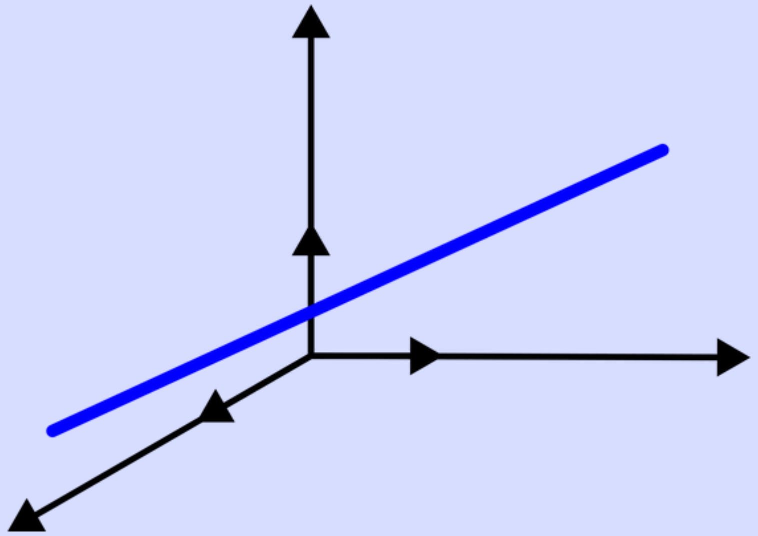
A reta

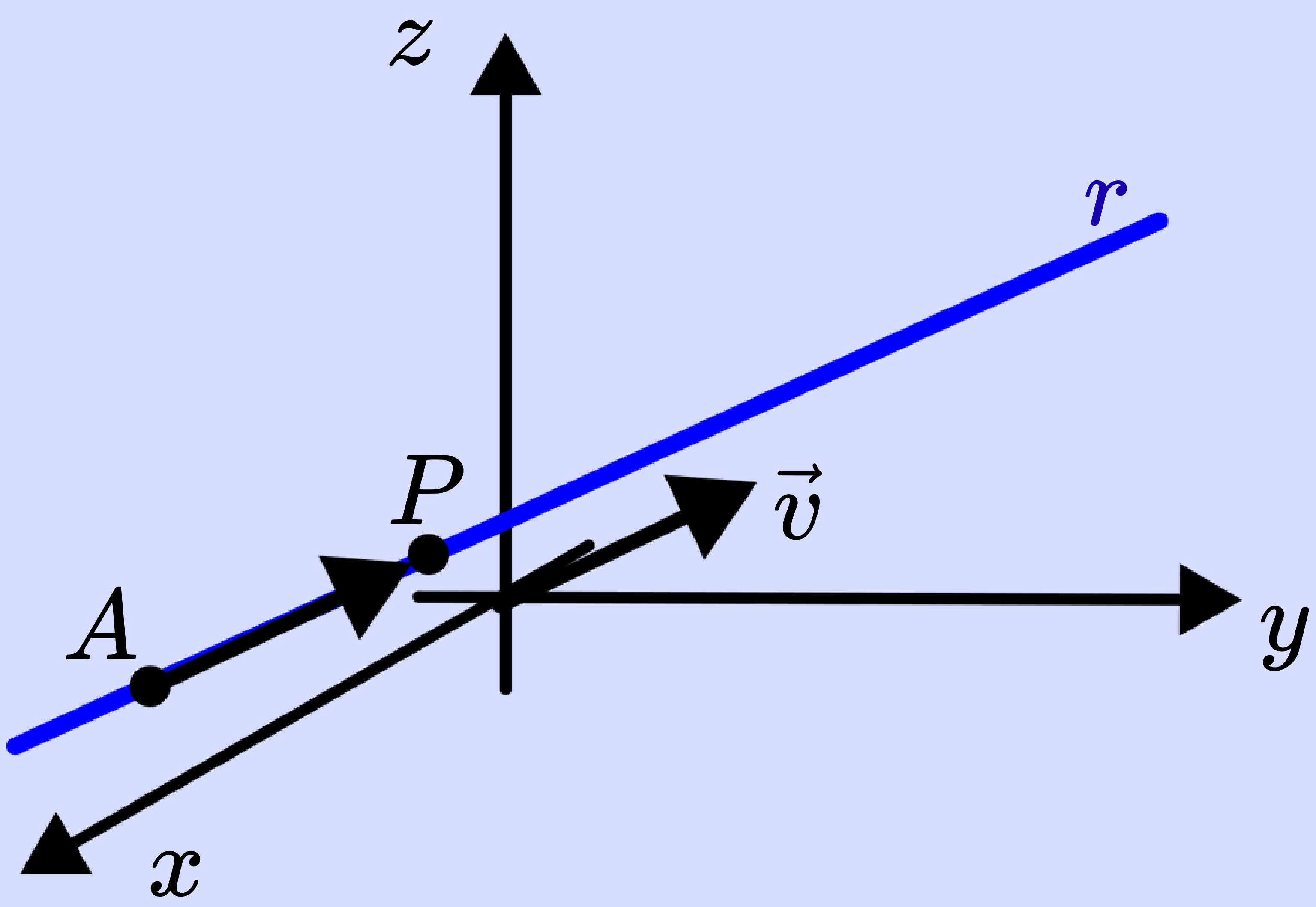


https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/GA

- STEINBRUCH , Alfredo and WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. McGRAW-HILL, 2a edição, 1987.

Equação vetorial da reta

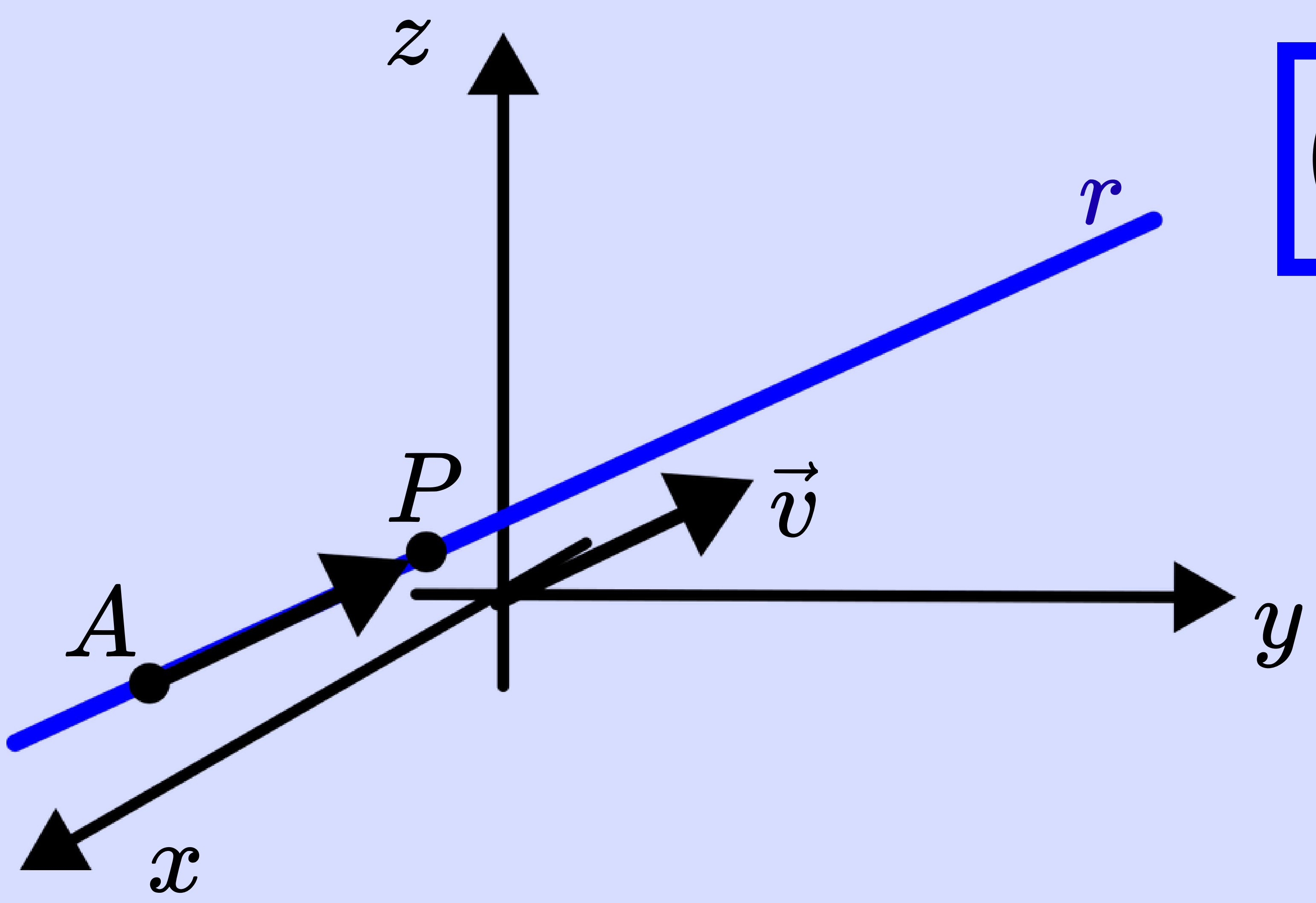
Seja r uma **reta** que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à reta r, é necessário que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam **colineares.**



$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\vec{v}}$$

Equação vetorial da reta

Seja r uma **reta** que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor <u>não nulo</u> $\vec{v}$. Para que um ponto P do <u>espaço</u> pertença à reta r, é necessário que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam **colineares.**



$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

$$P(x, y, z)$$

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

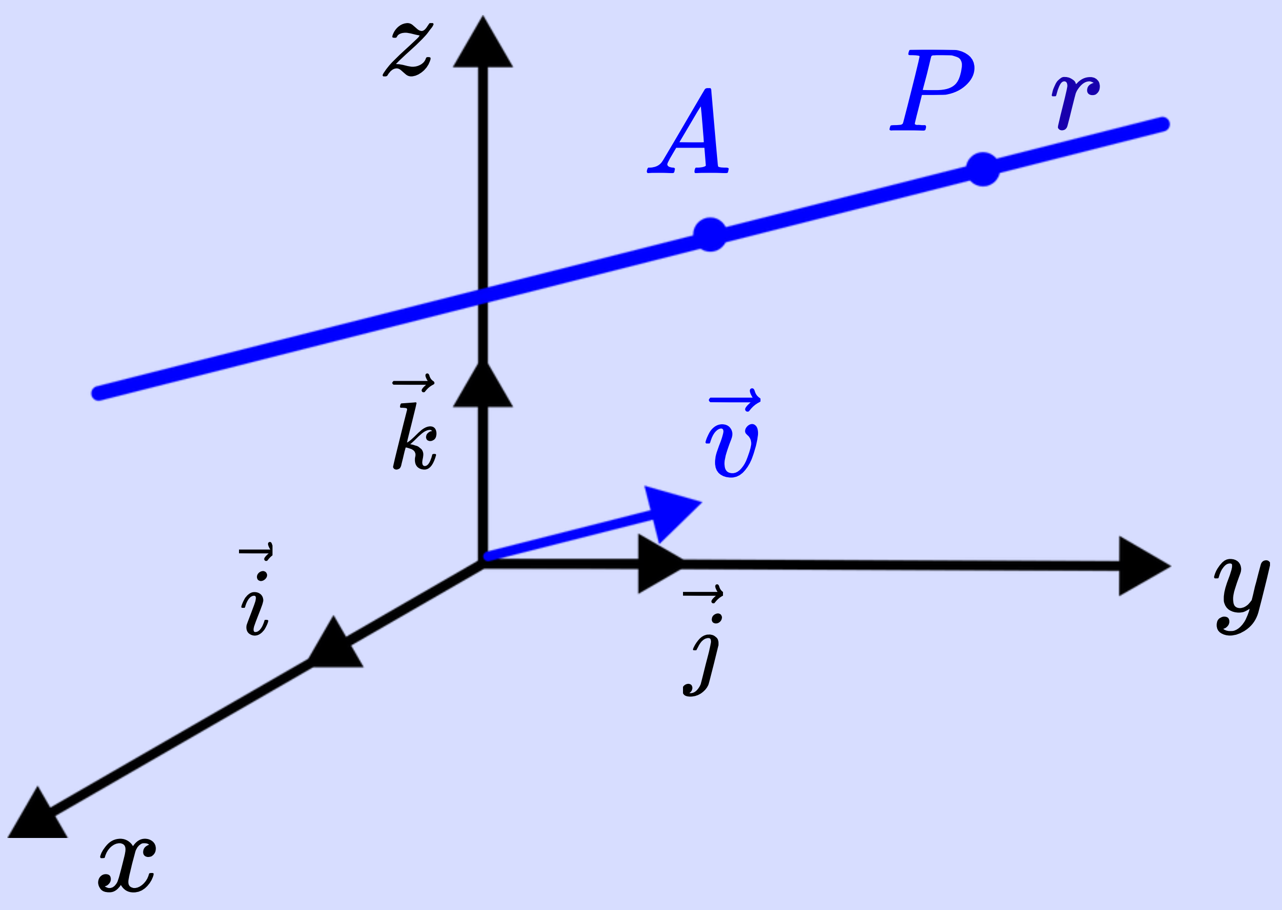
$$\vec{v} = (a, b, c)$$

Equação vetorial da reta

Exemplo: Determinar a equação vetorial da reta que passa pelo ponto A(3,0,-5) e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

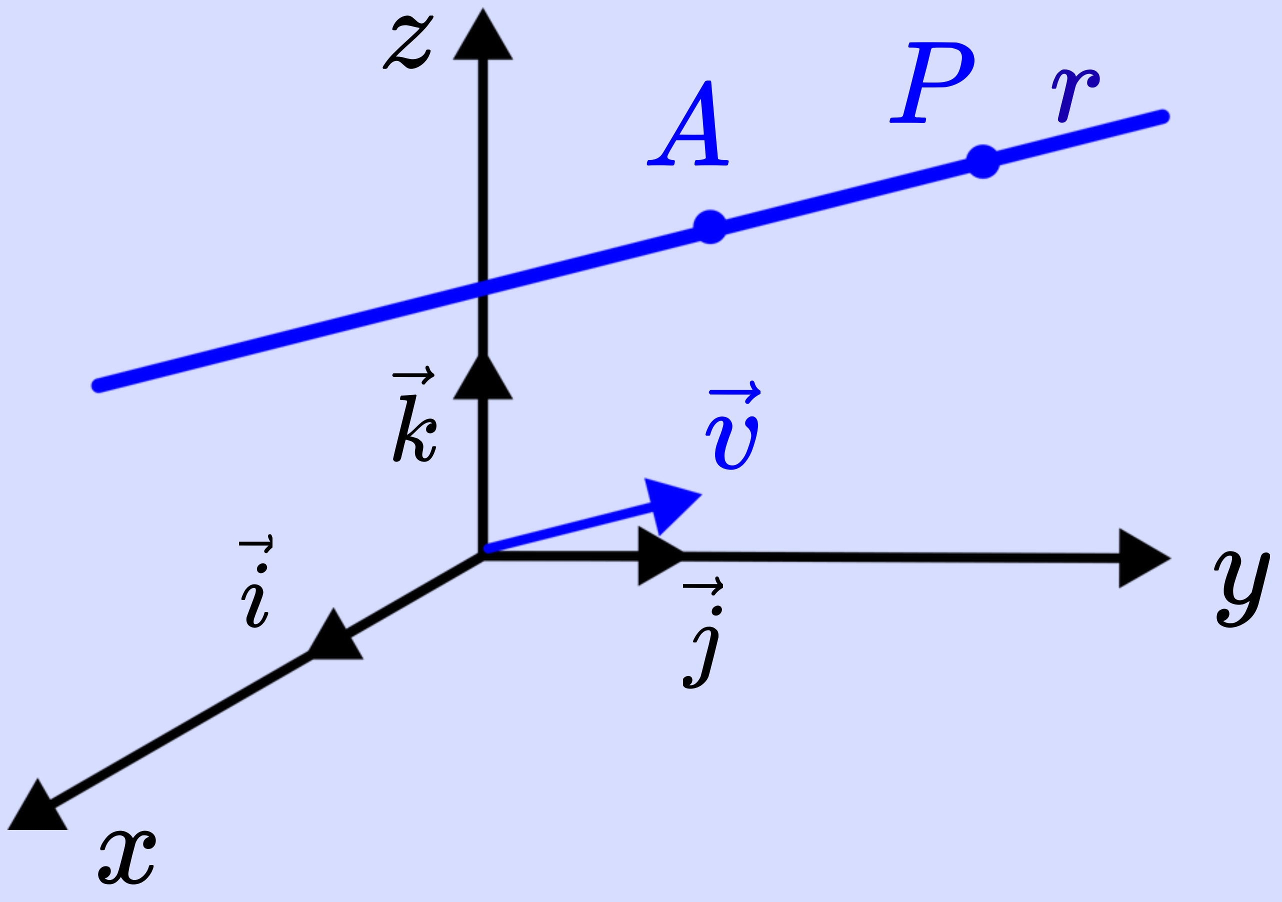
Equações paramétricas da reta

- Sistema de coordenadas: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Ponto genérico: $P(x, y, z)$
- Ponto dado: $A(x_1, y_1, z_1)$
- Vetor com a mesma direção da reta: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$



Equações paramétricas da reta

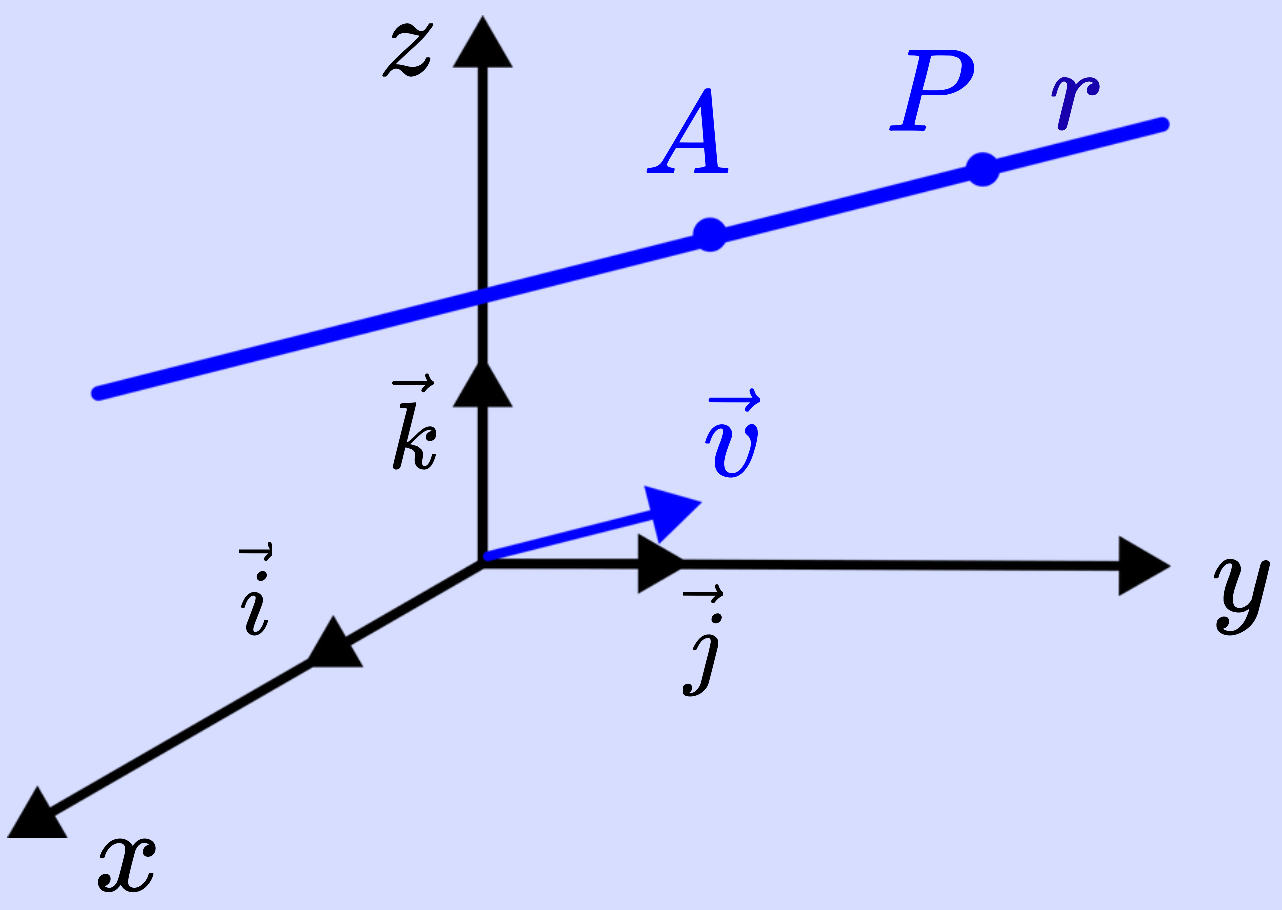
- Sistema de coordenadas: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Ponto genérico: $P(x, y, z)$
- Ponto dado: $A(x_1, y_1, z_1)$
- Vetor com a mesma direção da reta: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$



$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}}$$

Equações paramétricas da reta

Exemplo: Equações paramétricas da reta que passa pelo ponto A(3,-1,2) e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3, -2, 1)$.



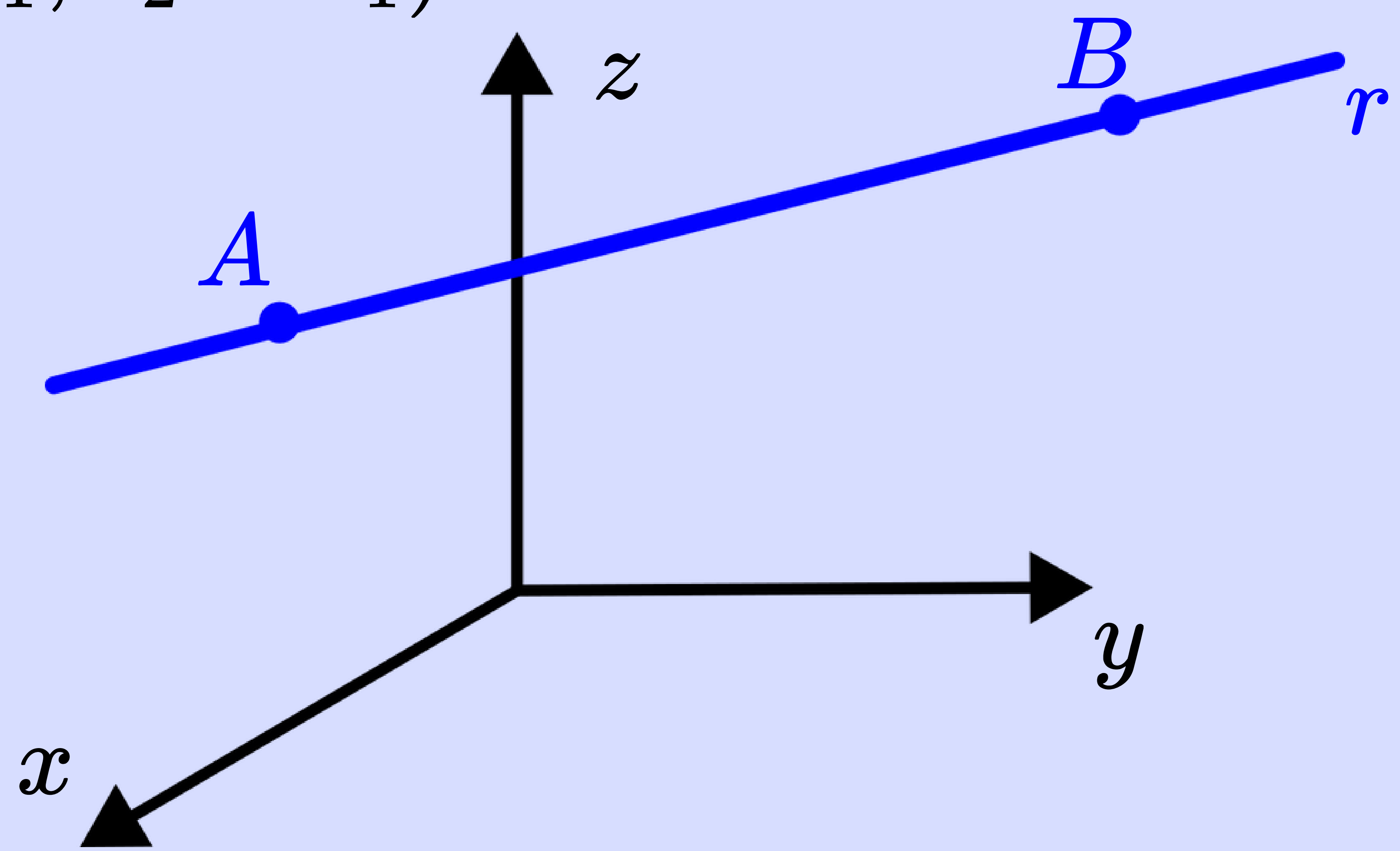
Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad\qquad B(x_2, y_2, z_2)$$

é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor

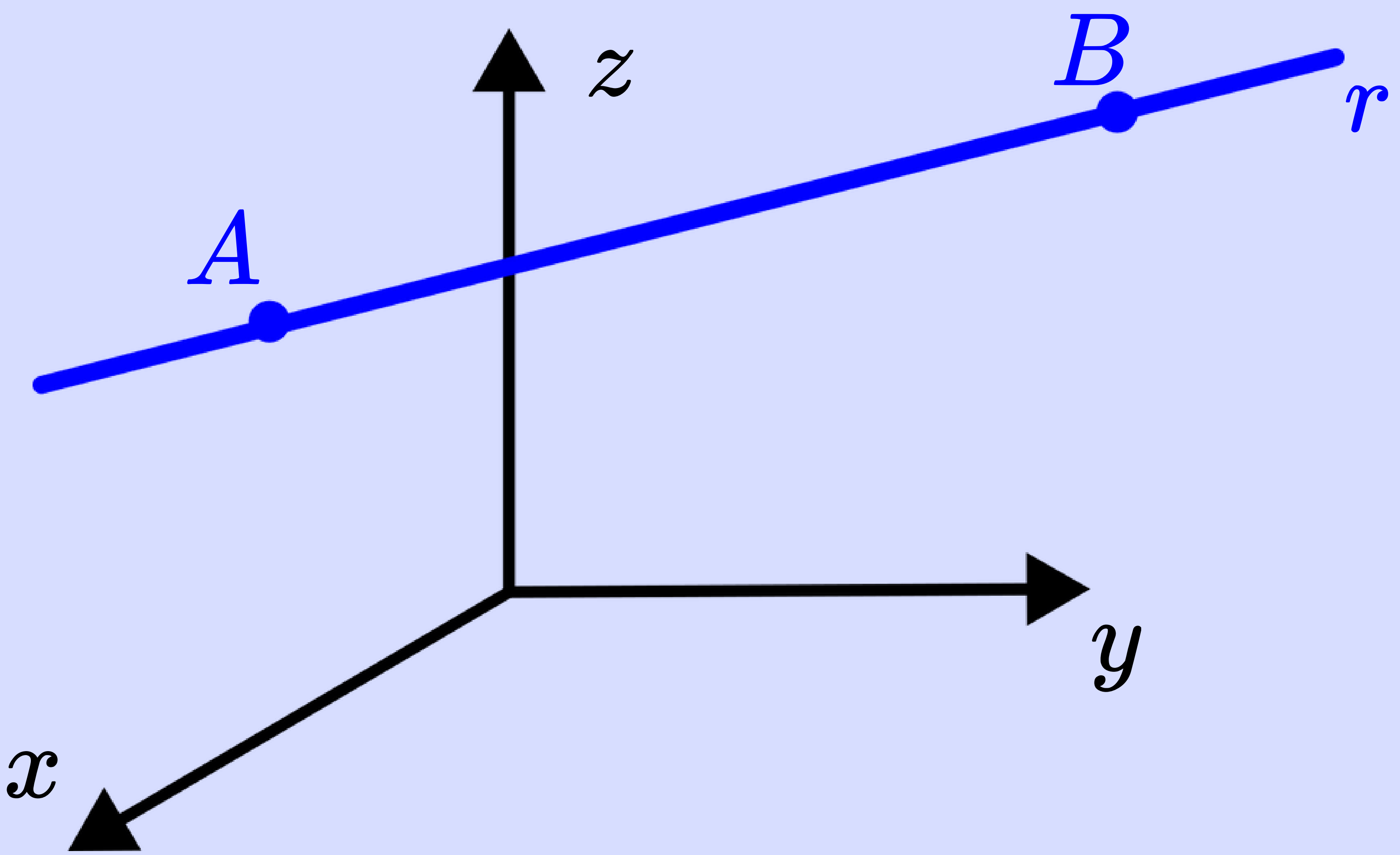
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Reta definida por dois pontos

Exemplo: Reta determinada pelos pontos

$$A(1, -2, -3) \qquad\qquad B(3, 1, -4)$$



Equações simétricas da reta

Isolando o parâmetro t das equações paramétricas da reta, encontramos as equações simétricas.

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Equações simétricas da reta

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Estas equações são denominadas **simétricas** ou **normais** de uma reta que passa por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Equações simétricas da reta

Exemplo: Equações da reta que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Equações simétricas da reta

- Se a reta é determinada pelos pontos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad\qquad B(x_1, y_2, z_2)$$

as equações simétricas podem ser escritas como

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Equações simétricas da reta

Exemplo: Reta que passa pelos pontos

$$A(2, 1, -3) \qquad B(4, 0, -2)$$

Condição para que três pontos estejam em linha reta

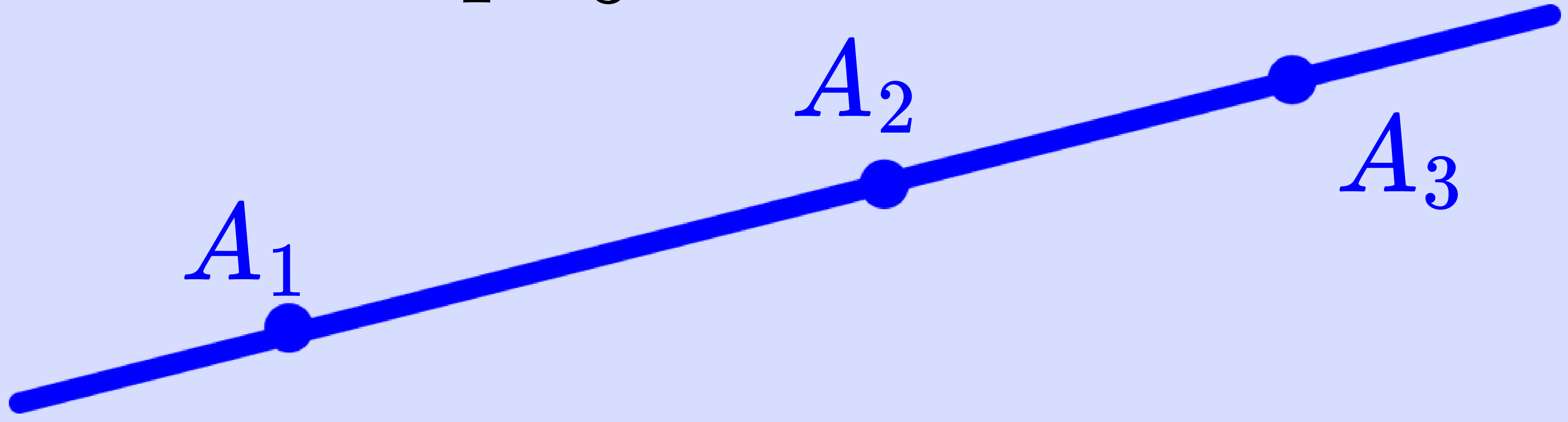
- A condição para que três pontos

$$A_1(x_1, y_1, z_1) \qquad A_2(x_2, y_2, z_2) \qquad A_3(x_3, y_3, z_3)$$

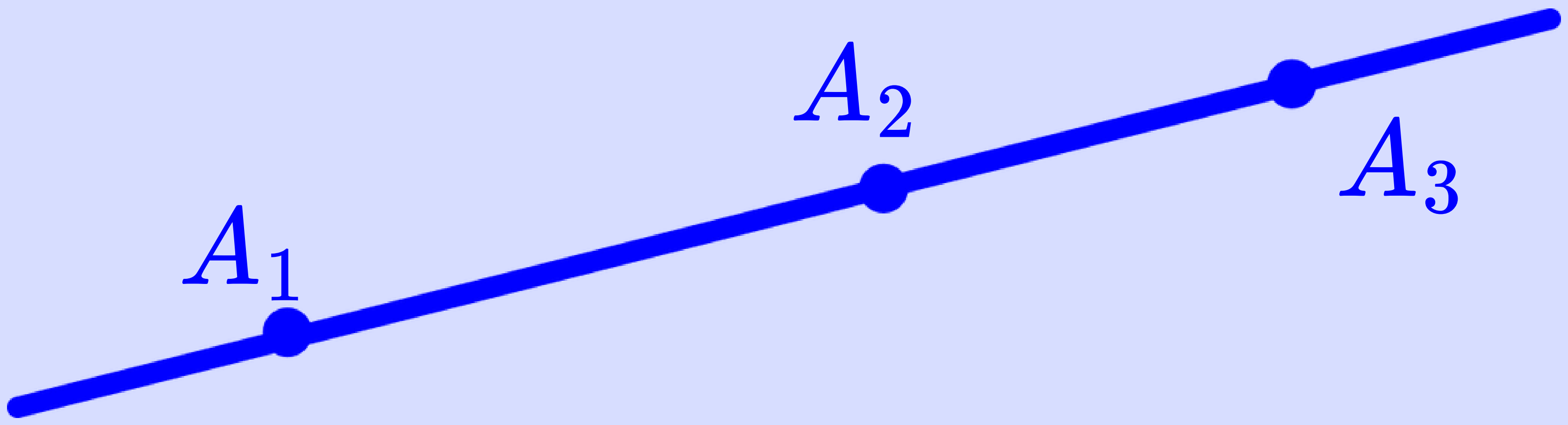
estejam em linha reta, é que os vetores

$$\overrightarrow{A_1A_2} \qquad \overrightarrow{A_1A_3}$$

sejam colineares.



Condição para que três pontos estejam em linha reta



$$\overrightarrow{A_1A_2} = m\overrightarrow{A_1A_3}, \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}}$$

Condição para que três pontos estejam em linha reta

Exemplo: Analisar os pontos

$$A_1(5, 2, -6) \qquad A_2(-1, -4, -3) \qquad A_3(7, 4, -7)$$

Equações reduzidas da reta

A partir das equações simétricas

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

podemos escrever equações de duas coordenadas em função da terceira.

Equações reduzidas da reta

A partir das equações simétricas

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

podemos escrever equações de duas coordenadas em função da terceira.

$$\boxed{y = mx + n} \qquad \boxed{z = px + q}$$

Equações reduzidas da reta

Exemplo: Estabelecer as equações reduzidas da reta que passa pelos pontos

$$A(2, 1, -3) \qquad\qquad B(4, 0, -2)$$

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Equações da reta:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Sempre consideramos que as componentes do vetor são diferentes de zero

- Entretanto, uma ou duas destas componentes podem ser nulas.

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

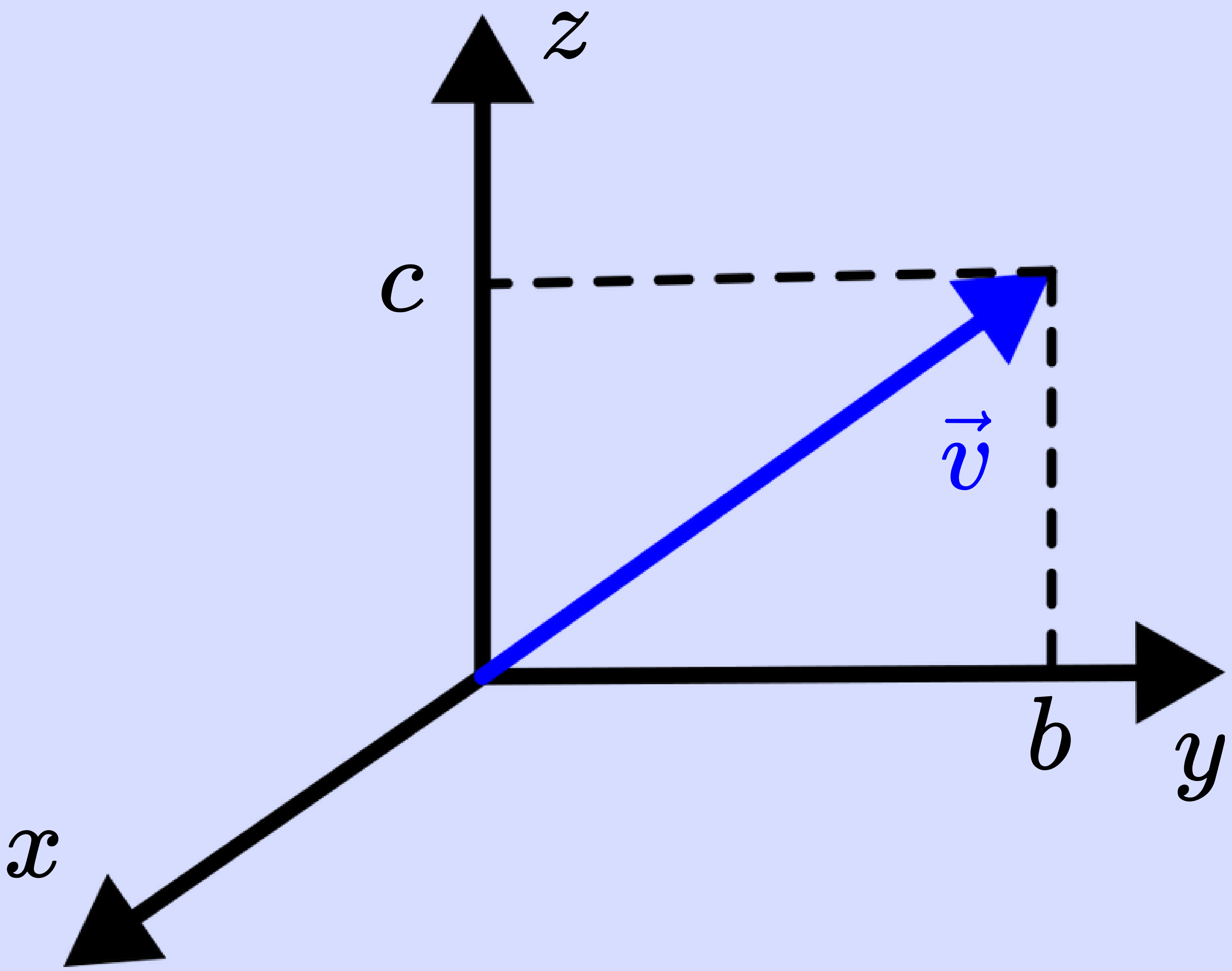
Caso 1: uma das componente do vetor é nula

Nesse caso, o vetor é **ortogonal** a um dos **eixos coordenados**, logo, a **reta r** é **paralela** ao **plano** formado pelos outros eixos.

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $a = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, b, c) \Longrightarrow r \parallel yOz$

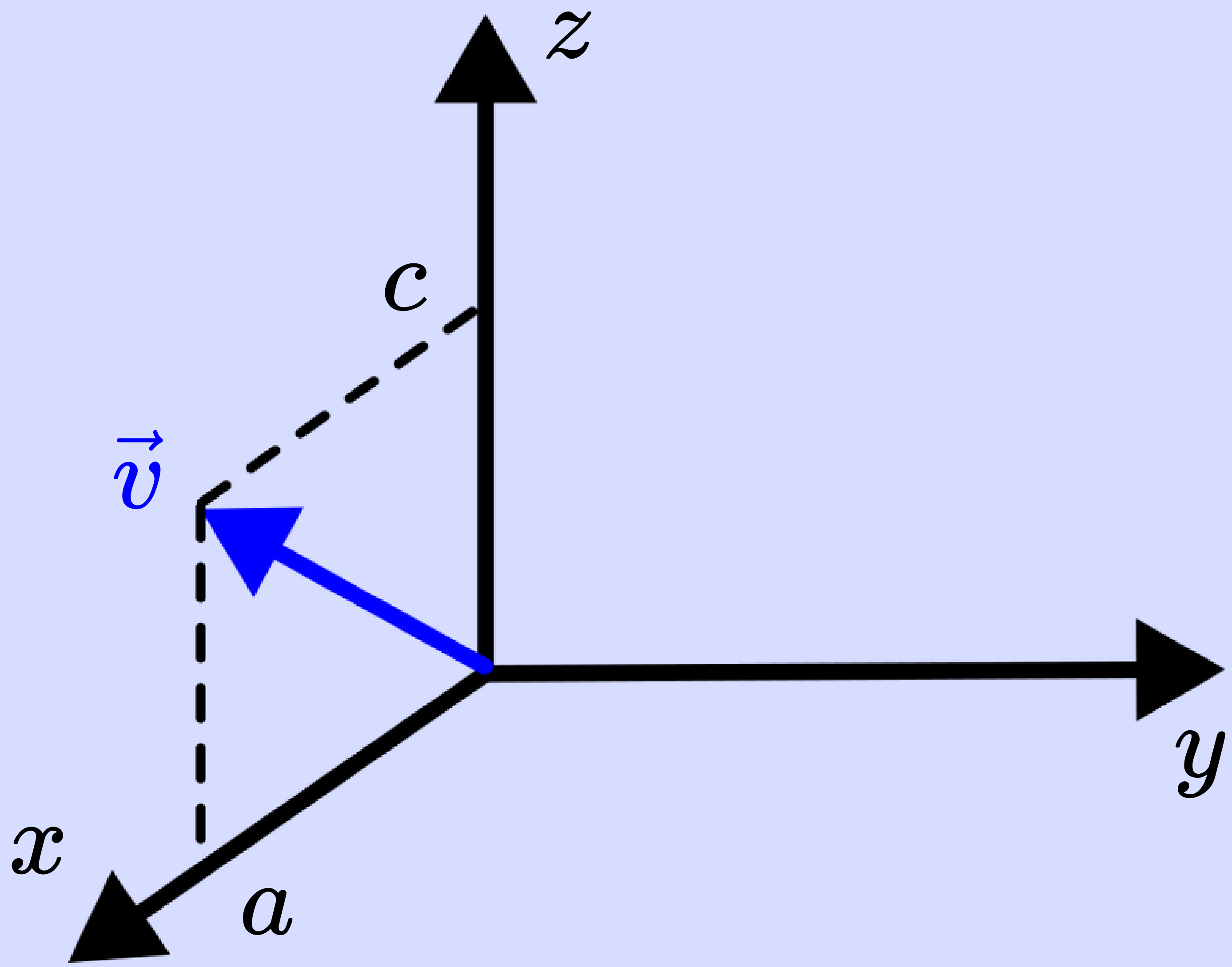
$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $b = 0 \longrightarrow \vec{v} = (a, 0, c) \Longrightarrow r \parallel xOz$

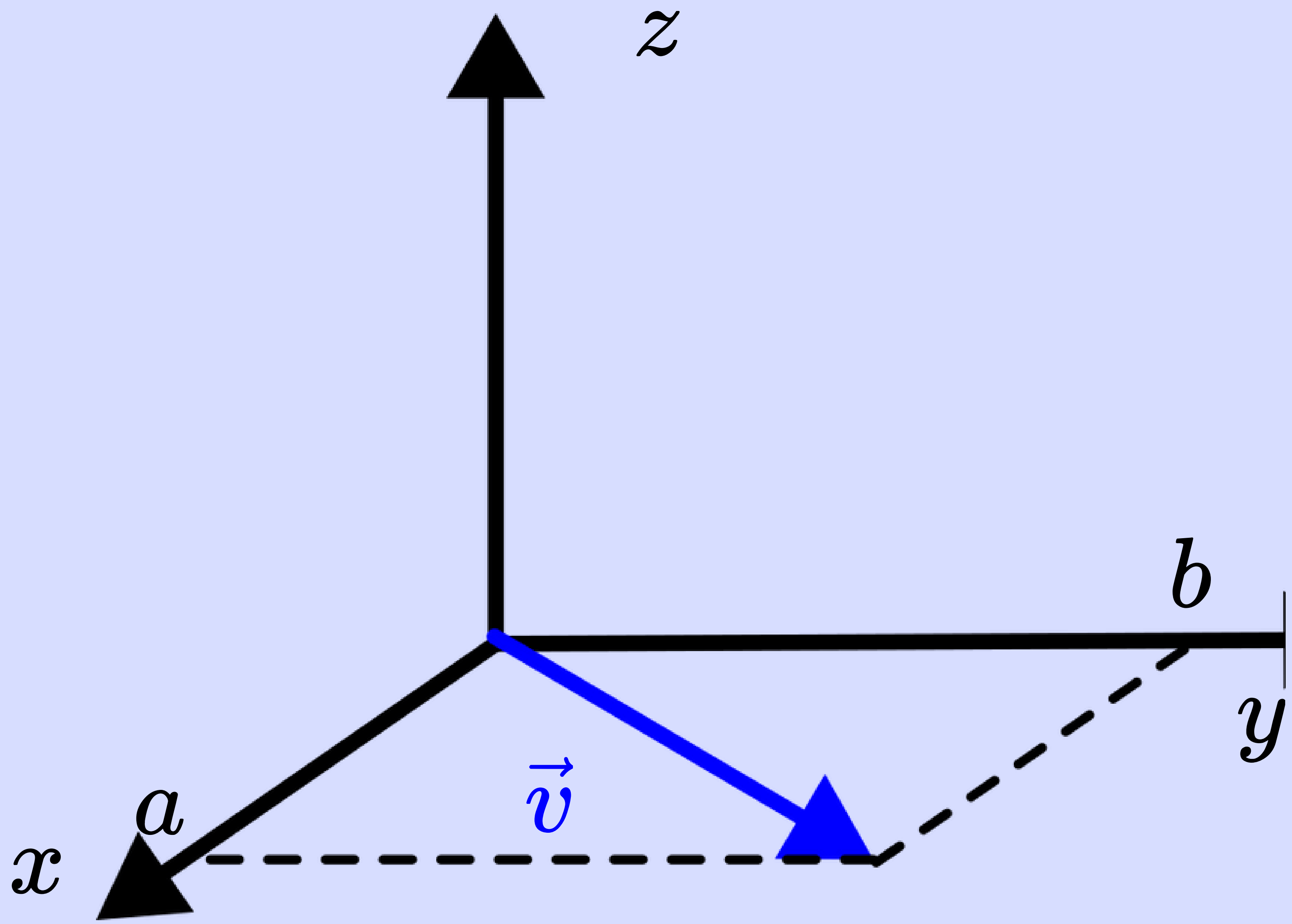
$$\begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $c = 0 \longrightarrow \vec{v} = (a, b, 0) \Longrightarrow r \parallel xOy$

$$\begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Caso 2: duas das componente do vetor são nulas

Nesse caso, o vetor tem a direção de um dos vetores

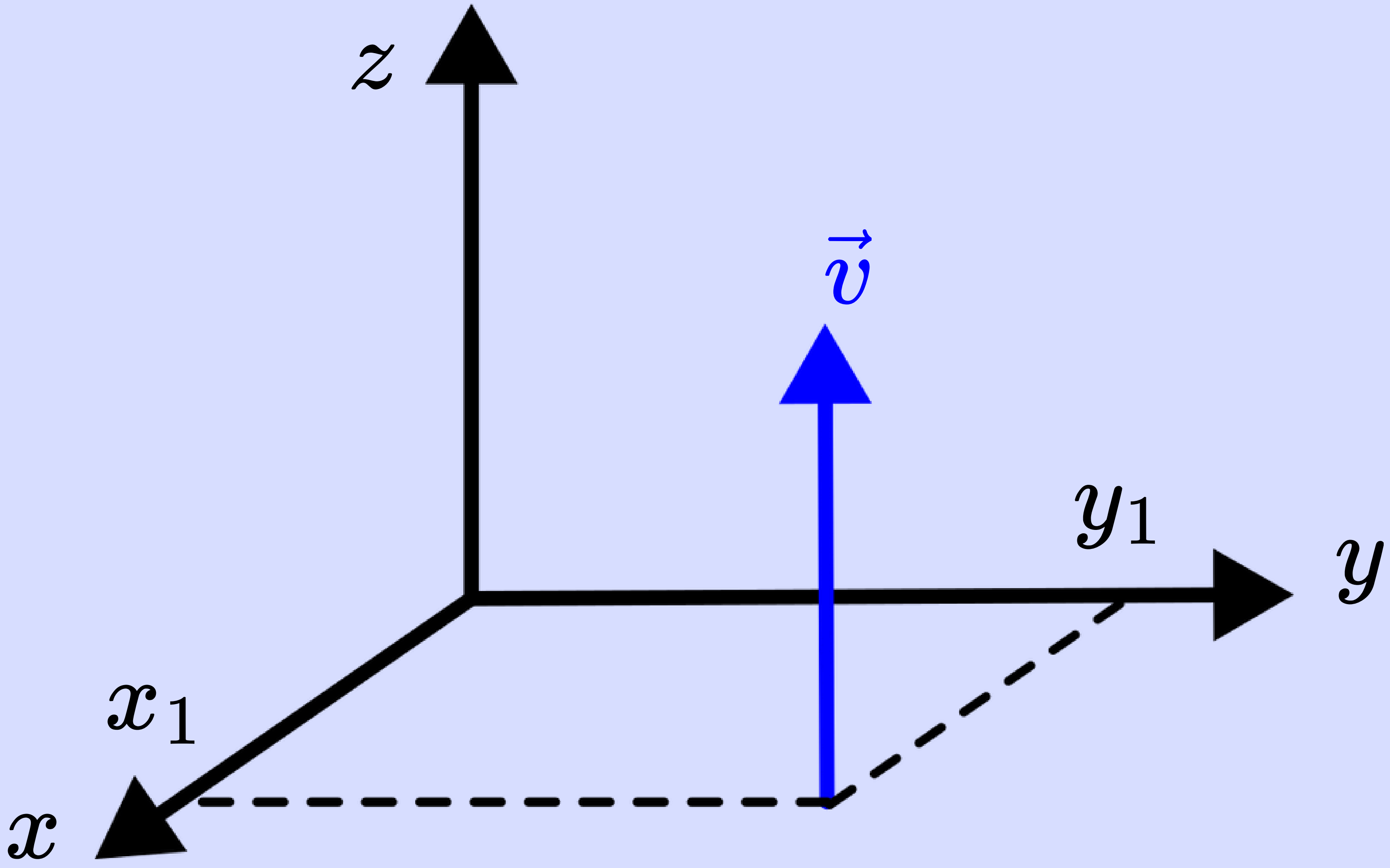
$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

e, portanto, a **reta r** é **paralela ao eixo** que tem a direção de $\vec{i}, \vec{j}$ ou $\vec{k}$.

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $a = b = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, 0, c) \Longrightarrow r \parallel Oz$

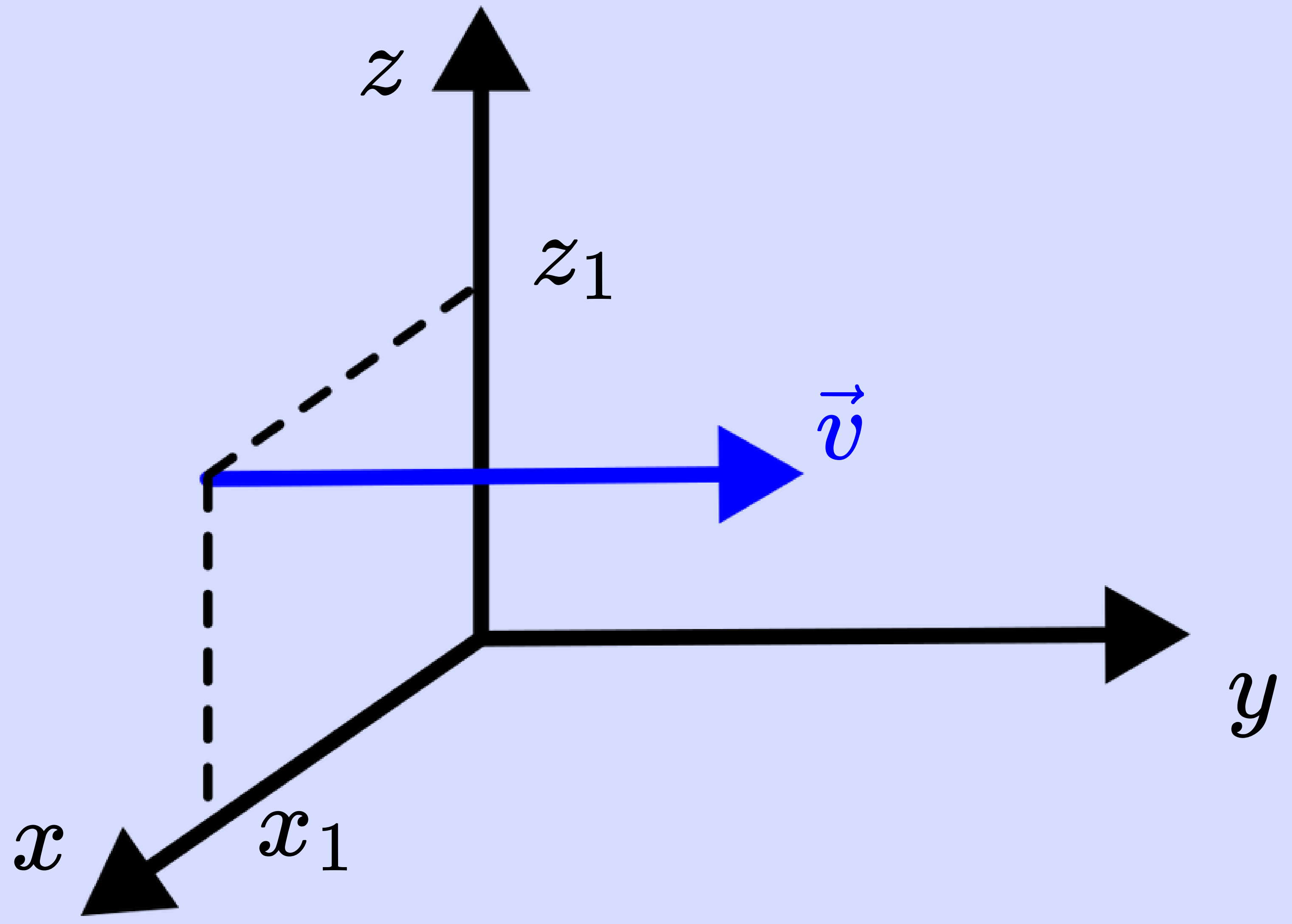
$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $a = c = 0 \longrightarrow \vec{v} = (0, b, 0) \Longrightarrow r \parallel Oy$

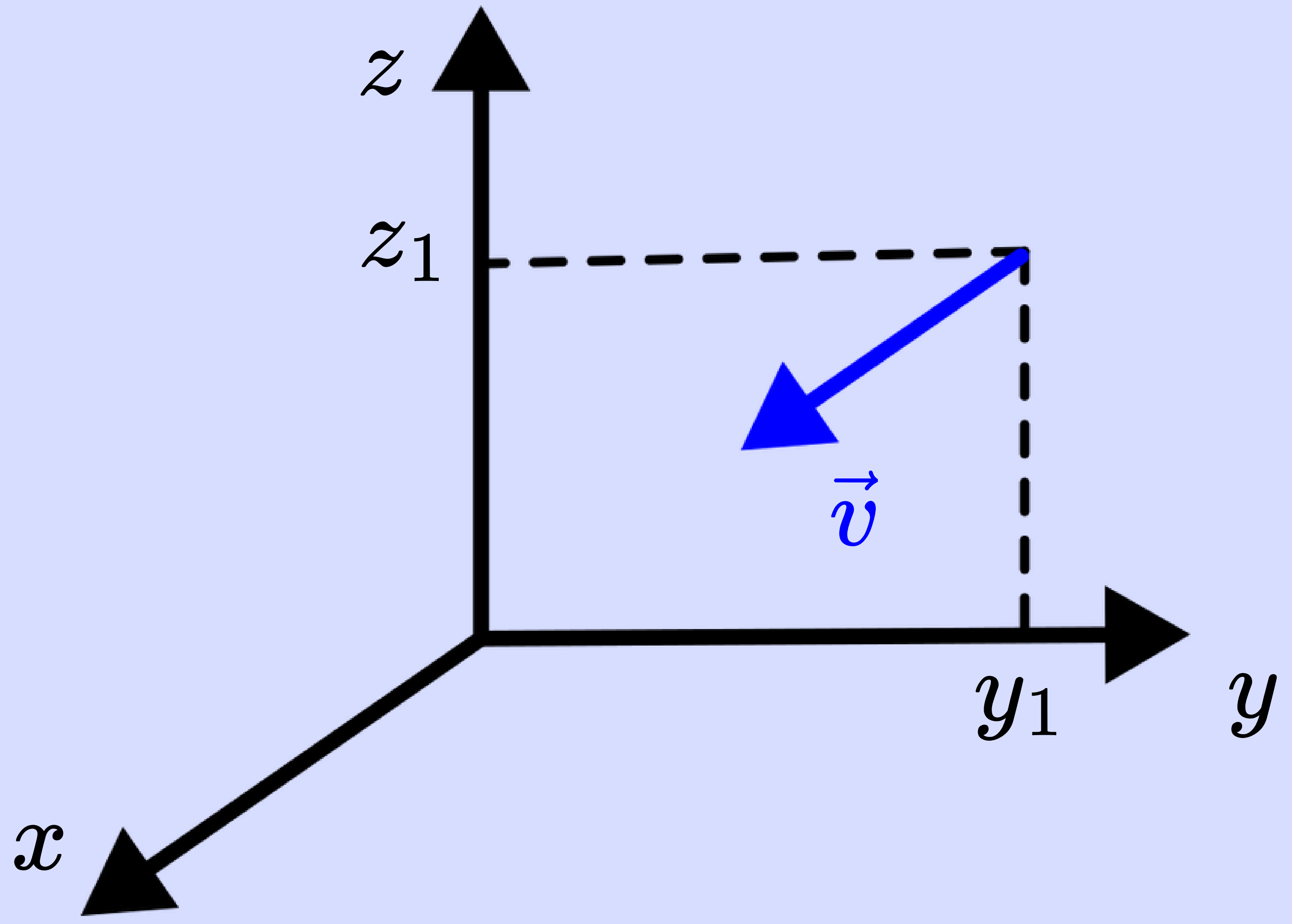
$$\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

- Se $b = c = 0 \longrightarrow \vec{v} = (a, 0, 0) \Longrightarrow r \parallel Ox$

$$\begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \\ x = x_1 + at \end{cases}$$



Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Os eixos coordenados são retas particulares:

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad Oy : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Exemplo: Determinar as equações da reta que

- Passa pelo ponto A(-2,3,-2) e tem a direção de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Exemplo: Determinar as equações da reta que

- Passa pelo ponto A(-2,3,-2) e tem a direção de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$

- Passa pelos pontos A(1,0,9) e B(4,8,9)

Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

Exemplo: Determinar as equações da reta que

- Passa pelo ponto A(-2,3,-2) e tem a direção de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$
- Passa pelos pontos A(1,0,9) e B(4,8,9)
- Passa pelo ponto A(0,3,-2) e tem a direção de $\vec{v} = 2\vec{i}$

Ângulo de duas retas

Sejam as retas

- r_1 : passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor

$$\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$$

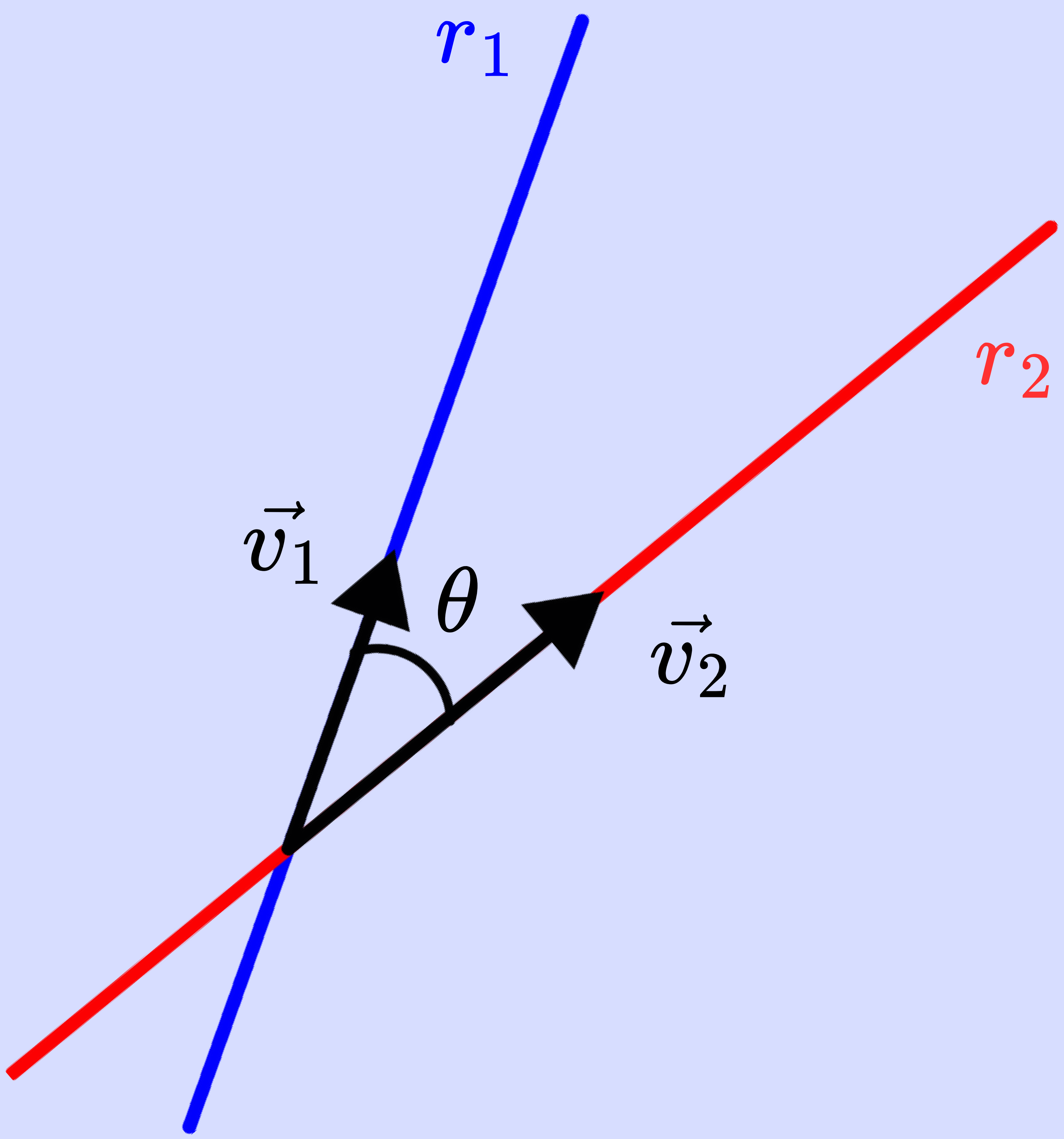
- r_2 : passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor

$$\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$$

Ângulo de duas retas

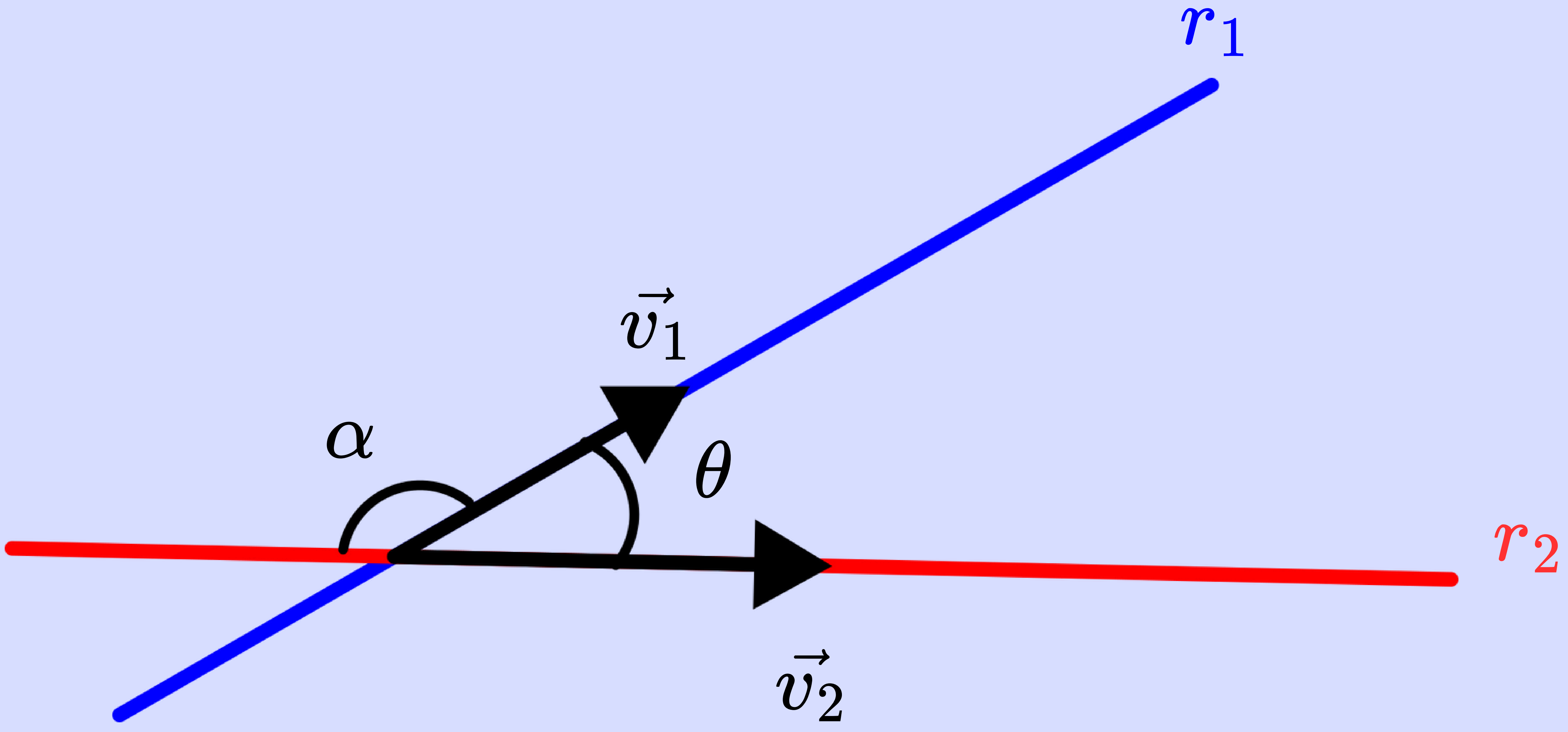
Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}}$$



$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Ângulo de duas retas



$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

Ângulo de duas retas

Exemplo: Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

$$r_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Condição de paralelismo de duas retas

A condição de paralelismo de duas retas é a mesma condição para seus vetores diretores, isto é

$$\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Condição de paralelismo de duas retas

Exemplo: Analisar as retas

- r_1 que passa pelos pontos A(-3,4,2) e B(5,-2,4)
- r_2 que passa pelos pontos C(-1,2,-3) e D(-5,5,-4)

Condição de paralelismo de duas retas

Observação: Seja

$$r_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c}$$

Qualquer reta r_2 **paralela** à r_1 , tem parâmetros diretores a_2, b_2, c_2 proporcionais a a_1, b_1, c_1 .

- a_1, b_1, c_1 : **parâmetros diretores** de qualquer reta paralela à r_1

Condição de paralelismo de duas retas

Observação: Sejam

$$r_1 : \begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} y = m_2 x + n_2 \\ z = p_2 x + q_2 \end{cases}$$

as direções das retas são dadas pelos vetores

$$\vec{v_1} = (1, m_1, p_1) \qquad \vec{v_2} = (1, m_2, p_2)$$

Pela condição de paralelismo $\begin{cases} m_1 = m_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases}$

Condição de ortogonalidade de duas retas

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ que definem suas direções, isto é:

$$\boxed{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0}$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

Exemplo: Calcular o valor de m para que as retas sejam ortogonais

$$r_1 = \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases}$$

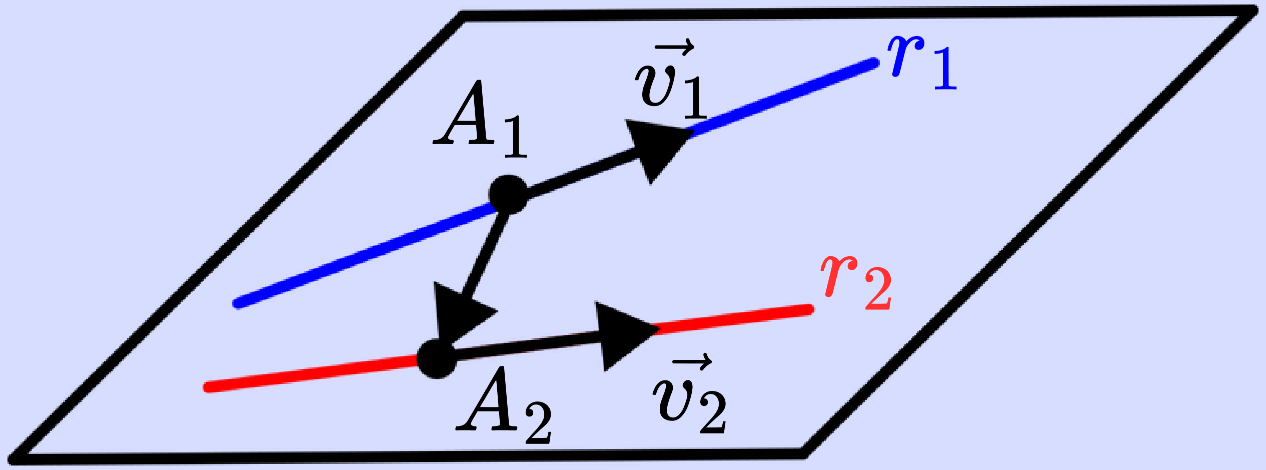
$$r_2 = \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

Condição de coplanaridade de duas retas

Sejam as retas

- r_1 : ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$, direção $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$
- r_2 : ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$, direção $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$

são coplanares se os vetores $\vec{v_1}, \vec{v_1}, \overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares, isto é



$$\boxed{(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Condição de coplanaridade de duas retas

Exemplo: Determinar o valor de m para que as retas sejam coplanares

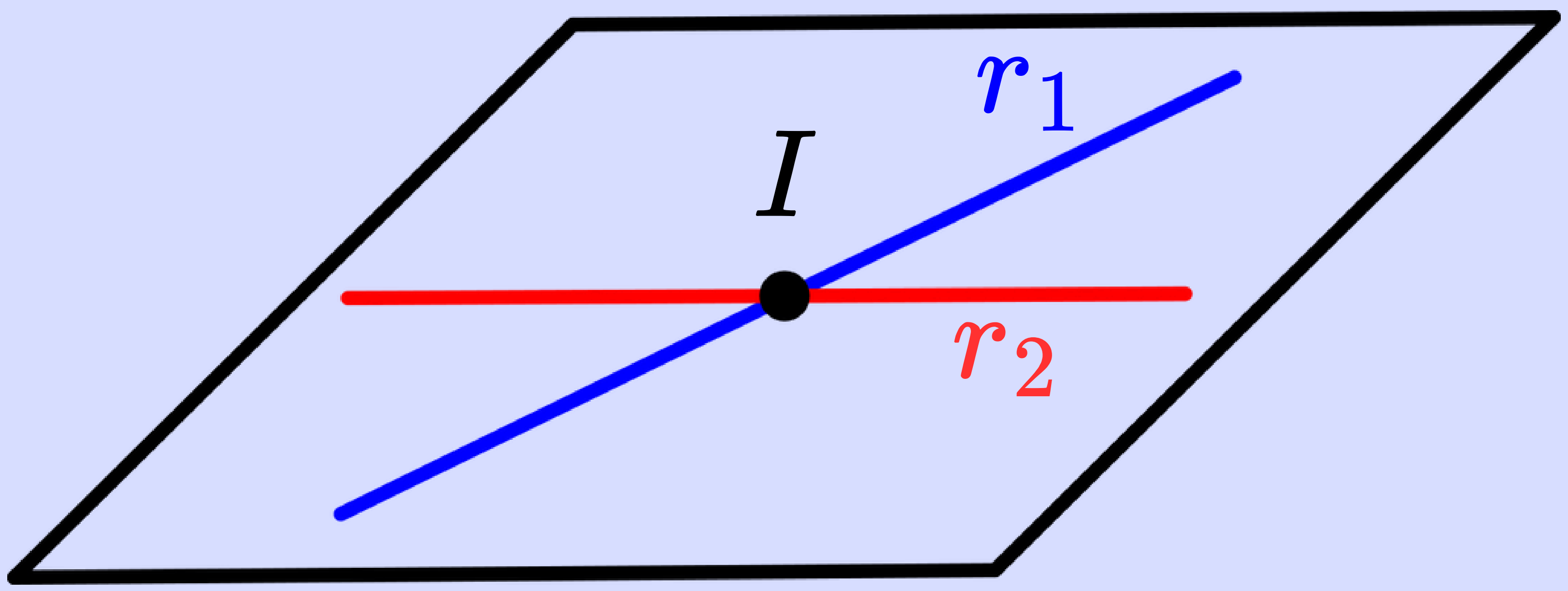
$$r_1 : \begin{cases} y = mx + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

Posições relativas de duas retas

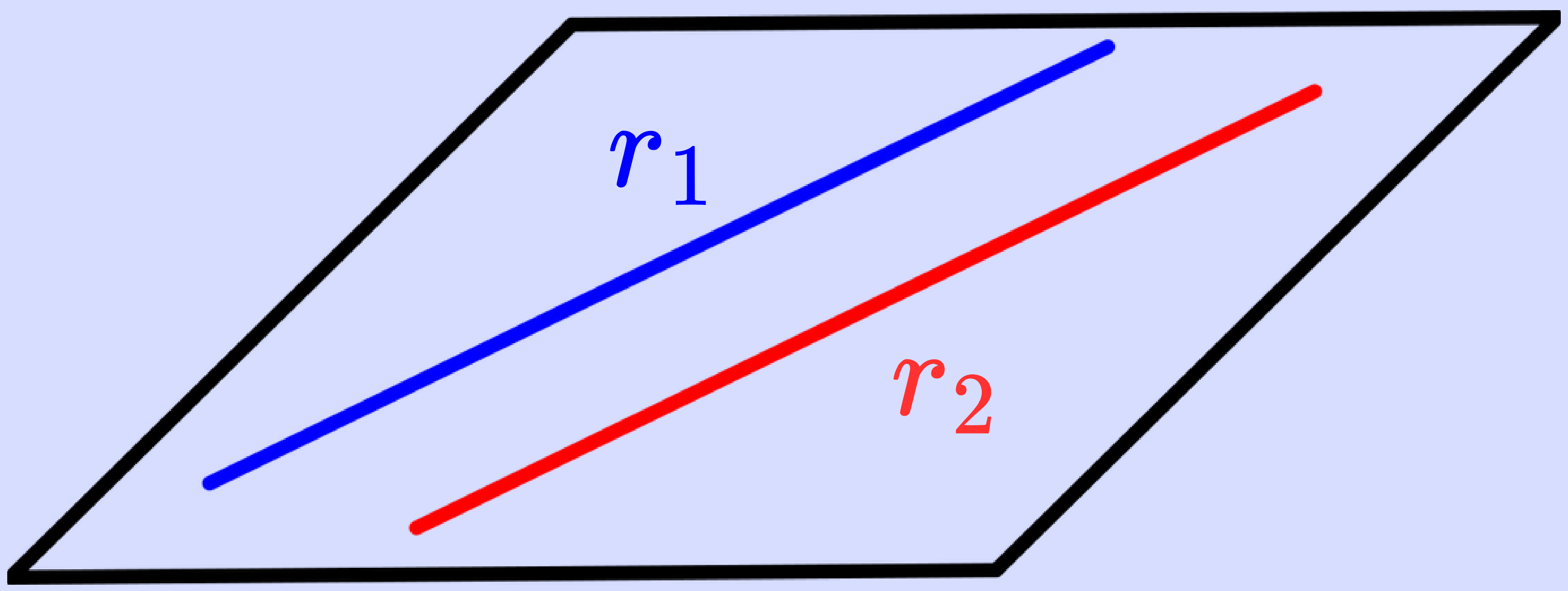
<u>Coplanares:</u> ocorre quando duas retas estão situadas no mesmo plano. Neste caso, elas poderão ser

Concorrentes



$$r_1 \cap r_2 = \{I\}$$

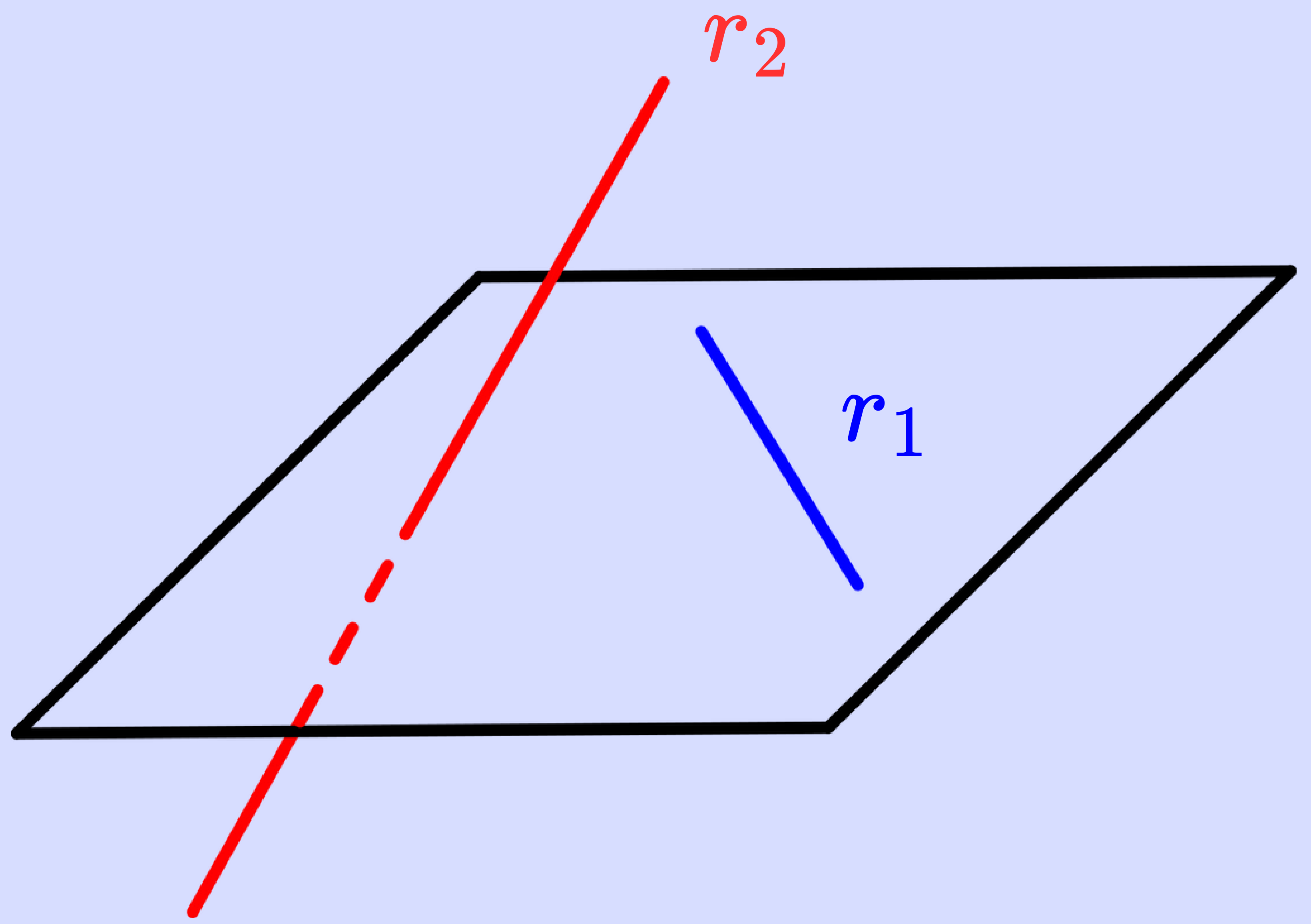
Paralelas



$$r_1 \cap r_2 = \emptyset$$

Posições relativas de duas retas

<u>Reversas:</u> ocorre quando duas retas **não** estão situadas no mesmo plano.



$$r_1 \cap r_2 = \emptyset$$

Posições relativas de duas retas

Paralelas:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0 \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Concorrentes:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$$

Reversas

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0$$

Posições relativas de duas retas

Exemplo: Estudar a posição relativa das retas

$$r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Interseção de duas retas

Duas retas que são **coplanares** e **não paralelas**, são concorrentes. Sendo assim, há um ponto $I(x, y, z)$ que é o ponto de interseção das duas retas.

- Este ponto pertence as duas retas simultaneamente, isto é, precisa satisfazer as equações das duas retas simultaneamente.

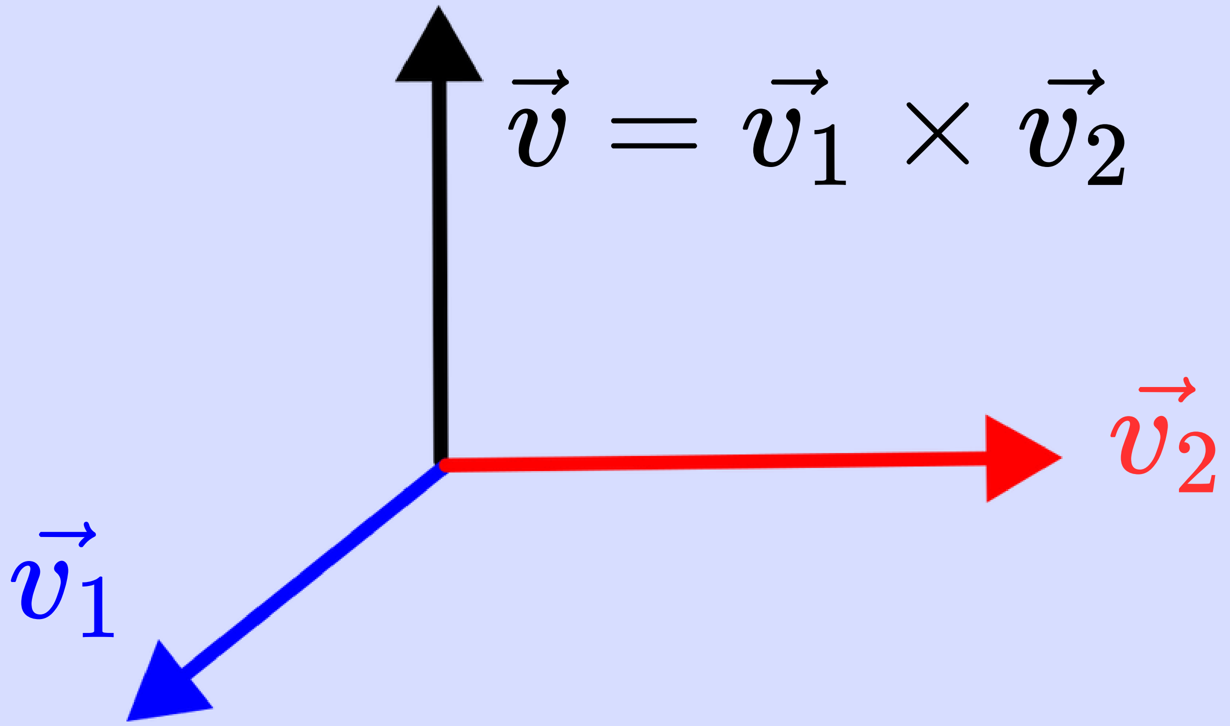
$$r_1 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \qquad \boxed{I(1, -1, 2)}$$

Reta ortogonal a duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas com as direções dos vetores

$$\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1) \qquad \vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$$

- Qualquer reta simultaneamente ortogonal a estas retas terá um vetor paralelo ou igual ao vetor $\vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$



Assim, a reta está bem definida com este vetor e com um de seus pontos

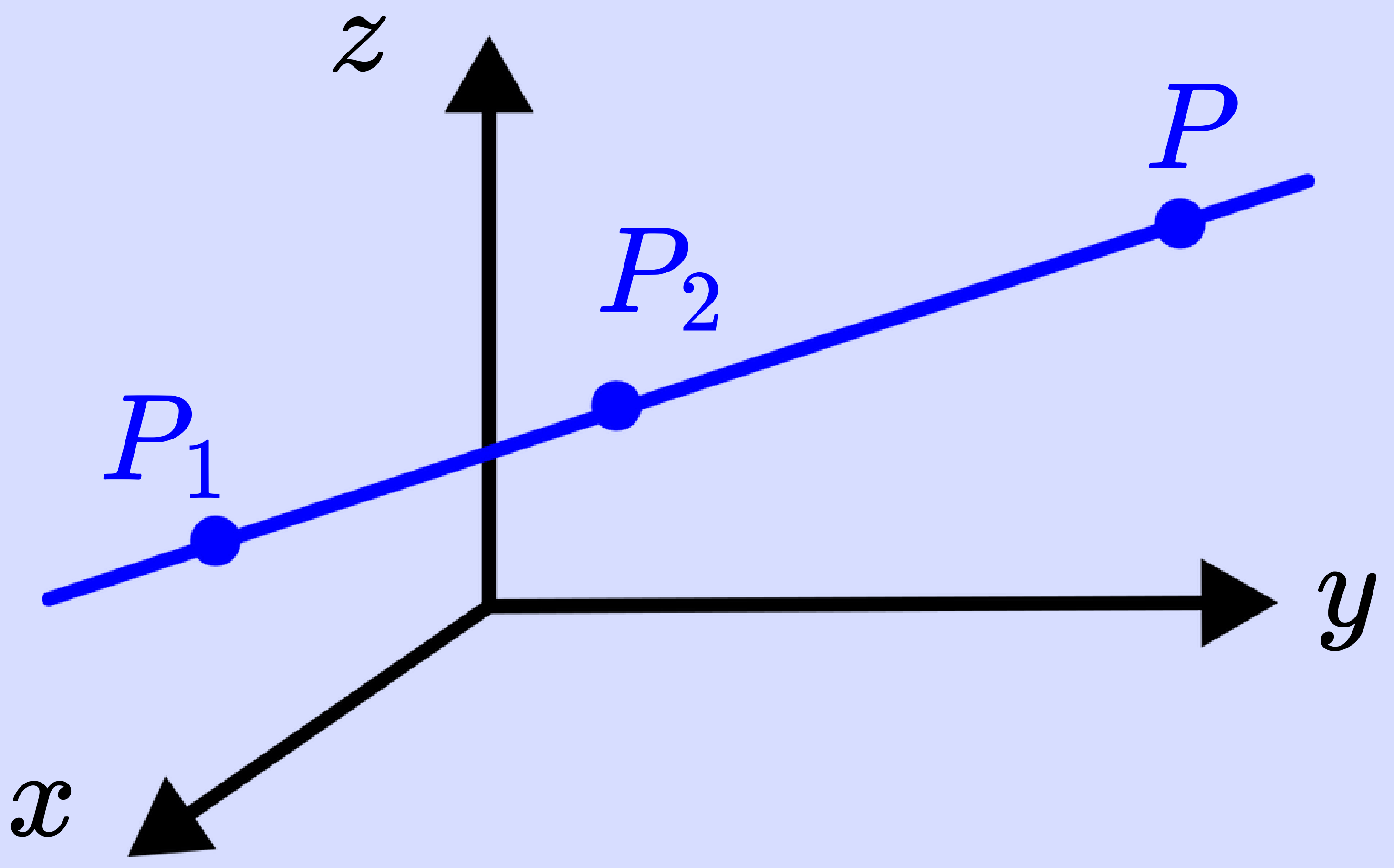
Reta ortogonal a duas retas

Exemplo: Determinar as equações da reta que passa pelo ponto A(-2,1,3) e é ortogonal comum às retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \qquad r_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{z}{-1}, \quad y = 2$$

Ponto que divide um segmento de reta em uma razão dada

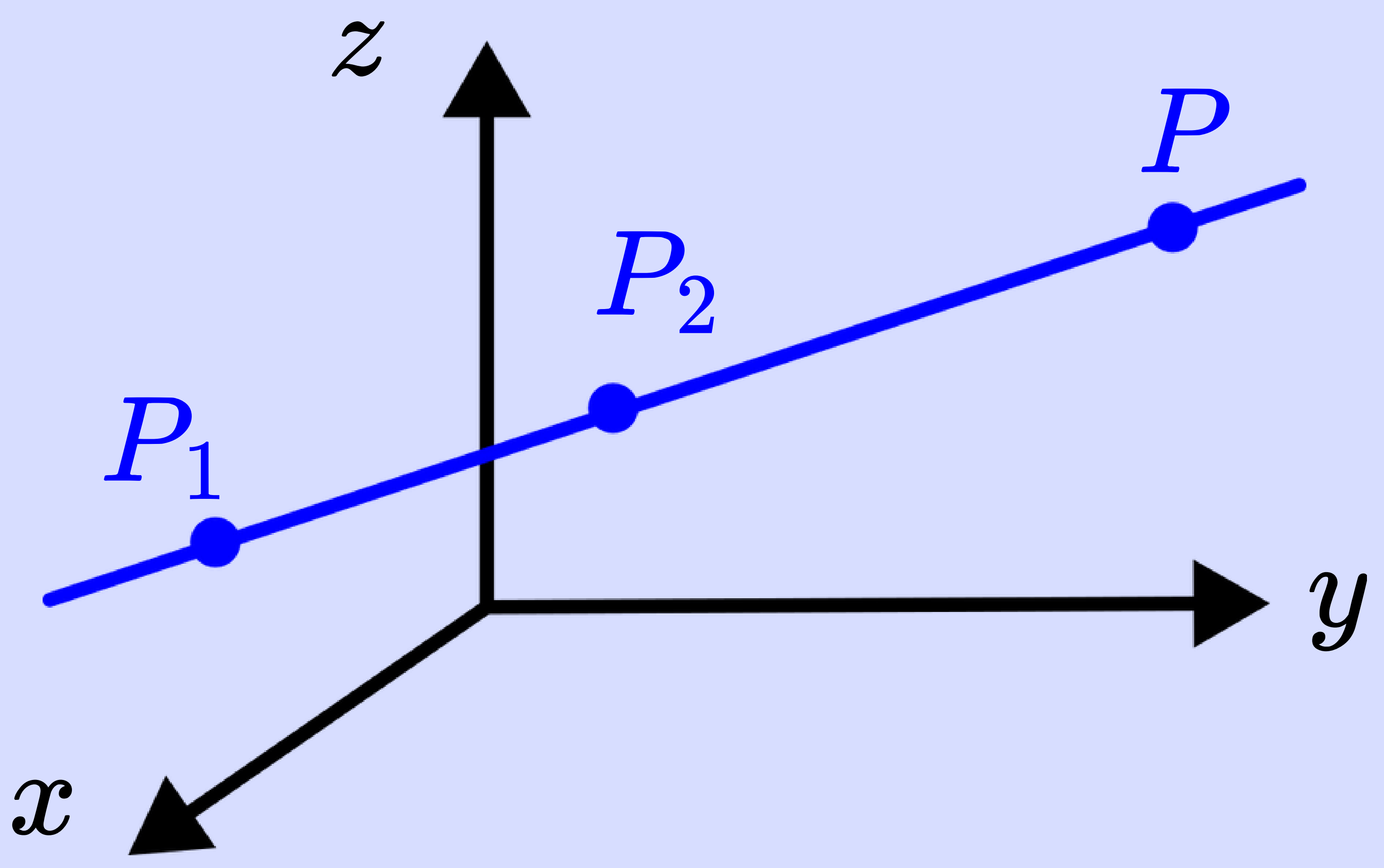
Definição: Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, diz-se que um ponto $P(x, y, z)$ divide o segmento P_1P_2 na razão r se



$$\boxed{\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}}$$

Ponto que divide um segmento de reta em uma razão dada

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}}$$



$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$

$$y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}$$

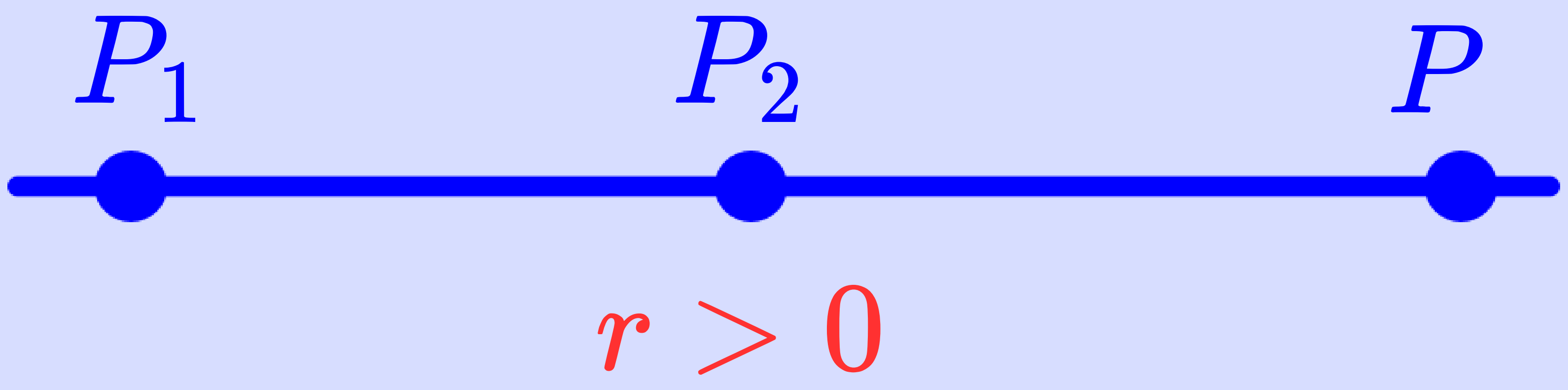
$$z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}$$

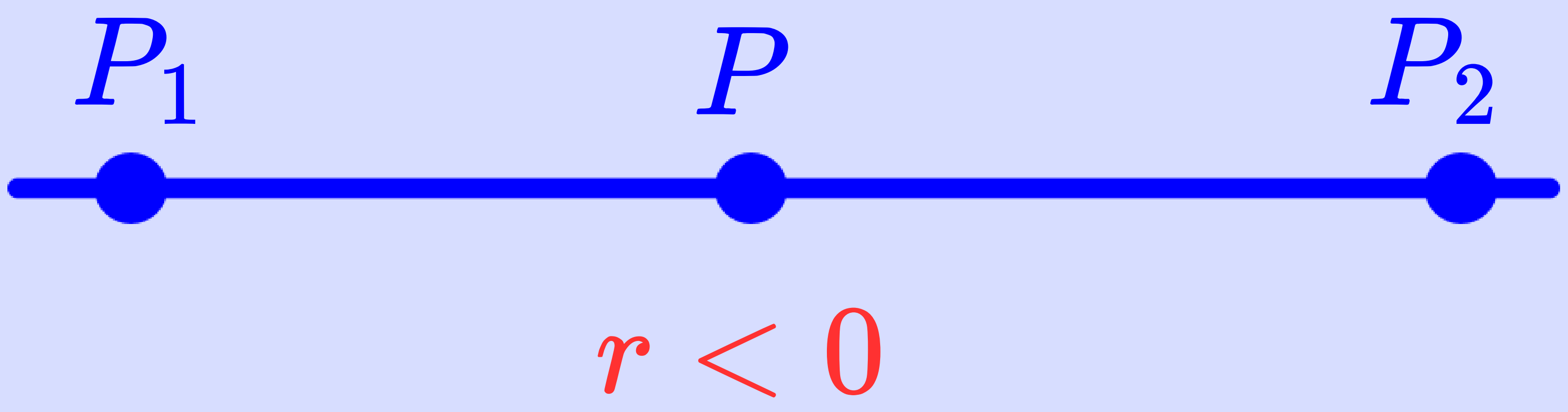
Ponto que divide um segmento de reta em uma razão dada

$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$

$$y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}$$

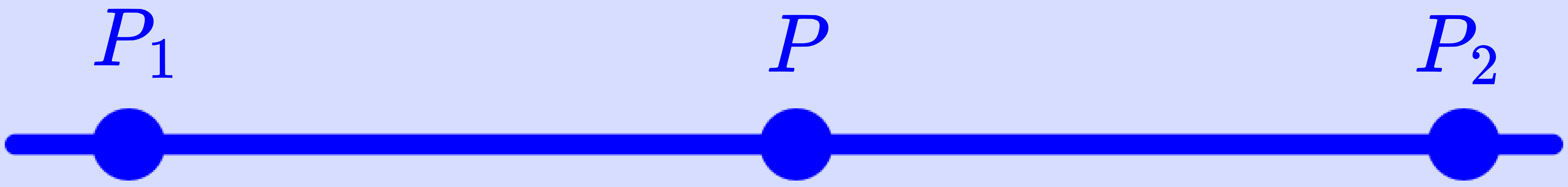
$$z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}$$





Ponto que divide um segmento ao meio

$$\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P}$$



$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{PP_2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P}}$$

$$r = -1$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$

Ponto que divide um segmento ao meio

Exemplo: Dado os pontos $P_1(2,4,1)$ e $P_2(3,0,5)$ determinar o ponto que divide o segmento na razão $r = -1/3$.