Revisão

→ Conjuntos numéricos e números reais

Chama-se conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Duas operações são definidas: adição e multiplicação.

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é definido por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Há três subconjuntos notáveis:

1) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$
2) $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$
3) $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

Neste conjunto, também temos as operações adição e multiplicação.

- Elemento simétrico ou oposto para a adição:

$$a + (-a) = 0$$

Em $\mathbb{Z}$, temos a definição da operação de subtração:

$$a - b = a + (-b)$$

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é formado pelas frações a/b, em que o numerador $a \in \mathbb{Z}$ e o denominador $b \in \mathbb{Z}^*$. Neste conjunto, também temos as operações de adição e multiplicação, definidas como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Também temos a relação de igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = b.c$$

- Elemento simétrico / inverso para a multiplicação:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \text{com} \quad \frac{a}{b} \neq 0$$

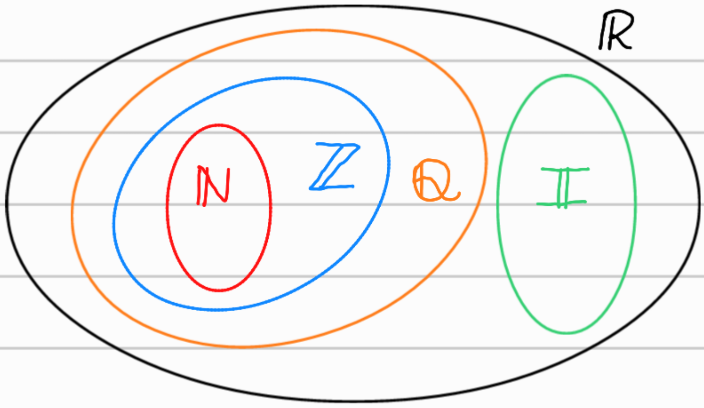
Assim, podemos definir a operação de divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

O conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ é composto pelos números que não podem ser representados por frações a/b. São números com infinitas casas decimais que não se repetem. Por exemplo:

$$\pi = 3,14159\ldots$$
$$e = 2,71828\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$$

Por fim, temos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ formado pela união dos números racionais $\mathbb{Q}$ e irracionais $\mathbb{I}$. De forma esquemática, temos



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

→ Álgebra

- Leis de comutatividade
  - $a + b = b + a$
  - $ab = ba$

- Leis associativas
  - $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - $a(bc) = (ab)c$

- Leis distributivas
  - $a(b + c) = ab + ac$
  - $(a + b)c = ac + bc$

- Leis de identidade
  - $a+0 = 0+a = a$
  - $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- Leis de inverso
  - $a+(-a) = (-a)+a = 0$
  - $a \cdot a^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot a = a^{-1}a = 1$

- Lei de fator zero
  - $a \cdot 0 = 0$
  - se $a \cdot b = 0$, $a=0$ ou $b=0$

- Leis para quocientes
  - $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\left(\dfrac{-a}{-b}\right)$
  - $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$
  - $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$
  - $\dfrac{a}{b} = \dfrac{Ka}{Kb}$, $\forall K \neq 0$.

→ Potenciação com expoentes inteiros

Sejam u um número real, uma variável ou uma expressão algébrica, e n um número inteiro positivo. Então

$$u^n = \underbrace{u \cdot u \cdot u \cdot u \ldots u}_{n \text{ vezes}}$$

onde n é o expoente, u é a base e u^n é a n-ésima potência de u.

→ Propriedades de potenciação

- $u^m \cdot u^n = u^{m+n}$
- $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$
- $u^0 = 1$
- $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$
- $(uv)^m = u^m v^m$
- $(u^m)^n = u^{m \cdot n}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$

- 0^0 não é definido

→ Potências com expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica, e n um inteiro maior do que 1. Então

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se n é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais. Assim:

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Exemplos:

- $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$
- $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5} = 3\sqrt[5]{x^7}$

• Racionalização

A racionalização é o processo de retirar as raízes do denominador das frações. Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ para eliminar o radical do denominador.

- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x}$

→ Logaritmo

Sendo a e b números reais positivos com $b \neq 1$, chamamos de logaritmo de a na base b o expoente real x ao qual se eleva b para obter a, ou seja,

$$\log_b a = x \longleftrightarrow b^x = a, \quad a > 0,\ b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Os números 10 e e são bases especiais

- $\log_{10} x = \log x$
- $\log_e x = \ln x$

Pela definição, temos

- $\log_b 1 = 0 \rightarrow b^0 = 1$
- $\log_b b = 1 \rightarrow b^1 = b$
- $\log_b b^m = m$
- $b^{\log_b a} = a \rightarrow$ sendo $x = \log_b a$, $b^x = a$

→ Propriedades operatórias

- $\log_b (a c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b \left(\dfrac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$
- $\log_b a^m = m \log_b a$

→ Polinômios

Um polinômio em x é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais chamados coeficientes.

↳ O grau do polinômio é n, e o coeficiente principal é o número real a_n.

• Soma e subtração

Para somar ou subtrair polinômios, deve-se somar ou subtrair apenas termos semelhantes (termos com o mesmo expoente na variável).

$$(6x^3 + 2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 2) = (6+2)x^3 + (2-4)x^2 + (-3+2)x + (1-2)$$
$$= 8x^3 - 2x^2 - x - 1$$

• Multiplicação

É necessário realizar a multiplicação entre todos os termos

$$(x^2 + 2x)(x^3 + 3x + 1) = x^2(x^3 + 3x + 1) + 2x(x^3 + 3x + 1)$$
$$= x^2 x^3 + x^2 3x + x^2 \cdot 1 + 2x\, x^3 + 2x\, 3x + 2x \cdot 1$$
$$= x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x^4 + 6x^2 + 2x = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 2x$$

• Divisão

Em uma divisão, temos

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{quociente} \\ \text{resto} & \end{array} \longrightarrow \boxed{\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{quociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}}$$

Como exemplo, mostramos a divisão $\dfrac{5x^3+4-3x}{x^2-x+1}$:

1) $5x^3+4-3x = 5x^3+0x^2-3x+4$

2)
$$\begin{array}{rrrr|l} 5x^3 & +0x^2 & -3x & +4 & x^2-x+1 \\ \cline{5-5} -5x^3 & +5x^2 & -5x & & 5x+5 \\ \cline{1-3} 0 & +5x^2 & -8x & +4 & \\ & -5x^2 & +5x & -5 & \\ \cline{2-4} & 0 & -3x & -1 & \end{array}$$

3) $$\boxed{\frac{5x^3+4-3x}{x^2-x+1} = 5x+5 + \frac{(-3x-1)}{x^2-x+1}}$$

• Produtos notáveis

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

• Fatoração

Fatorar um polinômio é escrever um produto de dois ou mais fatores polinomiais.

- $2x^2 + 7x - 4 = (2x-1)(x+4)$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$
- $x^3 - 9x = x(x^2-9) = x(x+3)(x-3)$

→ Expressões racionais

Para simplificar uma expressão racional, eliminamos todos os fatores comuns do numerador e denominador até que a expressão fique em uma forma mais simples, na forma reduzida.

Exemplos:

- $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \dfrac{x}{x+3}, \quad x \neq \pm 3$
- $\dfrac{2x^2+11x-21}{x^3+2x^2+4x} \cdot \dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14} = \dfrac{2x-3}{x}, \quad x \neq 2,\ x \neq -7,\ x \neq 0$
- $\dfrac{2}{x^2-2x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2-4} = \dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)}, \quad x \neq 0,\ x \neq \pm 2$

→ Equações

Uma equação é uma igualdade que se verifica apenas para valores específicos das variáveis. Por exemplo, a igualdade

$$3x + 2 = 5$$

só é válida quando $x = 1$.

Um número é dito ser raiz de uma equação se ele torna a igualdade verdadeira quando substituído no lugar da variável / incógnita.

- Equação de primeiro grau

$$ax + b = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{-b}{a}}$$

- Equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

→ Valor absoluto

Seja x um número real, definimos o <u>módulo</u> (ou valor absoluto) de x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $|x| \geq 0$ para todo número x real.

→ Inequações

Inequações são todas as sentenças matemáticas expressas por uma desigualdade, isto é,

$$f(x) > c, \quad f(x) < c, \quad f(x) \geq c, \quad f(x) \leq c.$$

• Inequação linear

Uma inequação linear em x pode ser escrita nas seguintes formas:

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0 \quad \text{ou} \quad ax + b \leq 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Exemplos:

- $\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} \longrightarrow x > -2$

- $-3 < \dfrac{2x+5}{3} \leq 5 \longrightarrow -7 < x \leq 5$

• Inequações com valor absoluto

Exemplo: $|x-4| < 8$

$|x-4| < 8 \longrightarrow -8 < x-4 < 8$

$-8+4 < x-4+4 < 8+4$

$-4 < x < 12$

Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 12\}$ ou $(-4, 12)$

Exemplo: $|3x-2| \geq 5$

$3x-2 \leq -5$ ou $3x-2 \geq 5$

$3x \leq -3$ ou $3x \geq 7$

$x \leq -1$ ou $x \geq \frac{7}{3}$

Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1$ ou $x \geq 7/3\}$, ou $(-\infty, -1] \cup [7/3, \infty)$.

• Inequações quadráticas

Exemplos:

• $x^2 - x - 12 > 0$

$x^2 - x - 12 = 0 \longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \rightarrow x = 4$, $x = -3$

Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3$ ou $x > 4\}$, ou $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$

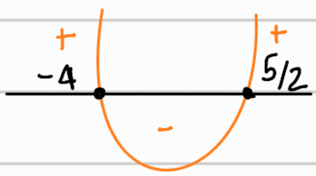
- $2x^2 + 3x \leq 20$

$$2x^2 + 3x - 20 = 0 \longrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = -4 \quad e \quad x_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 3x - 20 = (x+4)(x - 5/2) = 0 \rightarrow (x+4)\frac{(2x-5)}{2} = 0$$

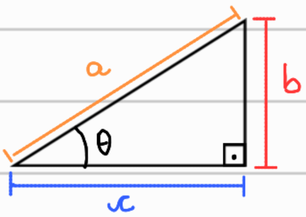
$$(x+4)(2x-5) = 0$$



Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \leq x \leq 5/2\}$ ou $[-4, 5/2]$

→ Trigonometria

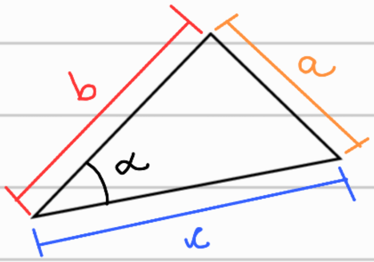
- **Triângulo retângulo**



$\boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{b}{a}}$, $\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a}}$, $\boxed{\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{c}}$

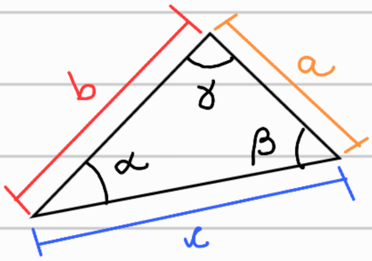
$$\boxed{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1} //$$

• Lei dos cossenos



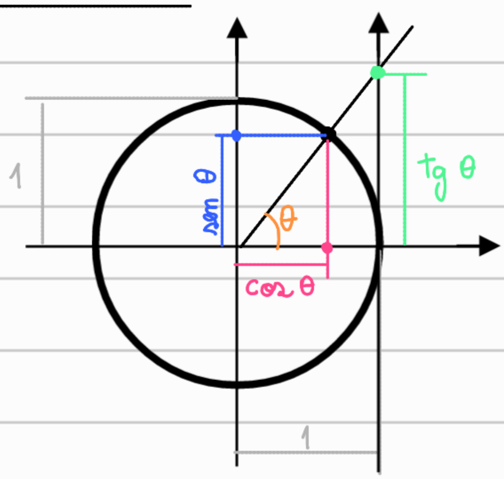
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

• Lei dos senos



$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

• Círculo unitário



• Algumas identidades

→ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

→ $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

→ $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$

→ $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

• Funções recíprocas

$$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}, \quad \boxed{\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}, \quad \boxed{\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}}$$

→ Intervalos

Intervalos são subconjuntos, uma coleção específica de números dentro do conjunto dos números reais. Considerando dois números reais a e b, com $a < b$. Temos os possíveis intervalos

• Intervalo fechado

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

• Intervalo aberto

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

• Intervalo semiaberto

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

- ## Intervalos infinitos

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$