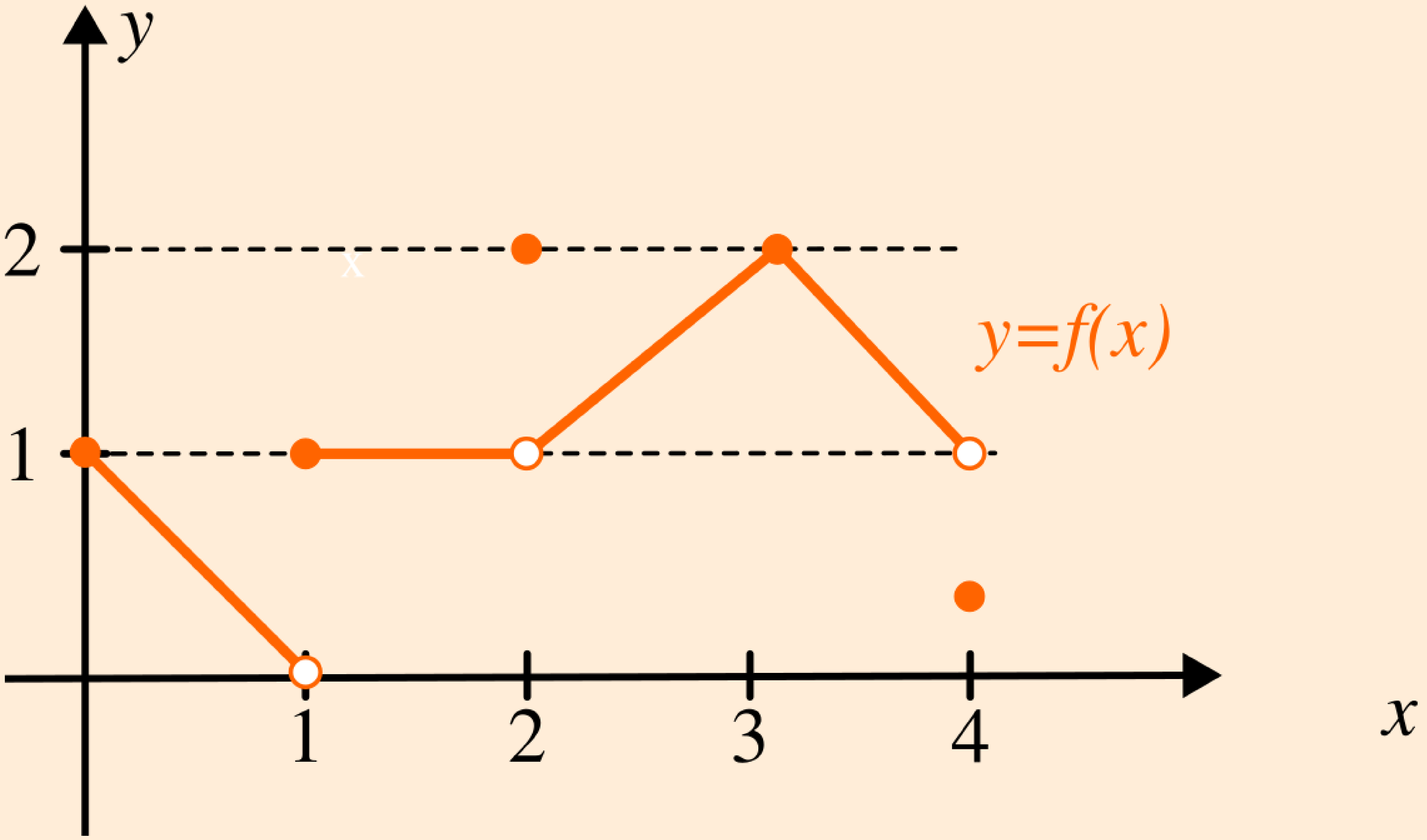
Continuidade de funções reais

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/Calculo1_1S2026

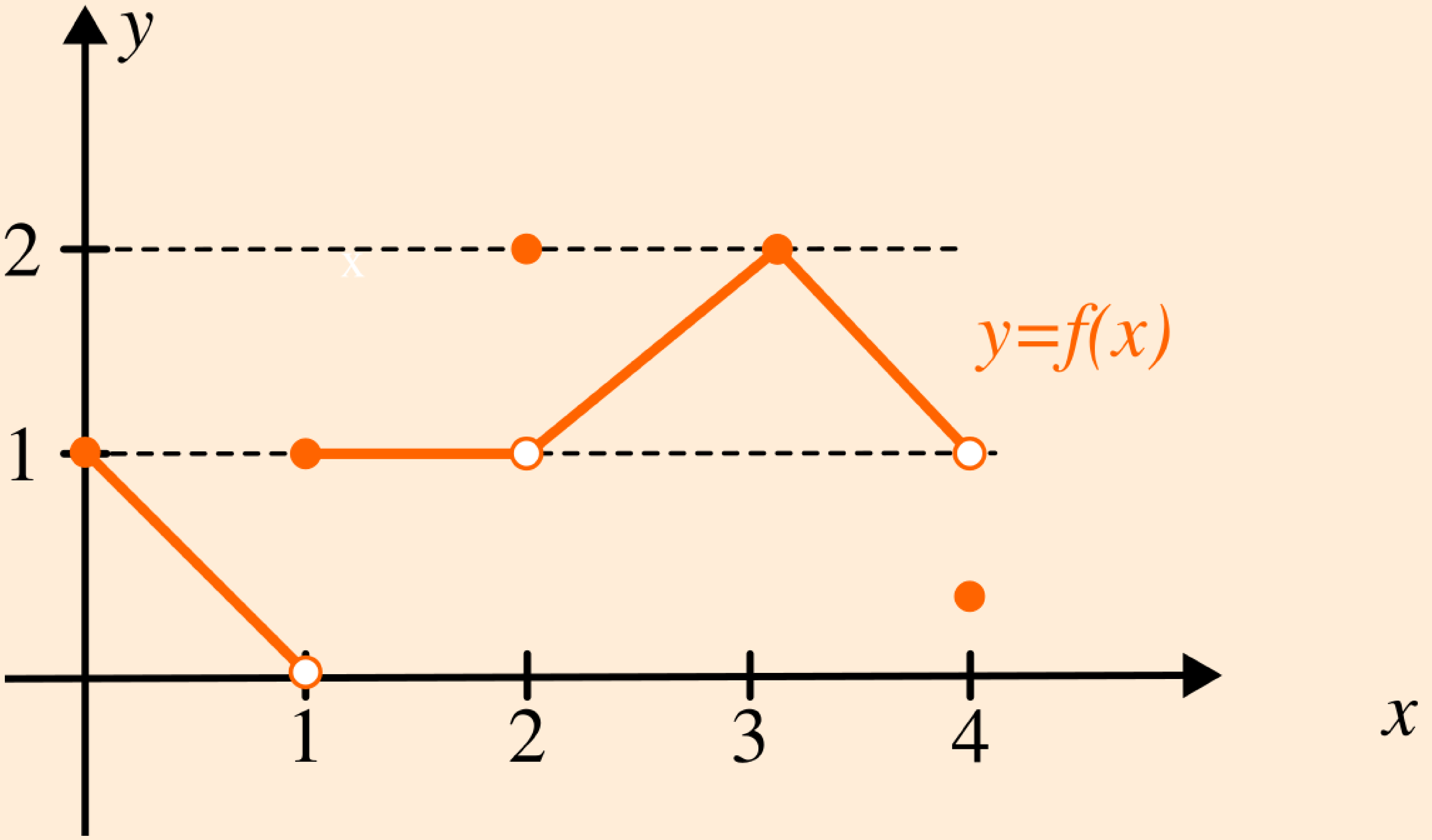
Referências:

- THOMAS, George B. Cálculo. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009. v.1., 1994. v.1.
- GUIDORIZZI, Hamilton. Um curso de cálculo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v.1.

Continuidade



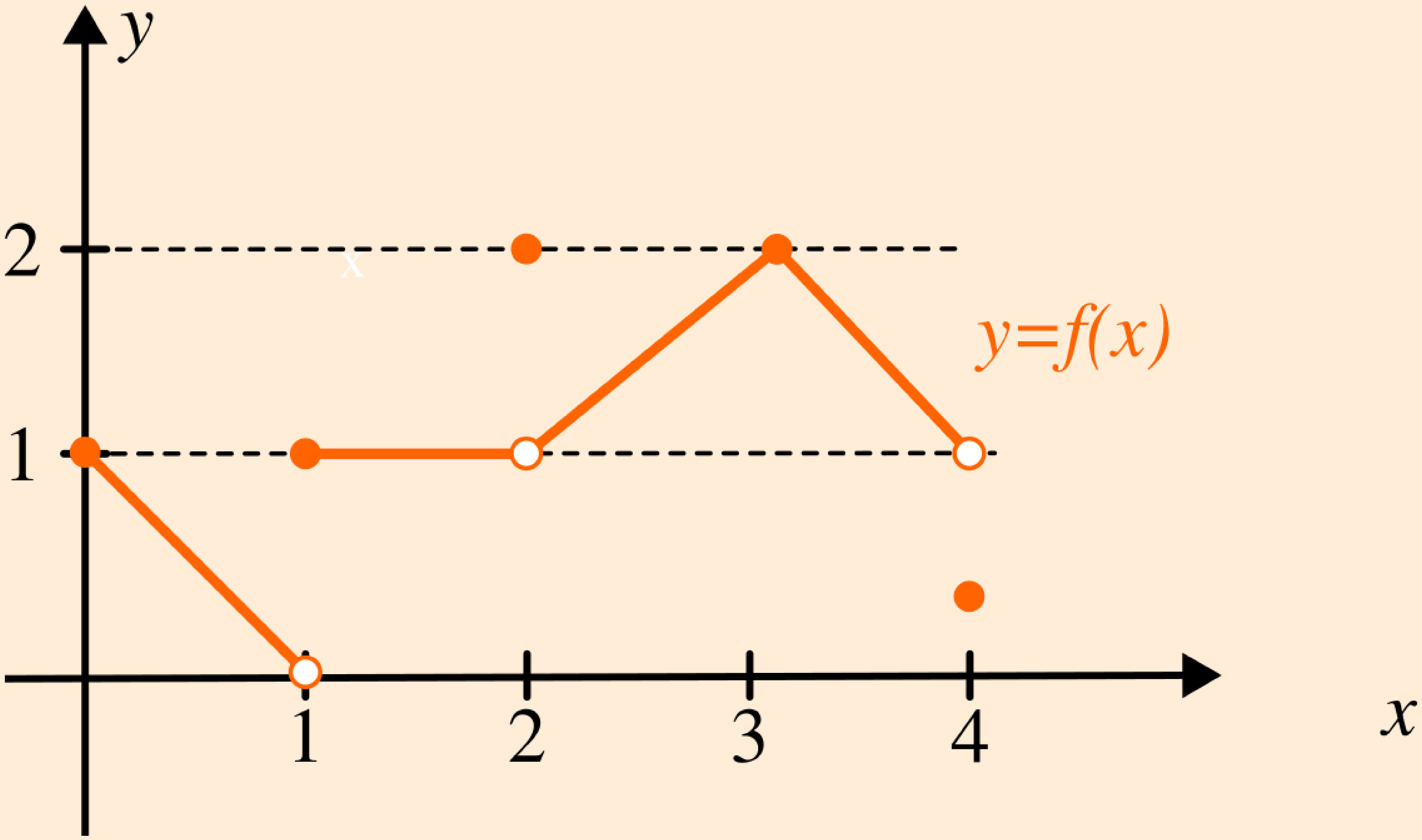
Continuidade



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

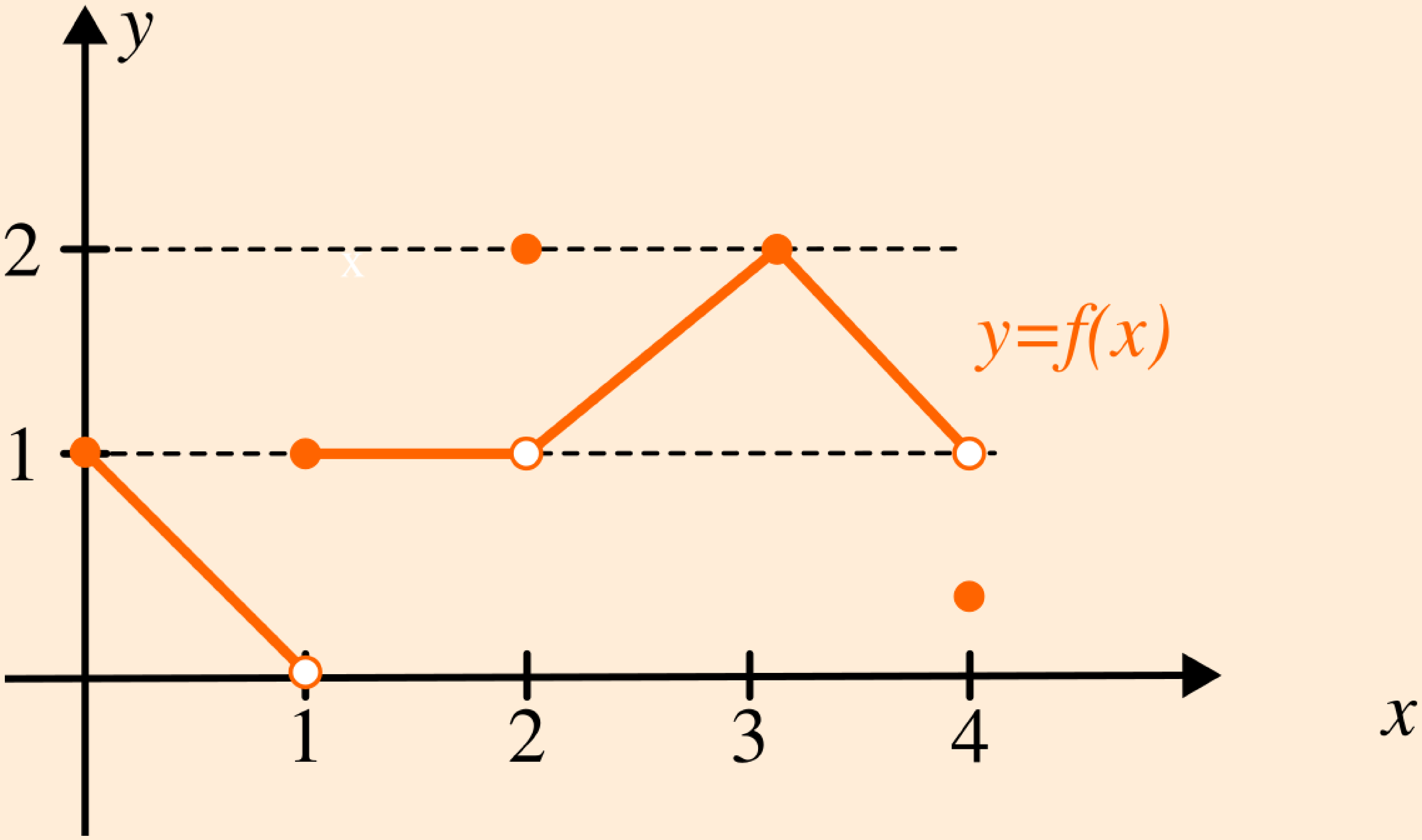
Continuidade



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

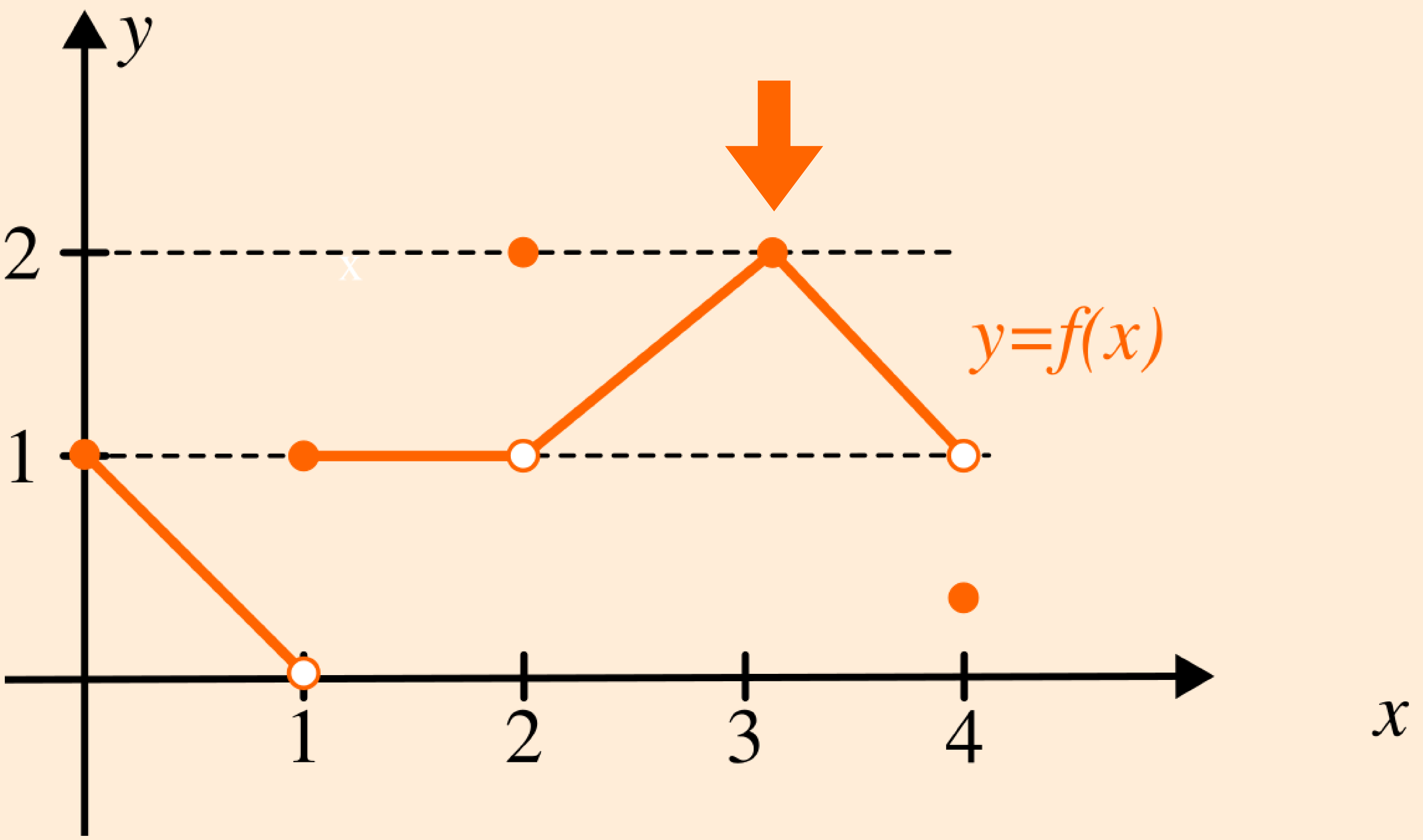
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Continuidade

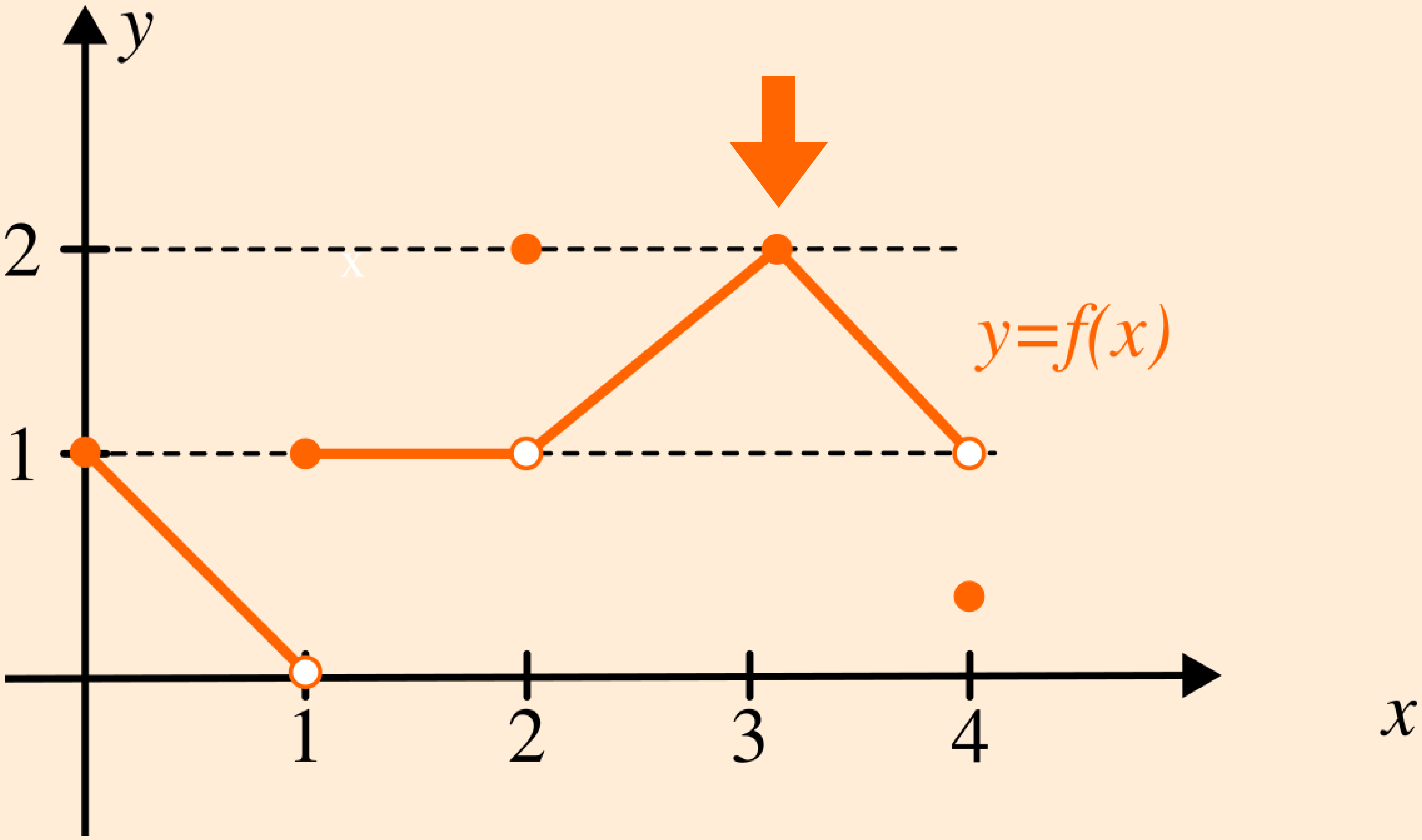


$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1 \\ f(4) \neq 1 \end{cases}$$

Continuidade



Continuidade



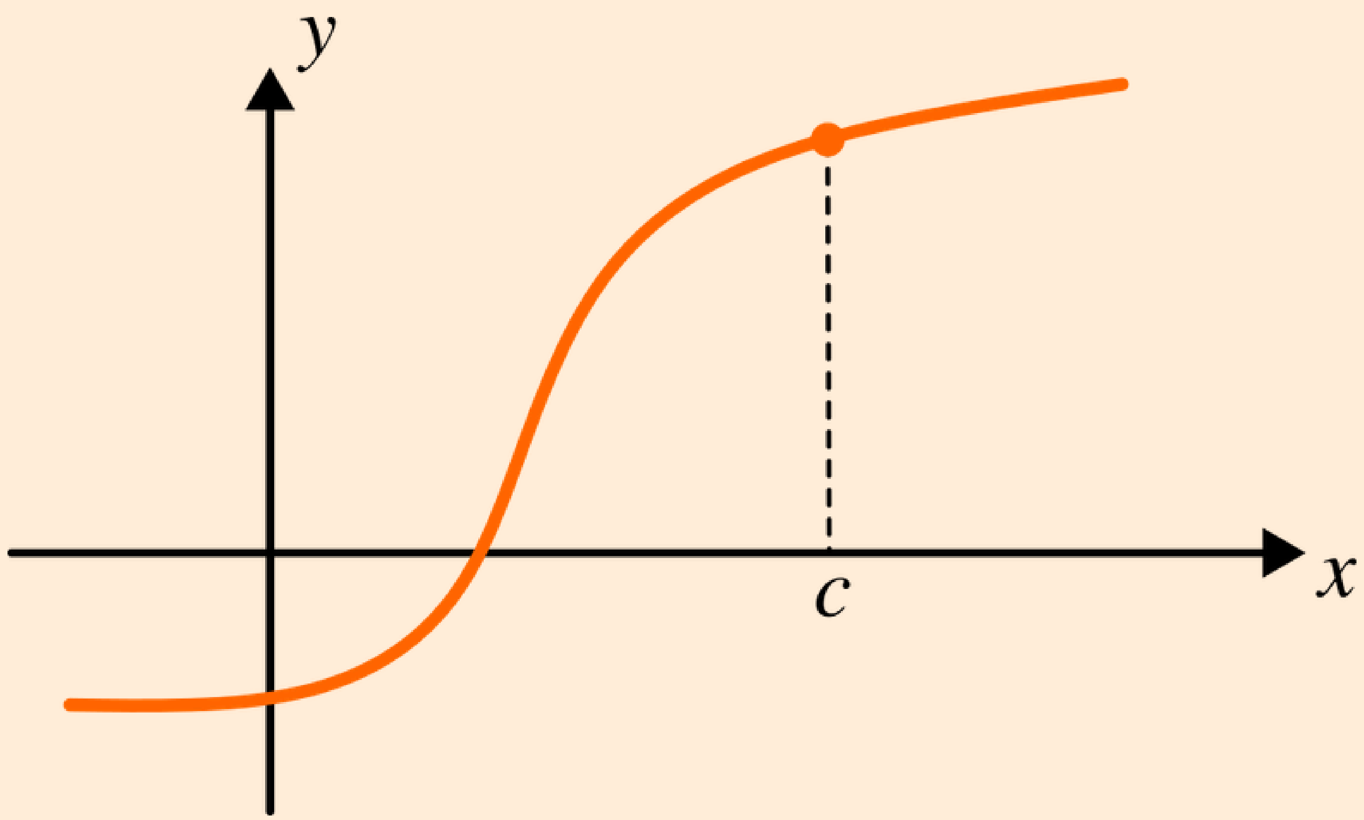
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Continuidade

Definição: Função contínua em um ponto

- *Ponto interior:* Uma função $y = f(x)$ é **contínua** em um ponto interior de seu domínio quando

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$



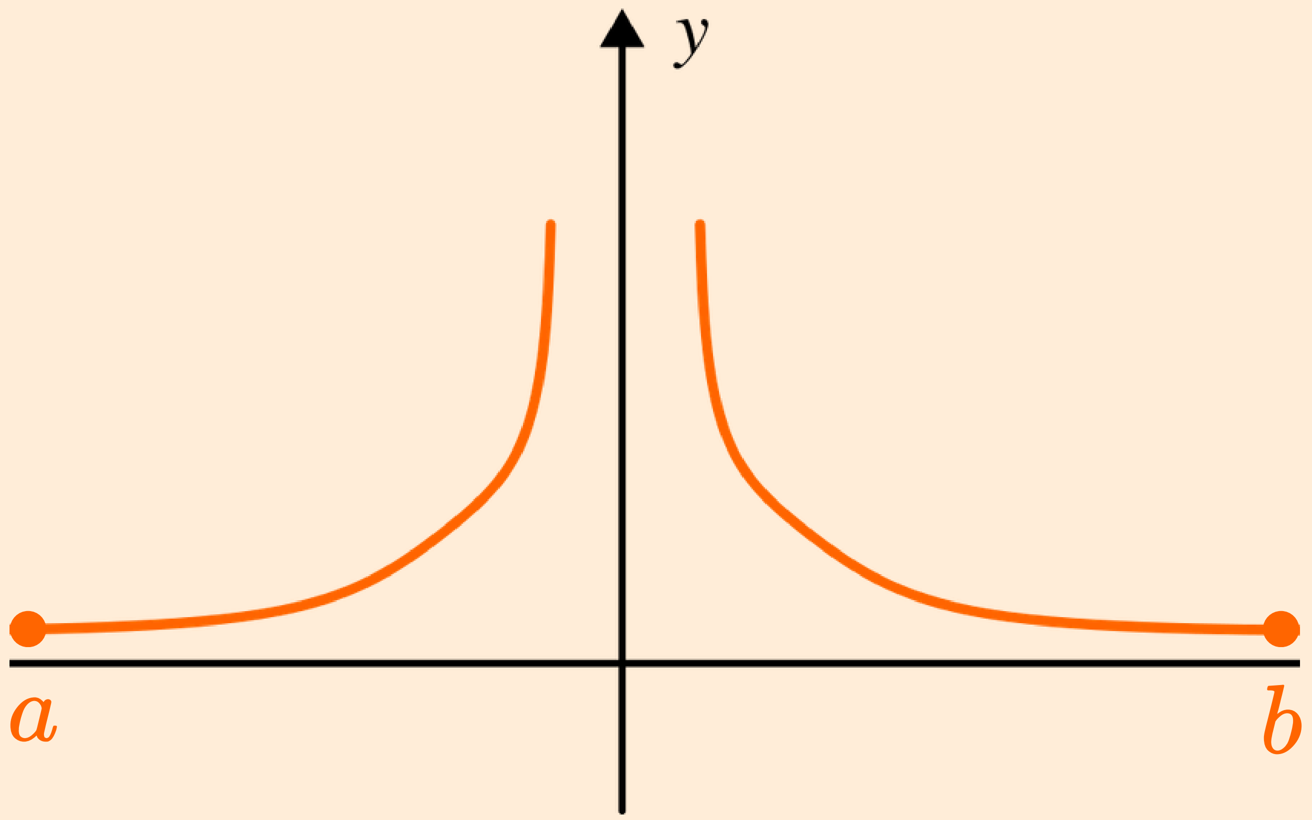
Continuidade

Definição: Função contínua em um ponto

- *Extremidades:* Uma função $y = f(x)$ é **contínua** na extremidade esquerda a ou é contínua na extremidade direita b de seu domínio quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



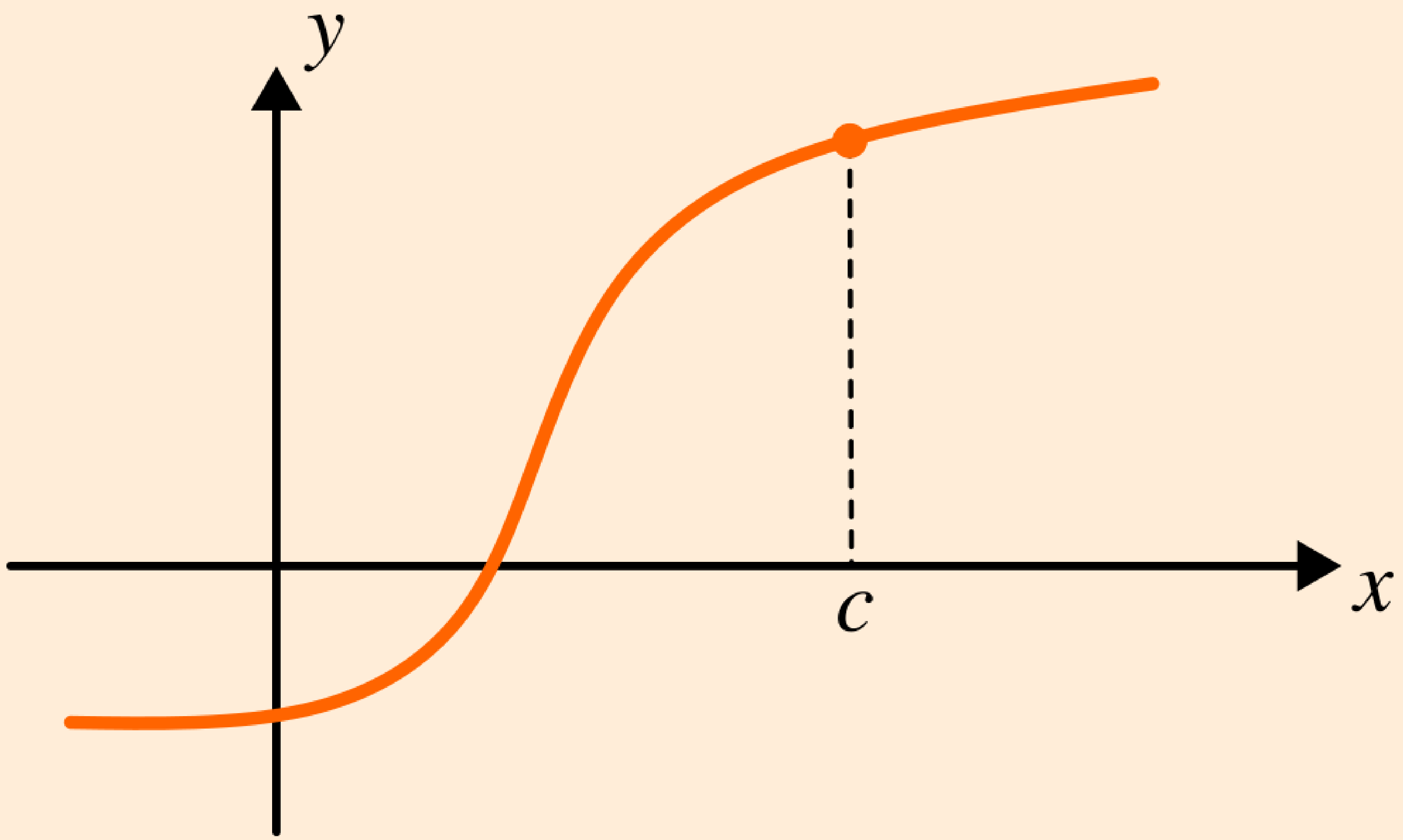
Teste de continuidade

Uma função $y = f(x)$ será contínua em $x = c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes

1. $f(c)$ existe

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

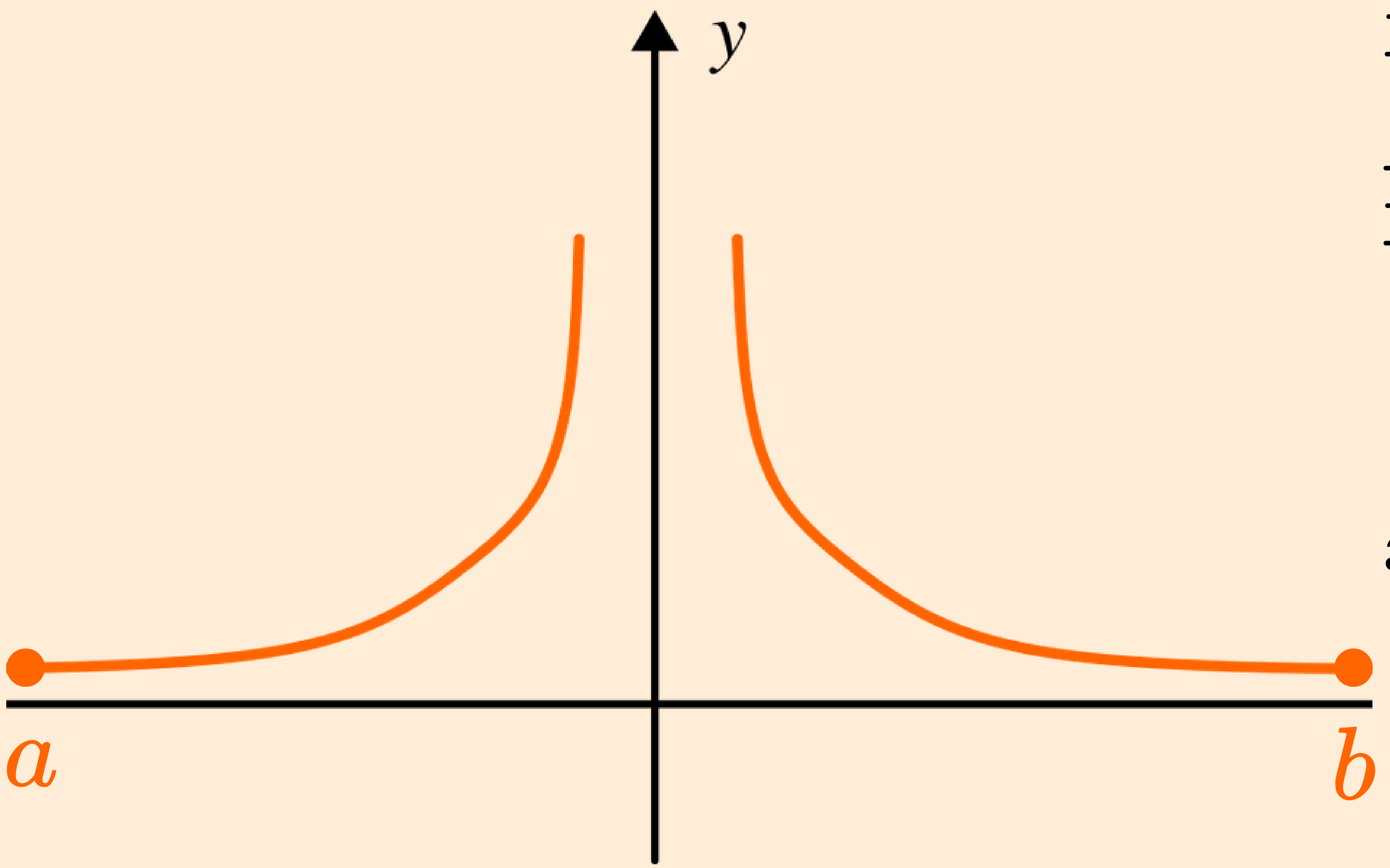


Teste de continuidade - extremidades

$$\exists f(b)$$

$$\exists \lim_{x \to b^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



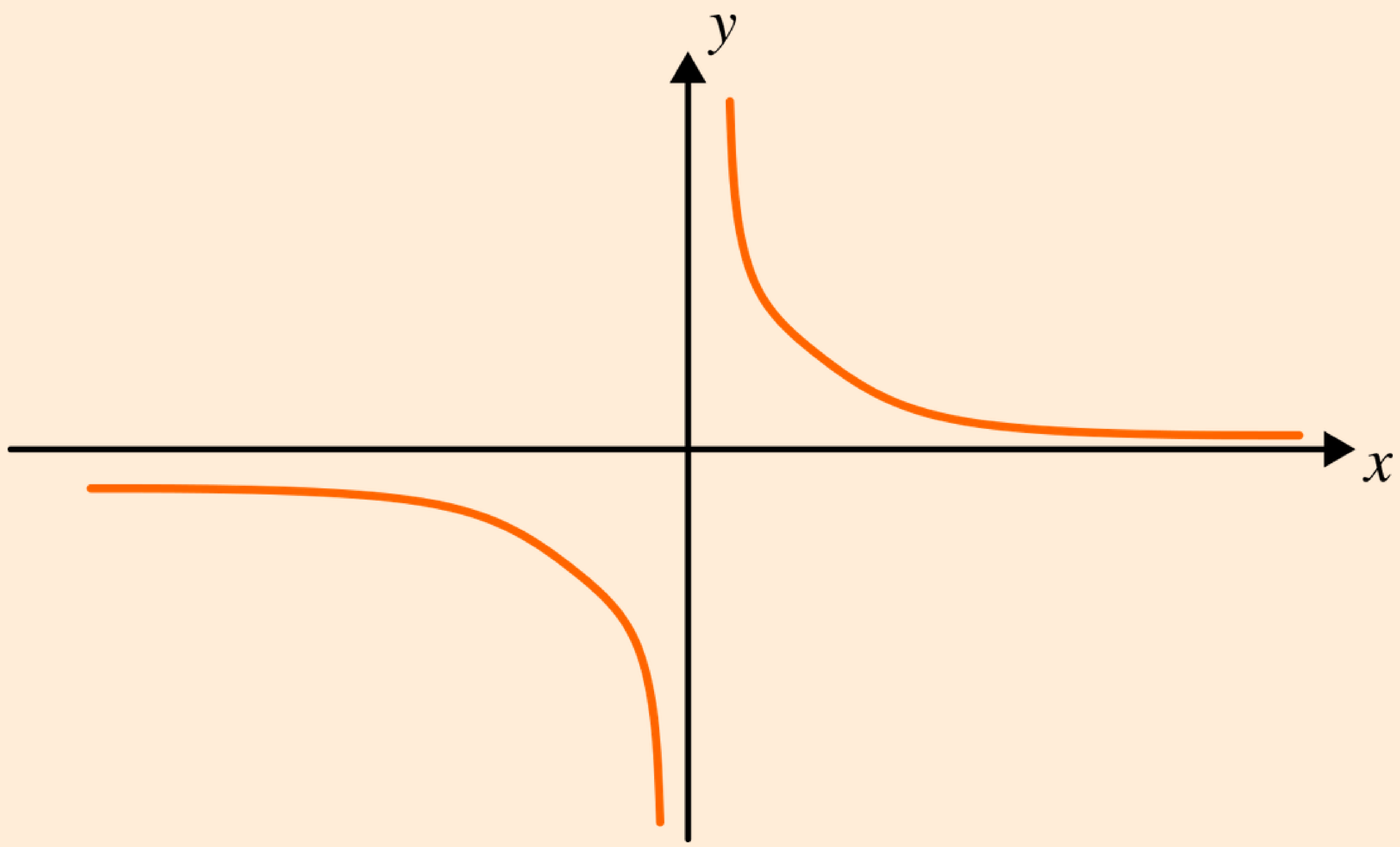
$$\exists f(a)$$

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Funções contínuas

Uma função é **contínua** em um intervalo se e somente se ela for contínua em **cada ponto** do intervalo.



$$y = \frac{1}{x}$$

$$D : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Funções contínuas

Exemplos: Estudar a continuidade ou descontinuidade das funções

$$\to f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, x \leq 0 \\ 2 - x, 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, x > 2 \end{cases}$$

$$\to f(x) = \begin{cases} x + 2, x < 0 \\ e^x, 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, x > 1 \end{cases}$$

Funções contínuas

Exemplos: Determinar c para que a função seja contínuas em todos os reais

$$\to f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x, x < 2 \\ x^3 - cx, x \geq 2 \end{cases}$$

Funções contínuas

Propriedades de funções contínuas: Se as função f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações também são contínuas nesse ponto

- Soma e diferença: $f \pm g$
- Produto: $f \cdot g$
- Multiplicação por uma constante: $k \cdot f, \forall k$
- Quociente: $f/g,\ g(c) \neq 0$
- Potenciação

$$f^{r/s},\ r, s \in \mathbb{Z}$$

Funções contínuas

Propriedades de funções contínuas: Se as função f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações também são contínuas nesse ponto

- Soma e diferença: $f \pm g$
- Produto: $f \cdot g$
- Multiplicação por uma constante: $k \cdot f, \forall k$
- Quociente: $f/g,\ g(c) \neq 0$
- Potenciação

$$f^{r/s},\ r, s \in \mathbb{Z}$$

Funções contínuas

Propriedades de funções contínuas:

- A função inversa de qualquer função contínua também é contínua.

Funções compostas

Todas as compostas de funções contínuas também são contínuas

Teorema: Se f é contínua em c e g é contínua em $f(c)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em c.

Funções compostas

Todas as compostas de funções contínuas também são contínuas

Teorema: Se f é contínua em c e g é contínua em $f(c)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em c .

Exemplos:

$$y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$$

$$y = \frac{x^{2/3}}{1 + x^4} \qquad y = \left| \frac{x - 2}{x^2 - 2} \right| \qquad y = \left| \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2} \right|$$

Funções compostas

Teorema: Se g é contínua no ponto b e

$$\lim_{x \to c} f(x) = b$$

então

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right)$$

Funções compostas

Exemplos:

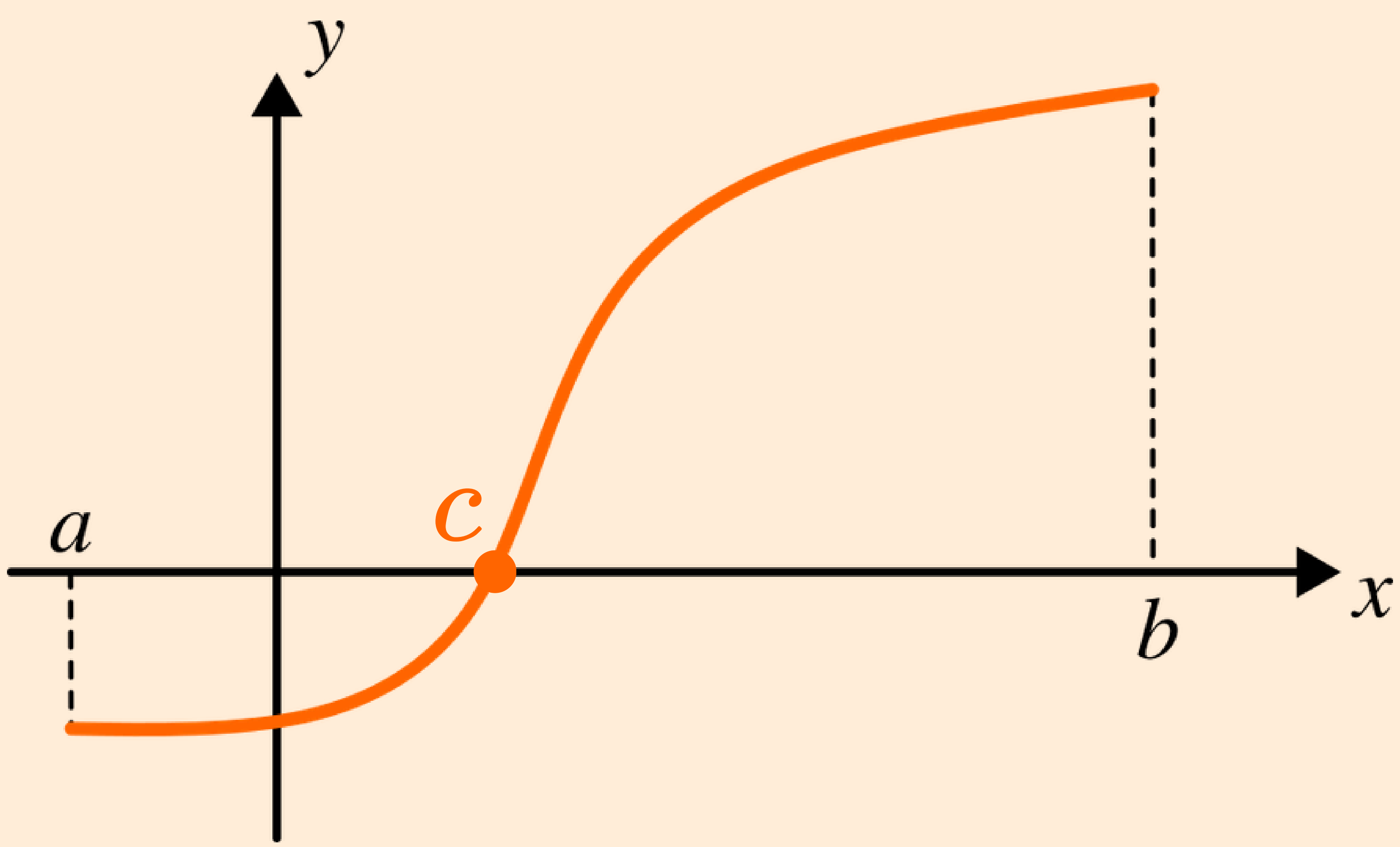
- $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-x^2}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1}\, e^{\operatorname{tg} x}$

Teoremas para funções contínuas

Teorema do anulamento ou de Bolzano

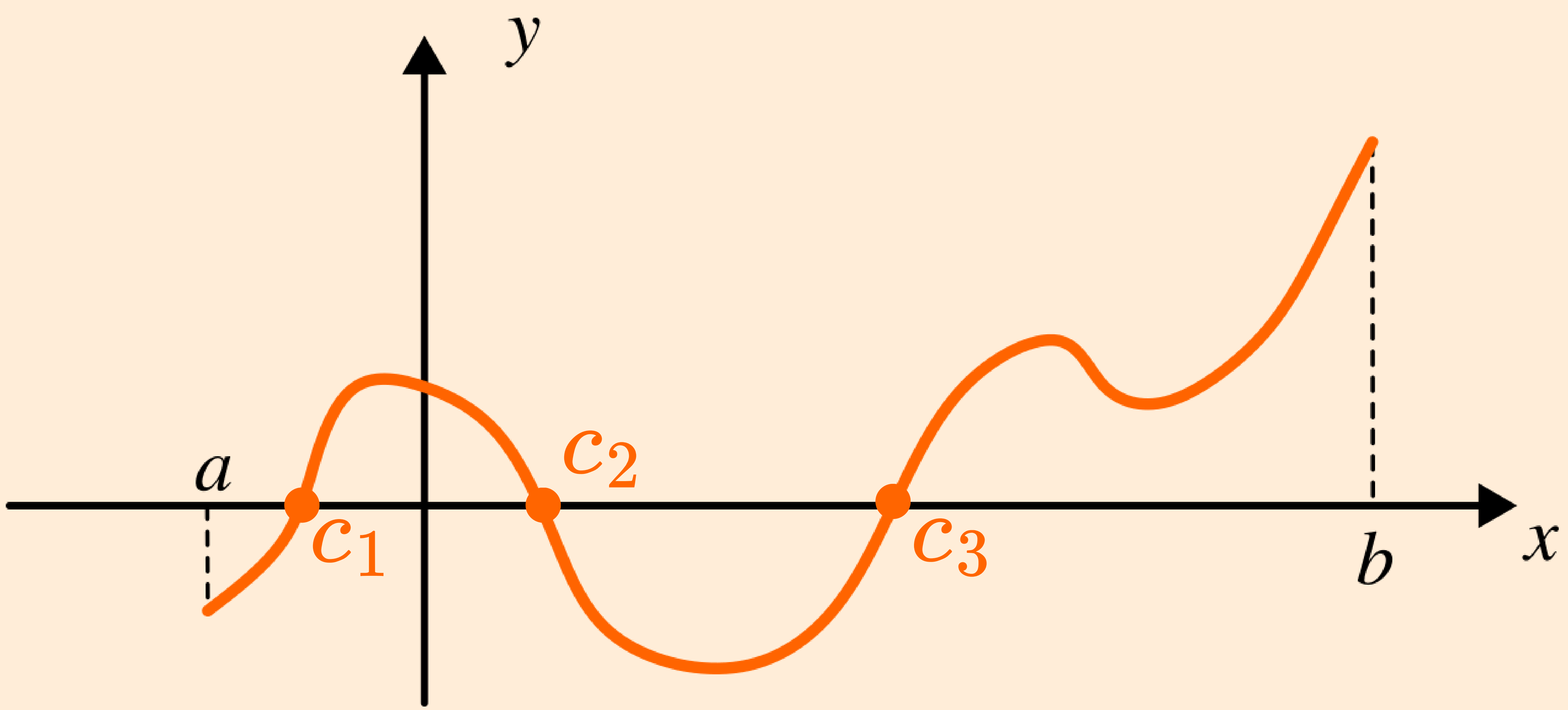
Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.



Teoremas para funções contínuas

Teorema do anulamento ou de Bolzano

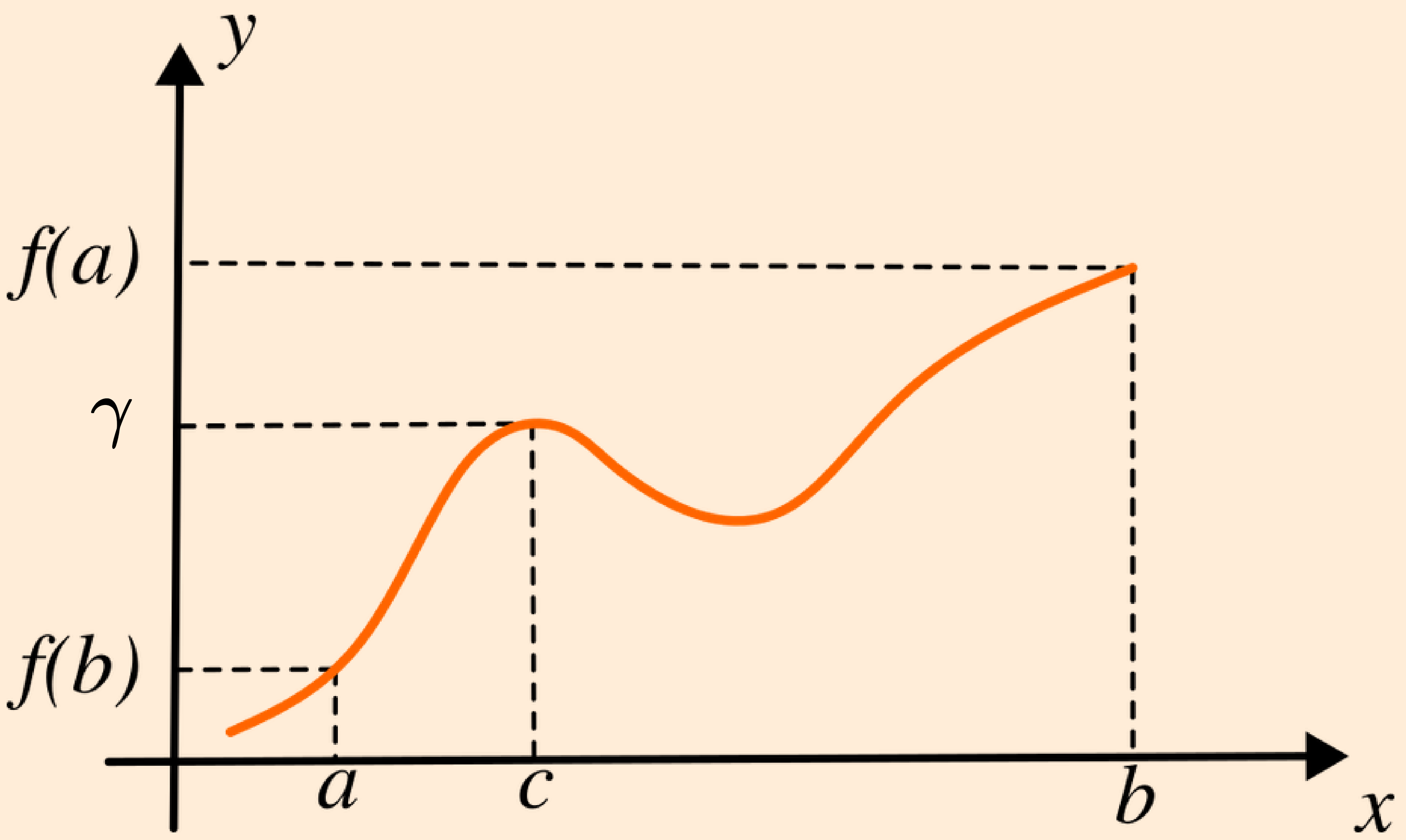
Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a)$e $f(b)$tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.



Teoremas para funções contínuas

Teorema do valor intermediário

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.



Teoremas para funções contínuas

Exemplo: Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

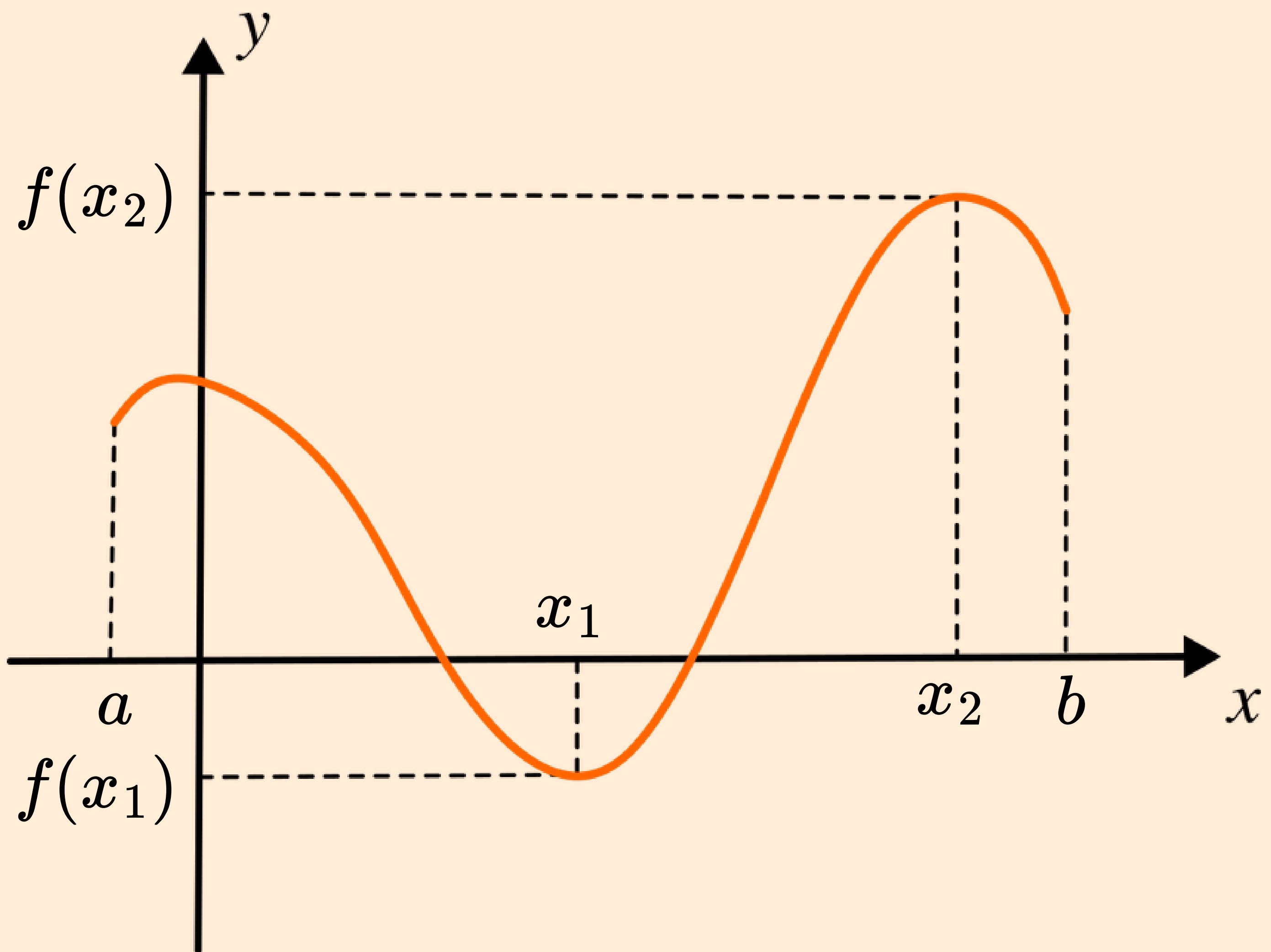
$$\rightarrow x^4 + x - 3 = 0, \qquad (1,2)$$

$$\rightarrow \cos x = x, \qquad (0,1)$$

Teoremas para funções contínuas

Teorema de Weierstrass

Se f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que

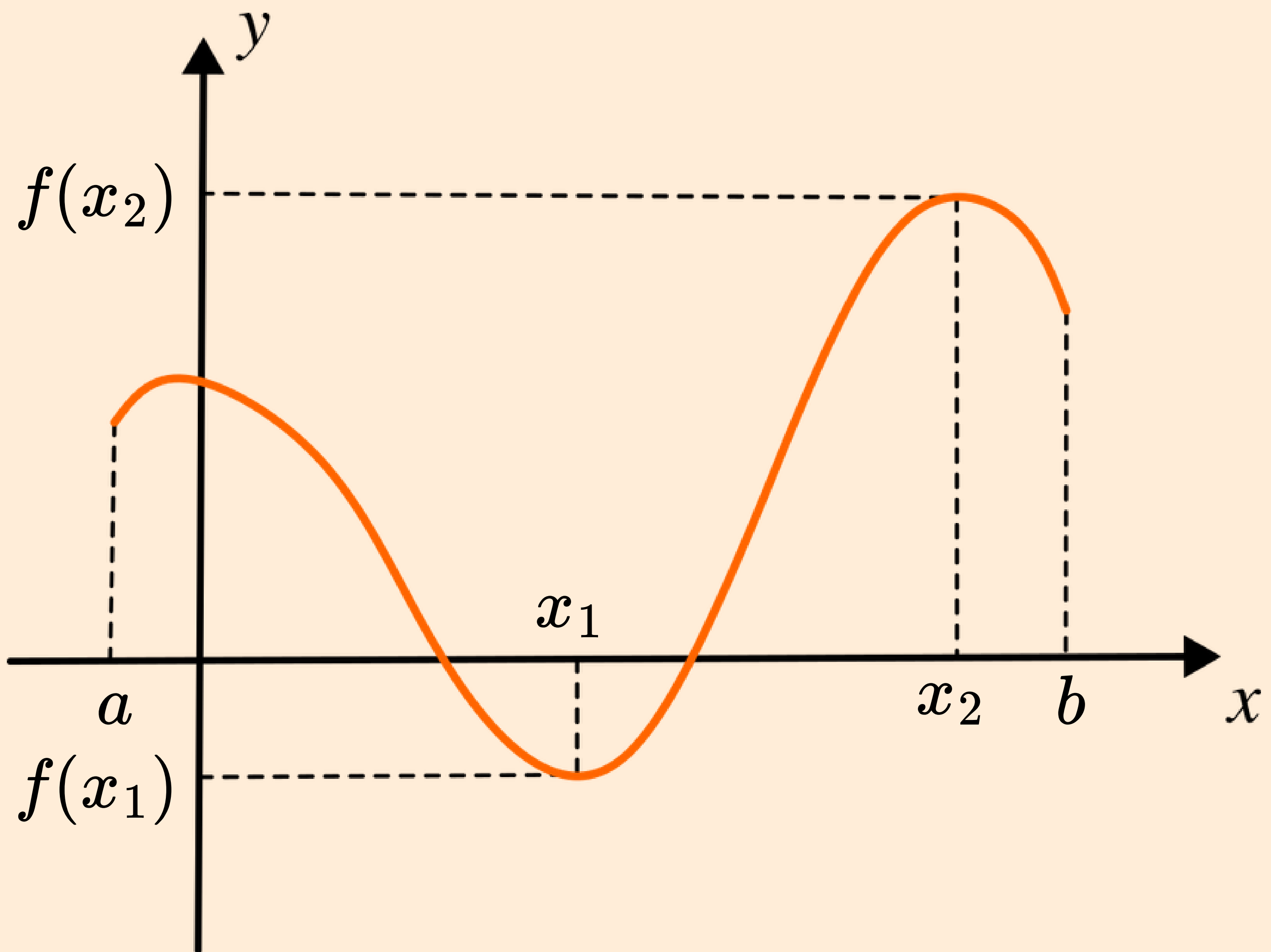


$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a,b]$$

Teoremas para funções contínuas

Teorema de Weierstrass

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que



$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$$

Teorema do valor extremo