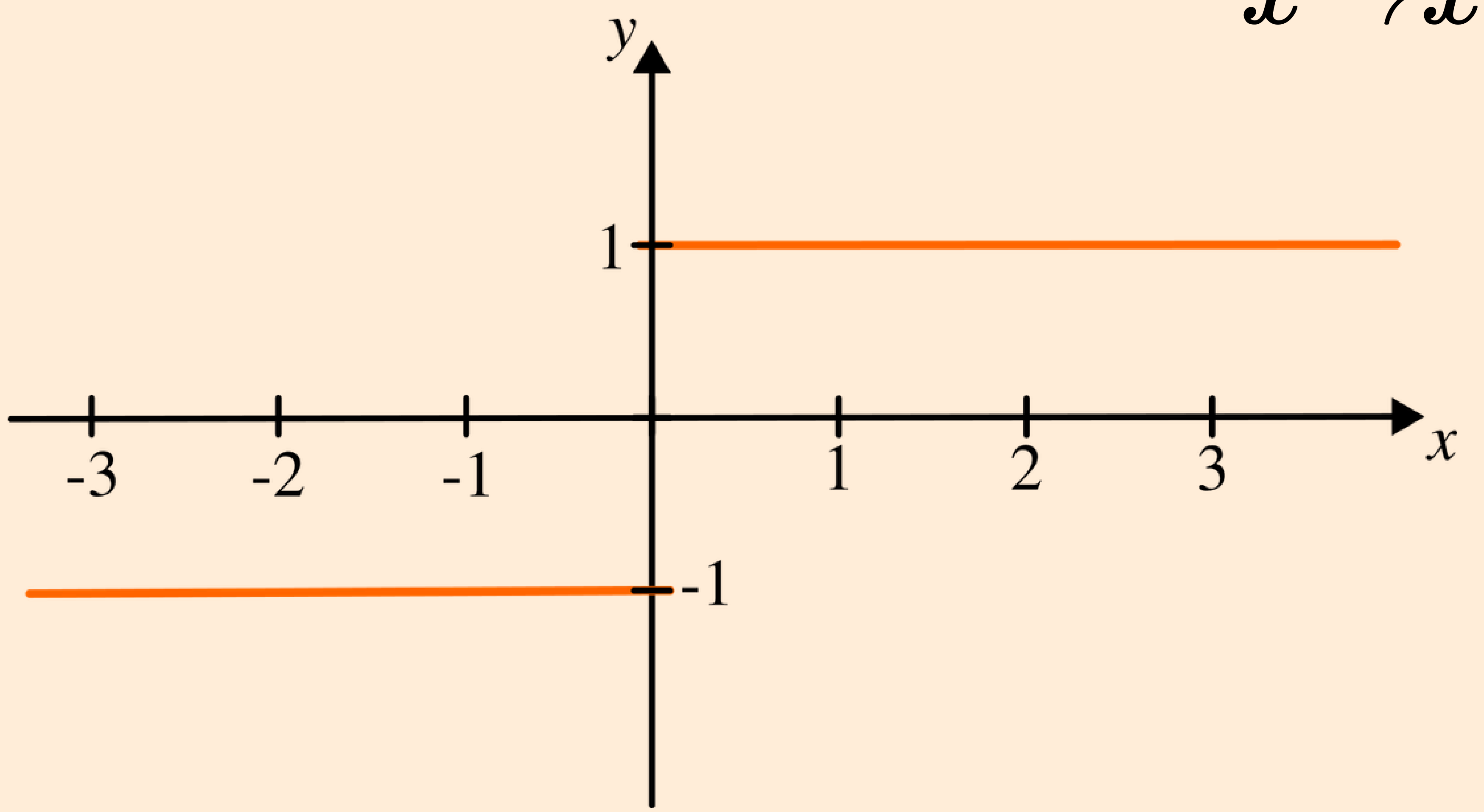
Exemplo:



Limites laterais

Exemplo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x|}{x}$$



Limites laterais + Teorema do confronto

Exemplo:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$$

Limites laterais + Teorema do confronto

Exemplo:

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

Limites no infinito

Definição: Dizemos que $f(x)$ possui **limite L quando** x **tende ao infinito** e escrevemos

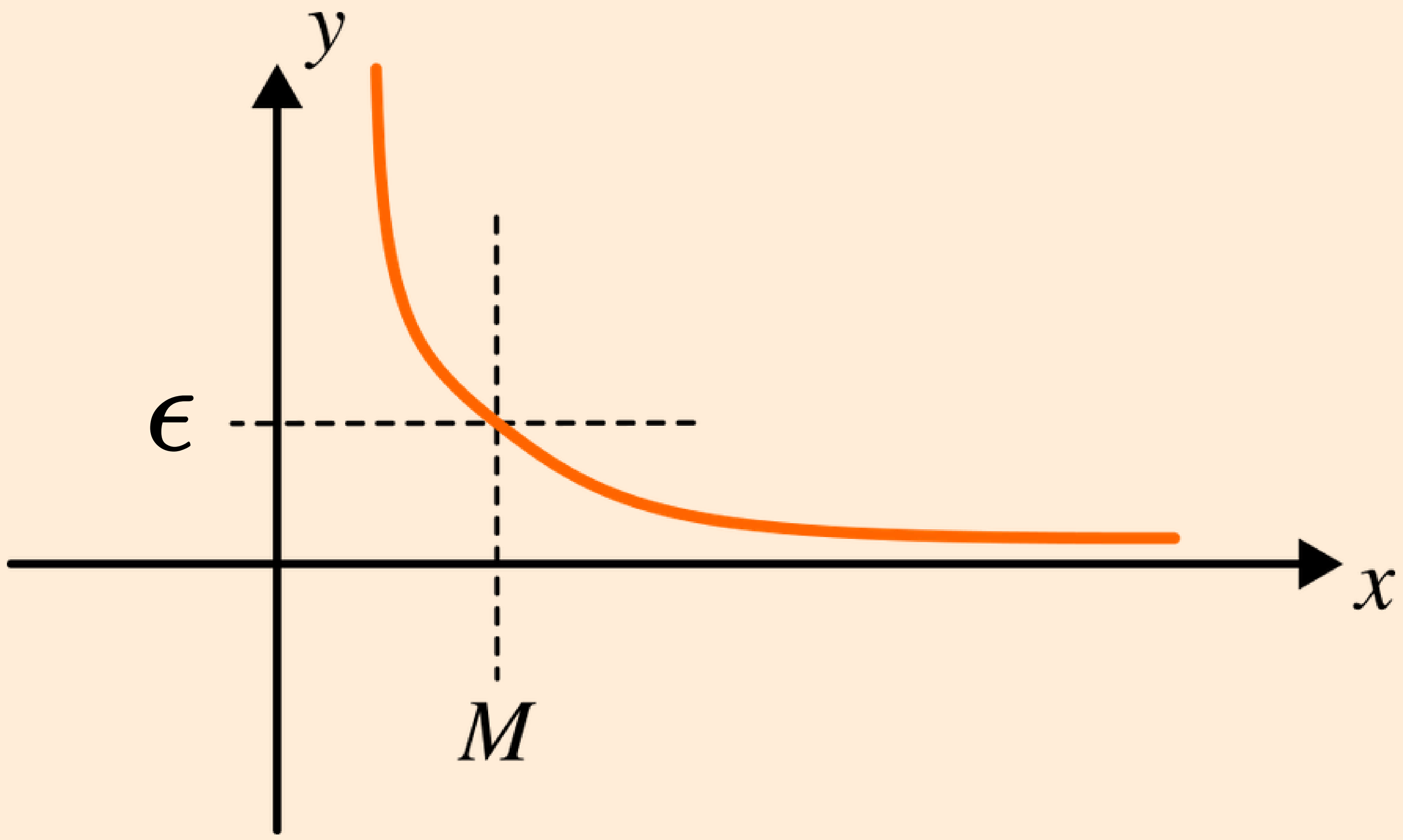
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe um número M correspondente tal que, para todos os valores de x

$$x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites no infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ \text{com}\ \delta > M \text{ tal que} \\ x > \delta \to L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \end{cases}$$



Limites no infinito

Definição: Dizemos que $f(x)$ possui **limite L quando** x **tende a menos infinito** e escrevemos

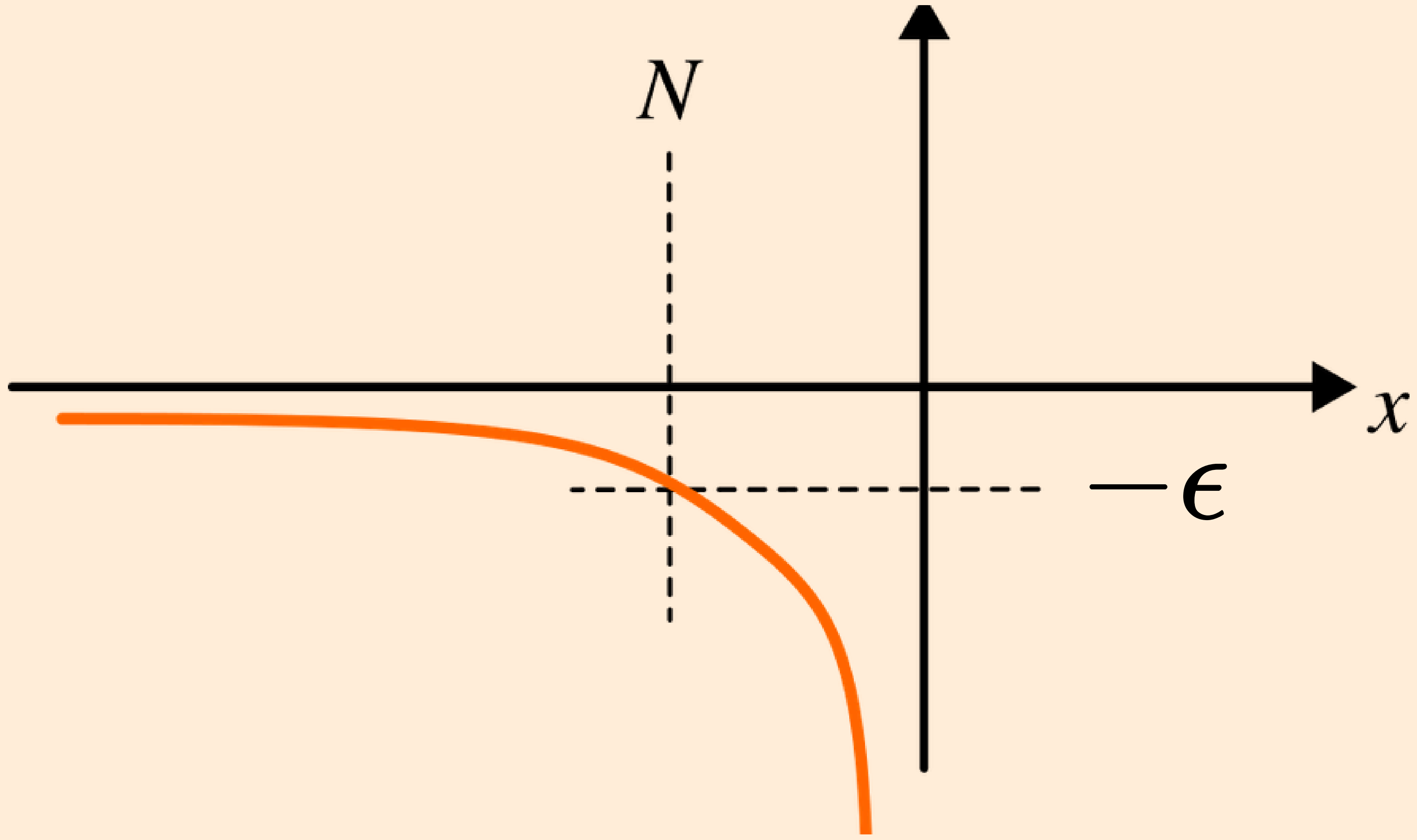
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe um número N correspondente tal que, para todos os valores de x

$$x < N \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites no infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ \text{com } -\delta < N \text{ tal que} \\ x < -\delta \to L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \end{cases}$$



Limites no infinito

Exemplo: Demonstrar que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Limites no infinito

Limites tendo ao infinito apresentam propriedades de soma, subtração, multiplicação por uma constante, produto, quociente e potenciação como as mostradas anteriormente.

$$\lim_{x \to \infty} = \left(5 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

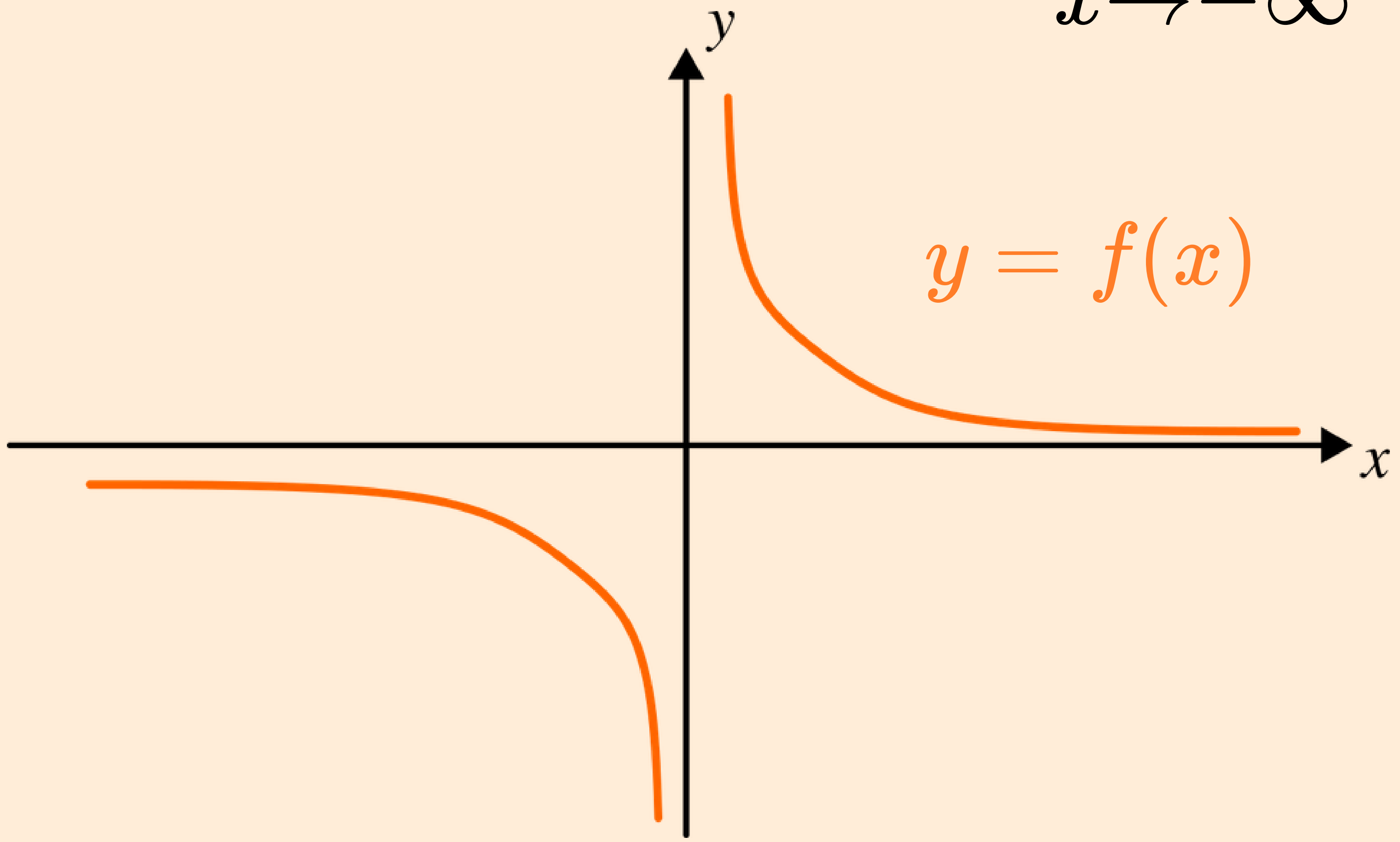
$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{11x + 2}{2x^3 - 1}$$

Assíntota horizontal

Definição: A reta $y = b$ é um **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



Assíntota

$y = 0$

Assíntota horizontal

Exemplo: Qual o limite $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, onde $f(x) = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$?

Assíntota horizontal

Exemplo: Qual o limite $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, onde $f(x) = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$?

$$\boxed{y = 2}$$

Assíntota oblíqua

- Caso o numerador de uma função racional tenha um grau maior do que o denominador o gráfico apresentará uma assíntota oblíqua (inclinada)

$$f(x) = \underbrace{\boxed{(mx+b)}}_{\text{Assíntota}} + \underbrace{\boxed{R(x)}}_{\text{Resto}}$$

Assíntota oblíqua

Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3}{7x + 4}$$

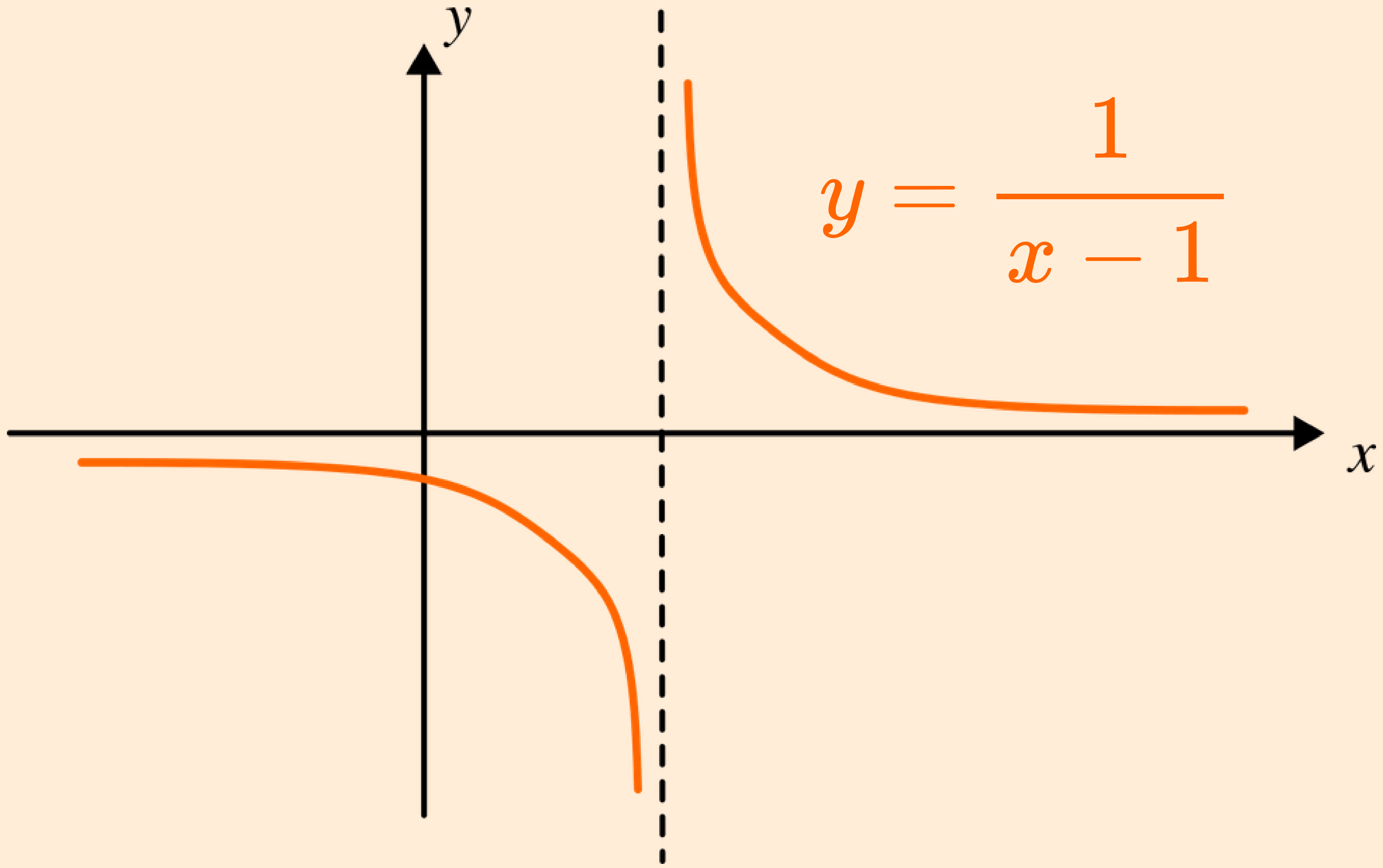
Assíntota oblíqua

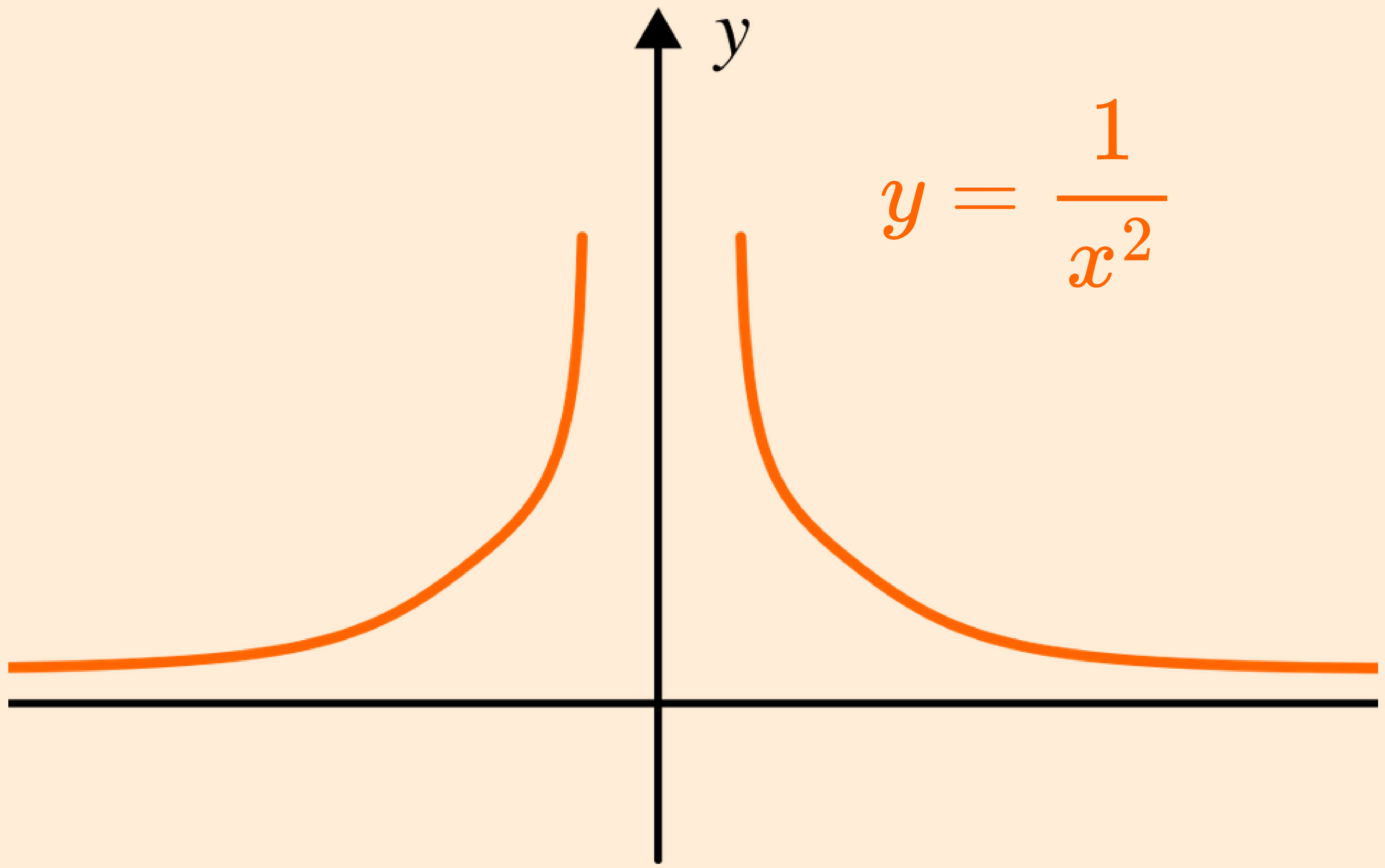
Exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right) + \frac{(-115)}{49(7x + 4)}}$$

Limites infinitos





$$\lim_{x \to 1^+} y = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} y = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} y = \infty$$

Limites infinitos

Definição: Dizemos que $f(x)$ **tende ao infinito** quando x tende a x_0, isto é

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se para cada número real positivo B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x

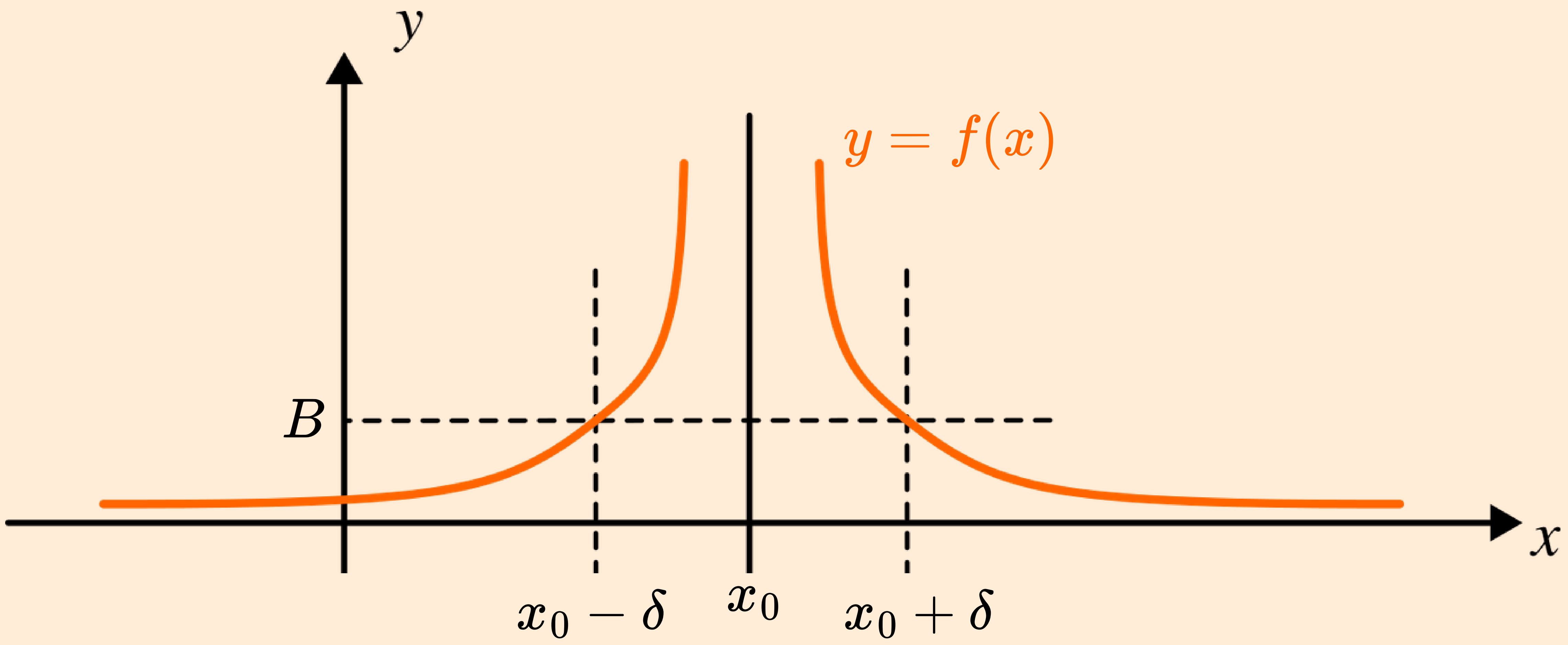
$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) > B$$

Limites infinitos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) > B$$

Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $f(x)$ fica acima da reta $y = B$



Limites infinitos

Definição: Dizemos que $f(x)$ **tende ao menos infinito** quando x tende a x_0, isto é

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se para cada número real negativo -B existe um $\delta > 0$ correspondente tal que para todo x

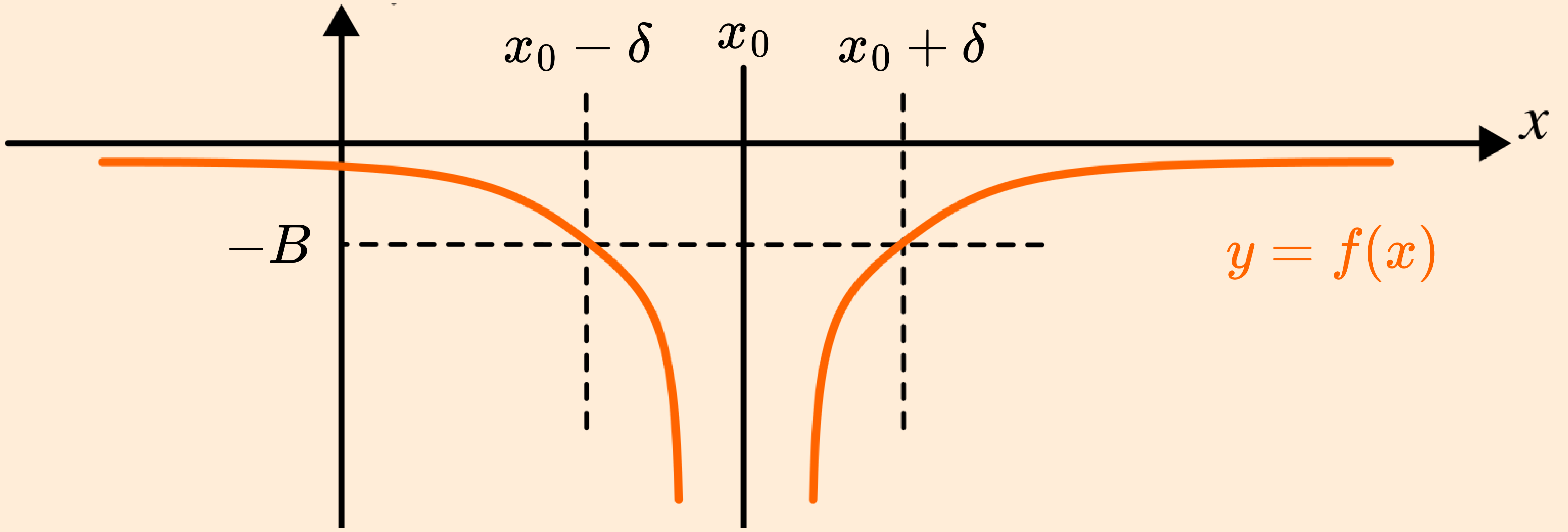
$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) < -B$$

Limites infinitos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow f(x) < -B$$

Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $f(x)$ fica abixo da reta $y = -B$



Limites infinitos

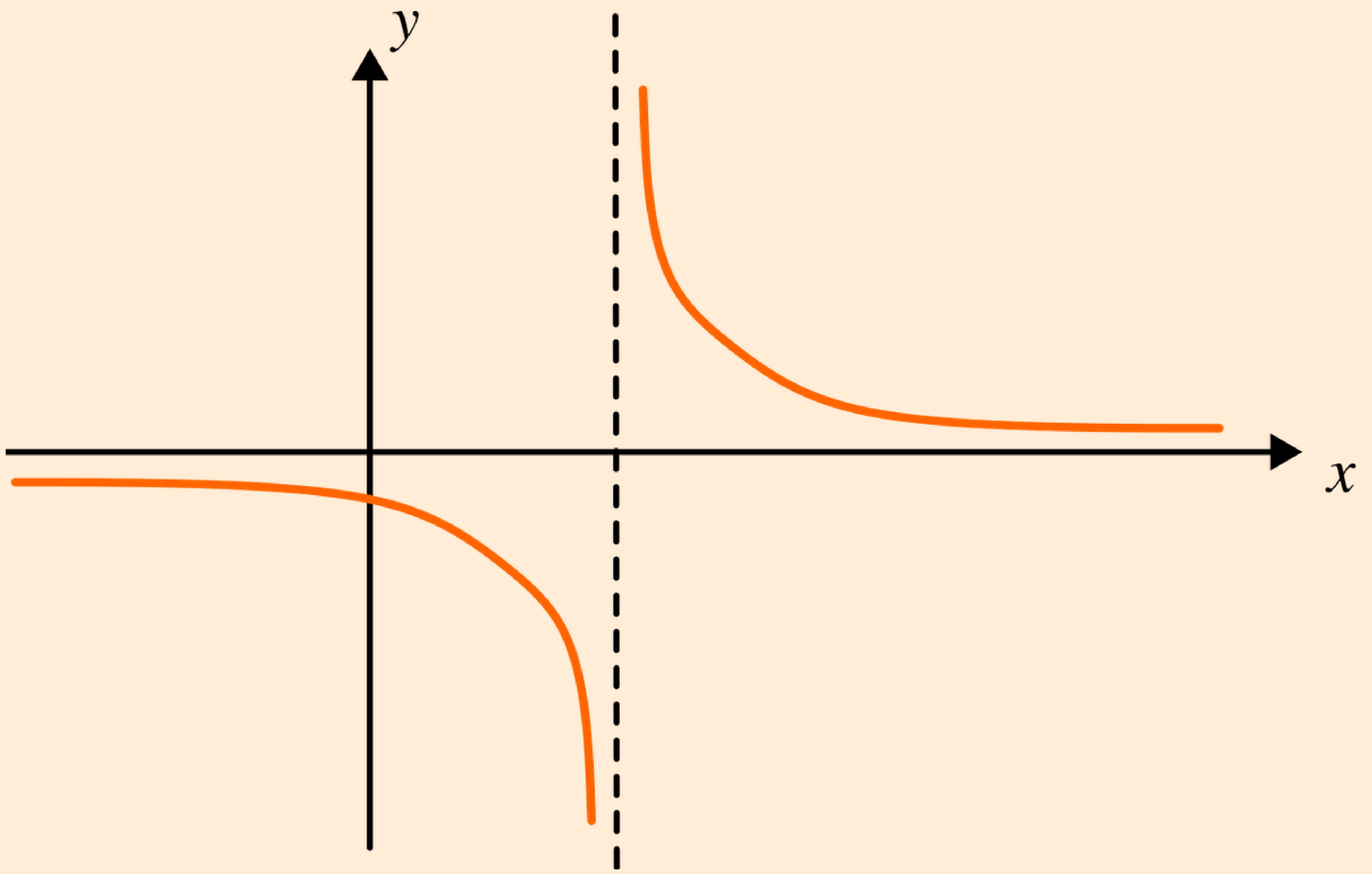
Exemplos: Funções racionais podem se comportar de várias maneiras quando próximas ao zero de seus dominadores

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}$$

Assíntotas verticais

- Observando as figuras esquemáticas, vemos que a distância entre a curva da função e uma reta vertical diminui à medida que a curva se afasta verticalmente da origem



Assíntotas verticais

Definição: Uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de uma função $f(x)$ se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Assíntotas

Exemplo: Encontrar as assíntotas de

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{-8}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

Assíntotas

Exemplo: Encontrar as assíntotas de

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} \qquad\qquad y = 1, x = -2$$

$$f(x) = \frac{-8}{x^2-4} \qquad\qquad y = 0, x = \pm 2$$

$$f(x) = \frac{x^3-3}{2x-4} \qquad\qquad y = \frac{x}{2} + 1, x = 2$$

Termos dominantes

Como vimos, a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

Termos dominantes

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \implies x \text{ numericamente grande}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \implies x \to 2$$

Termos dominantes

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \implies$$ **Termo dominante quando x é numericamente grande**

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \implies$$ **Termo dominante quando x é próximo de 2**

Aplicação de Limites

O número e

De uma sequência com termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, temos

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Aplicação de Limites

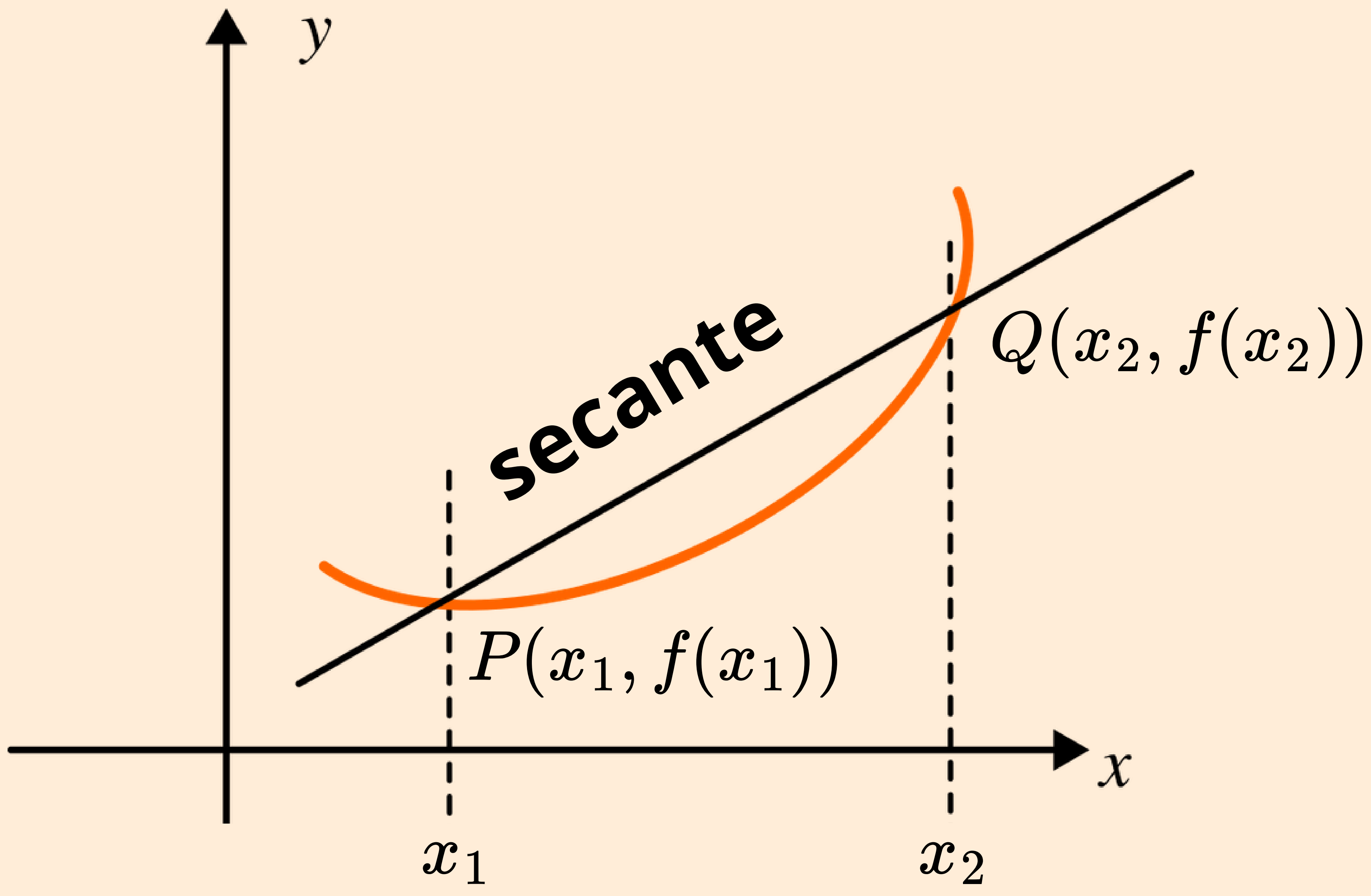
Taxas instantâneas de variação e reta tangente

Definição: A **taxa média de variação** de uma função $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_2} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$

Aplicação de Limites

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_2} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0$$



$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$\Delta x = x_2 - x_1 = h$

Aplicação de Limites

Com limites, podemos calcular o **coeficiente angular da reta tangente**, isto é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Da mesma forma, conseguimos calcular **taxas de variação instantânea.**