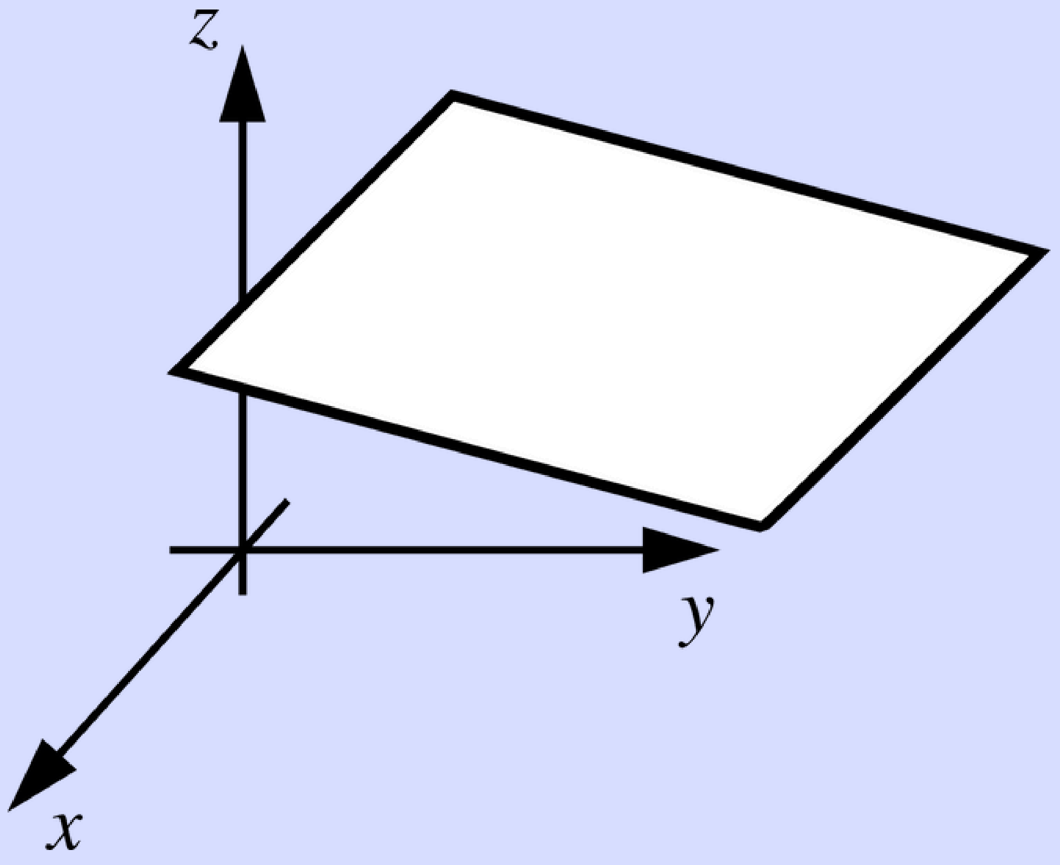
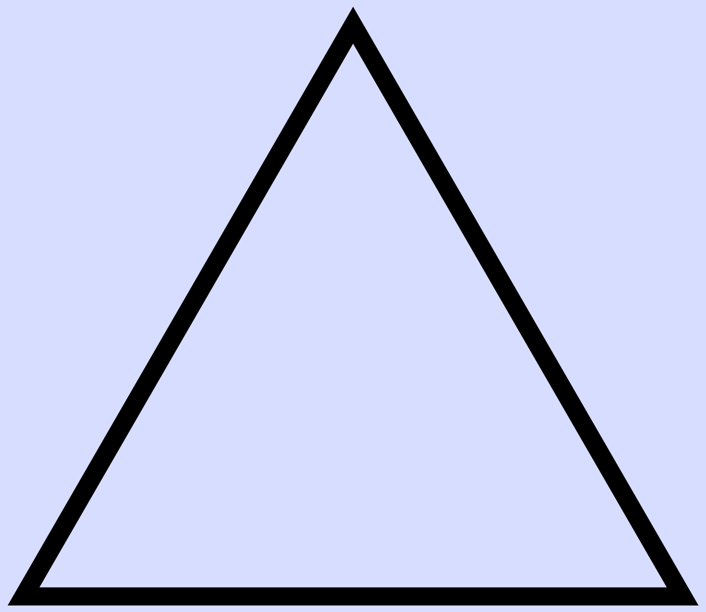
O plano

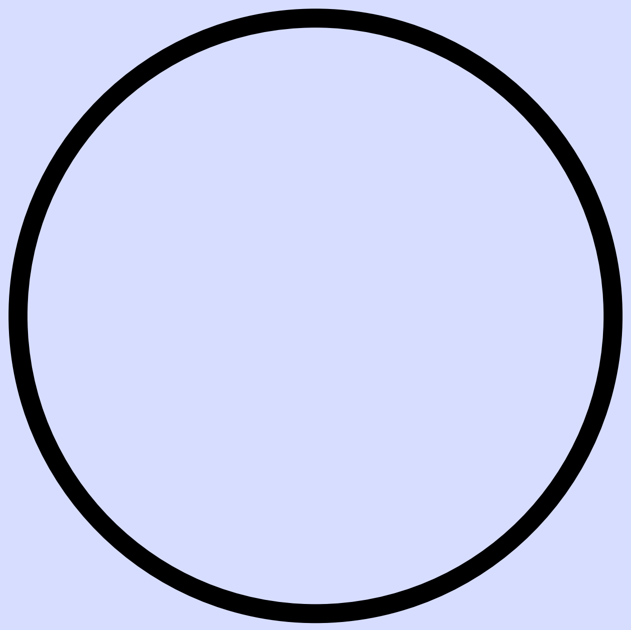
https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/GA

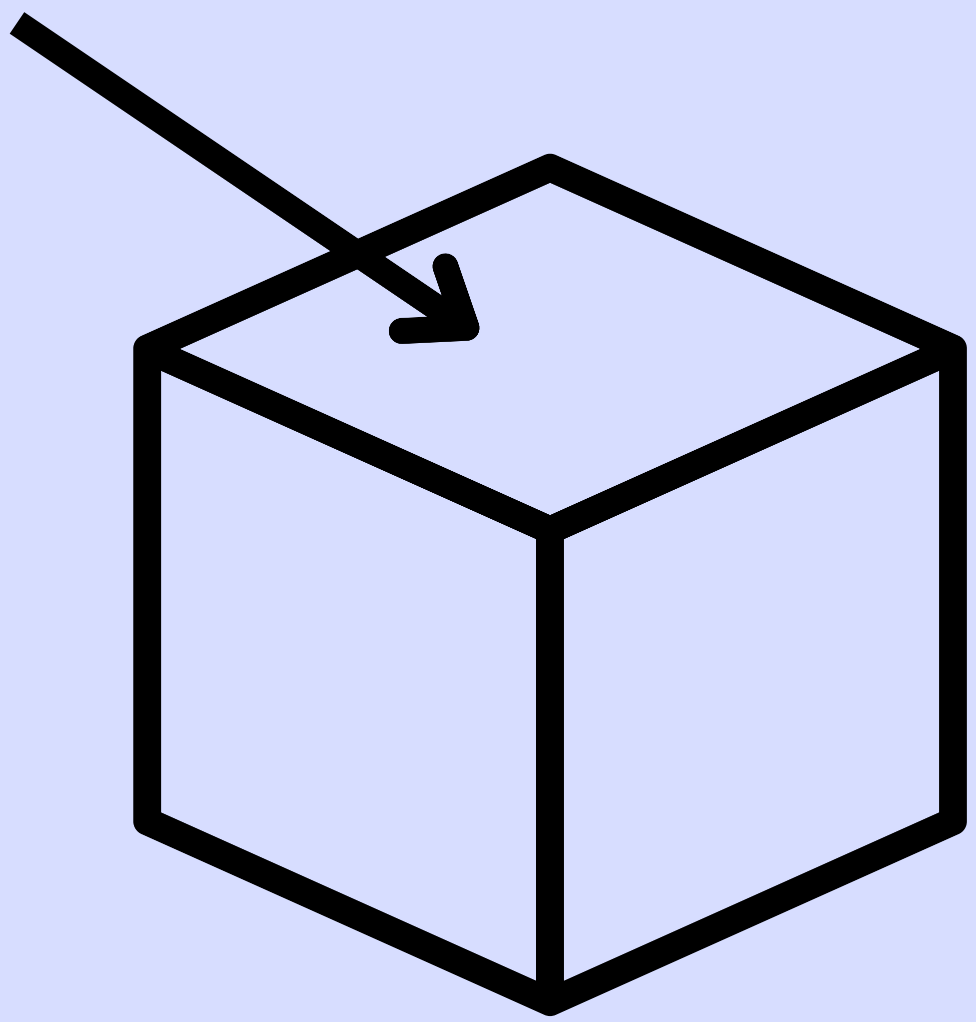


- STEINBRUCH , Alfredo and WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. McGRAW-HILL, 2a edição, 1987.

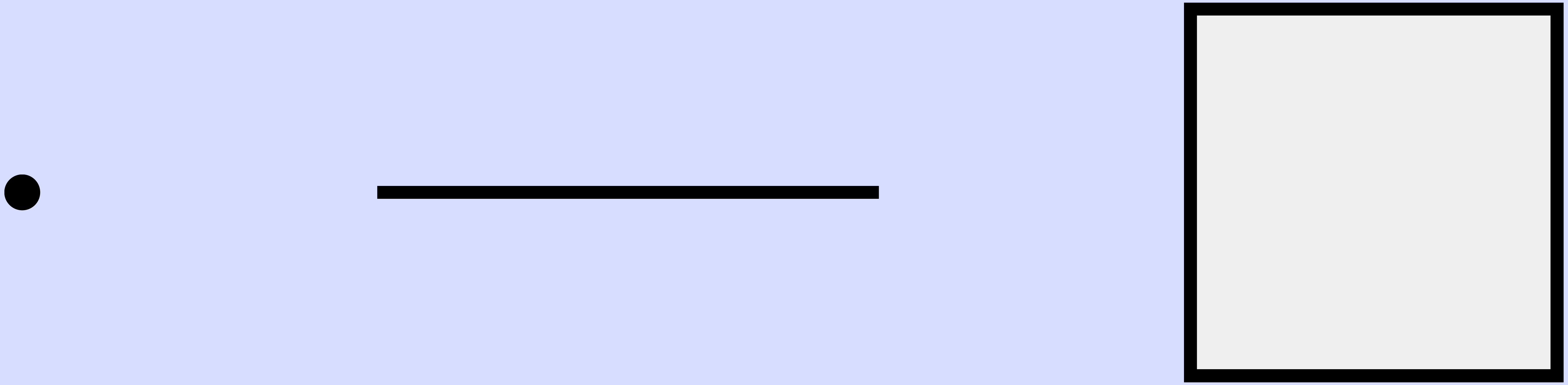
O que seria um plano?



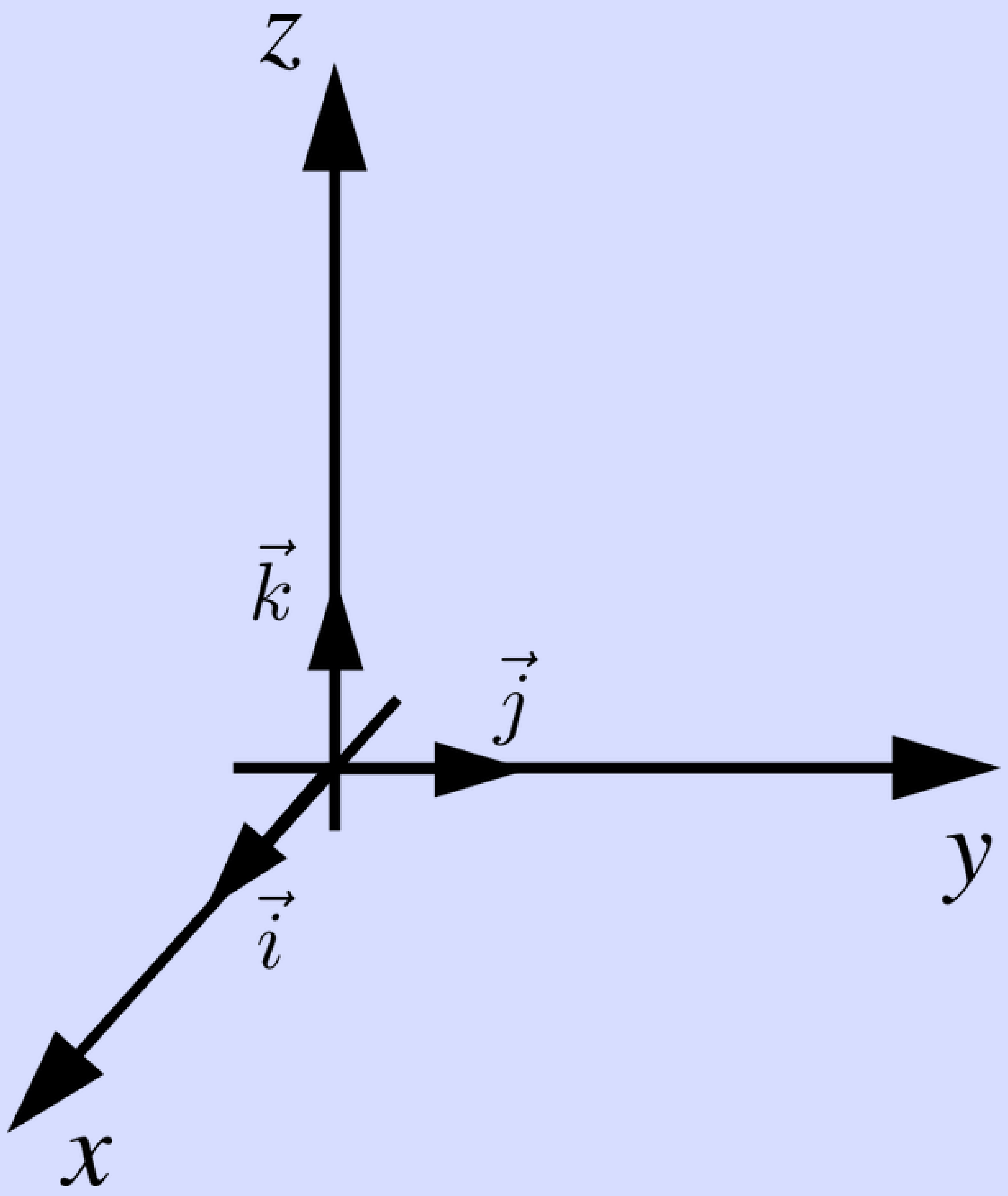




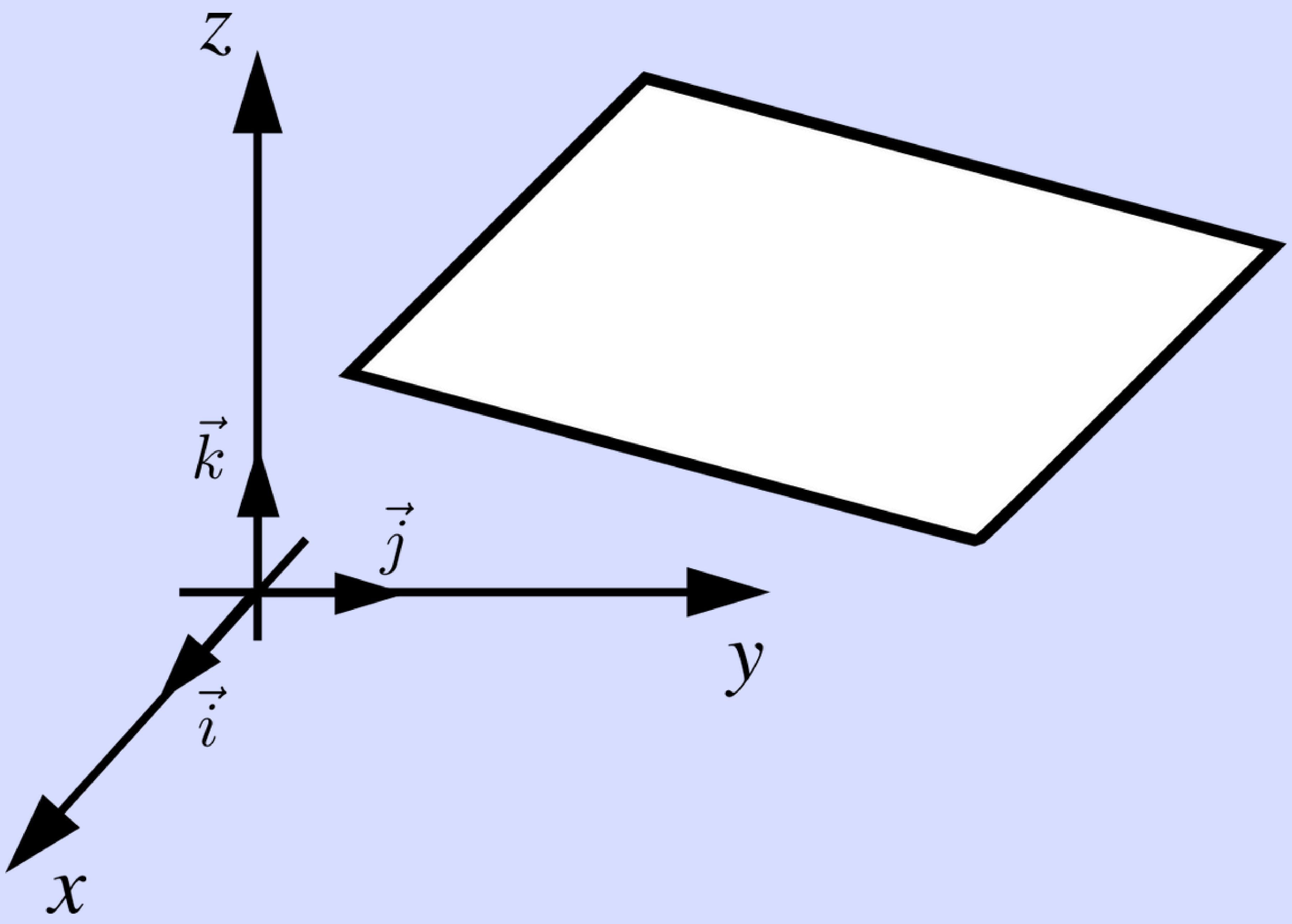
O que seria um plano?



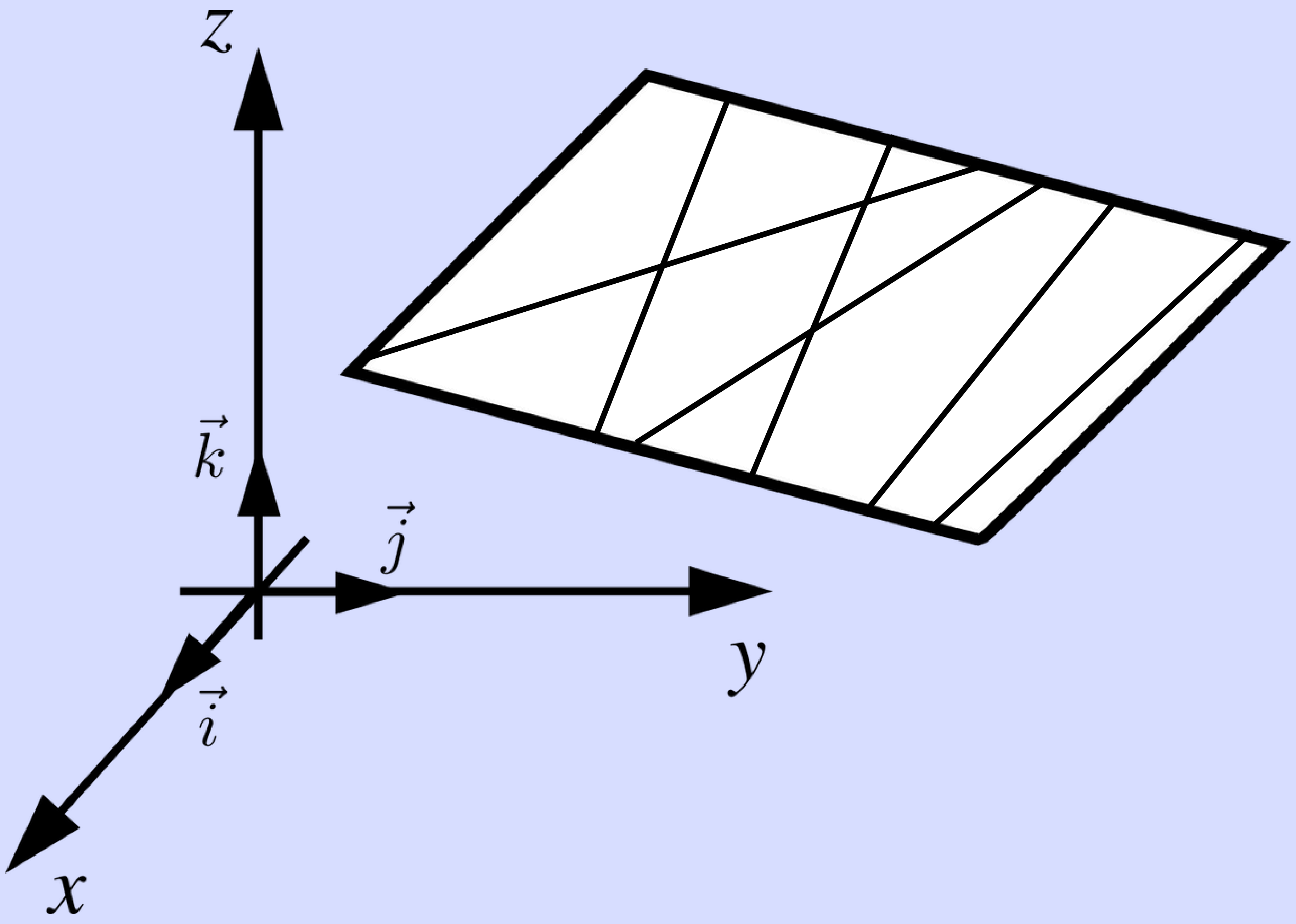
Como descrever um plano?



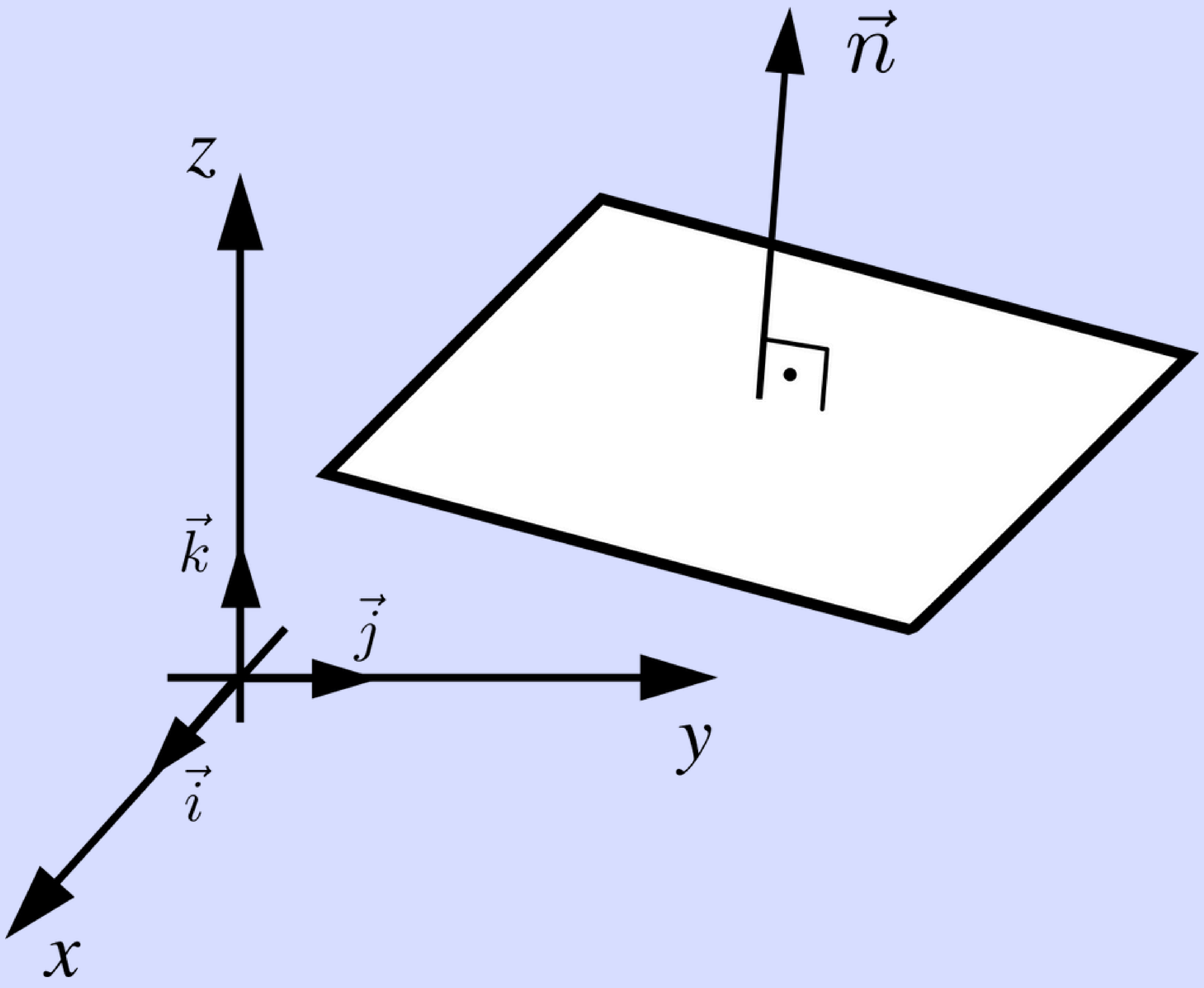
Como descrever um plano?



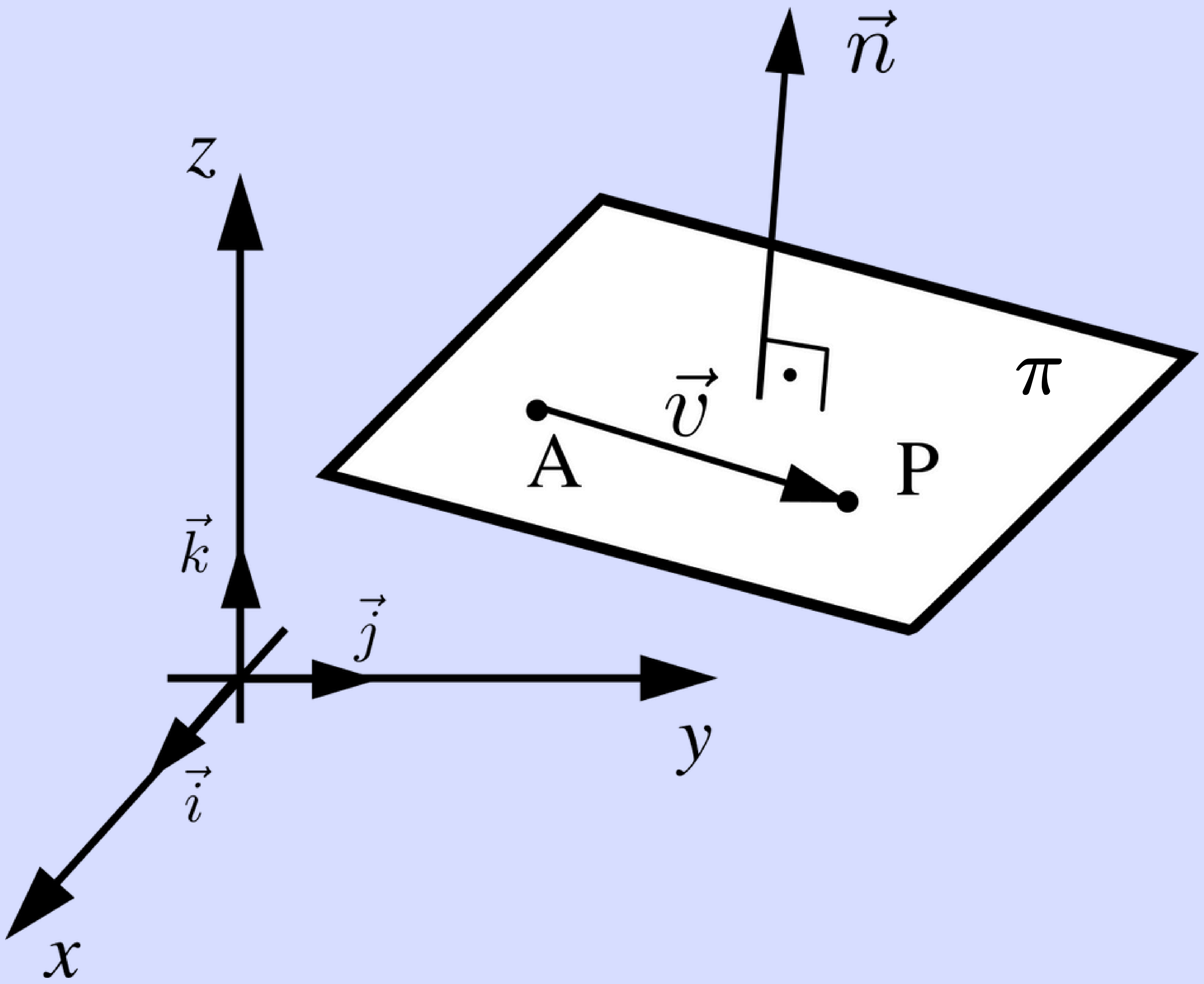
Como descrever um plano?



Como descrever um plano?



Como descrever um plano?



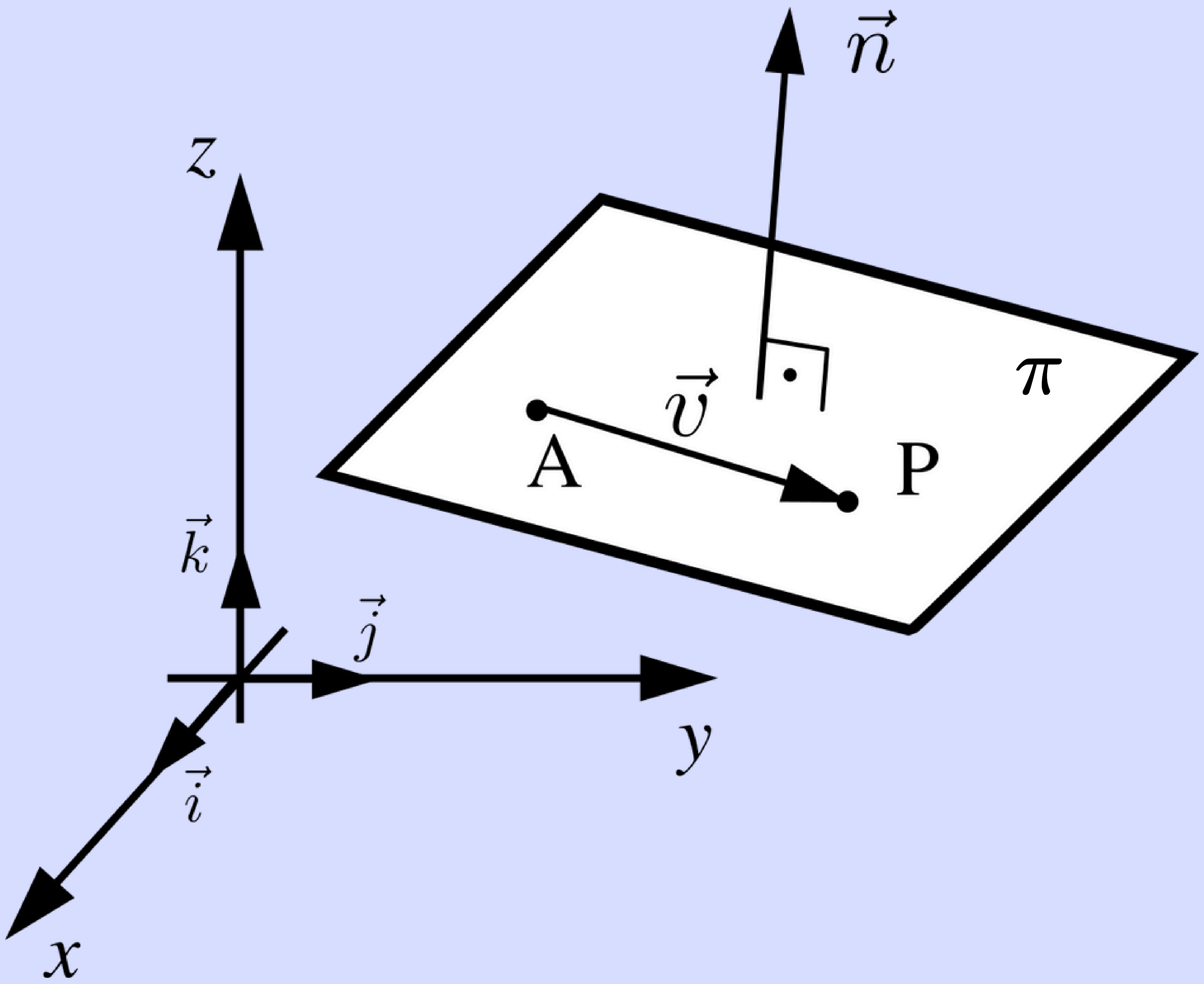
Seja um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ que pertence a um plano e um vetor normal ao plano

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \quad \vec{n} \neq (0,0,0)$$

O plano pode ser definido como o conjunto de pontos P do espaço tais que

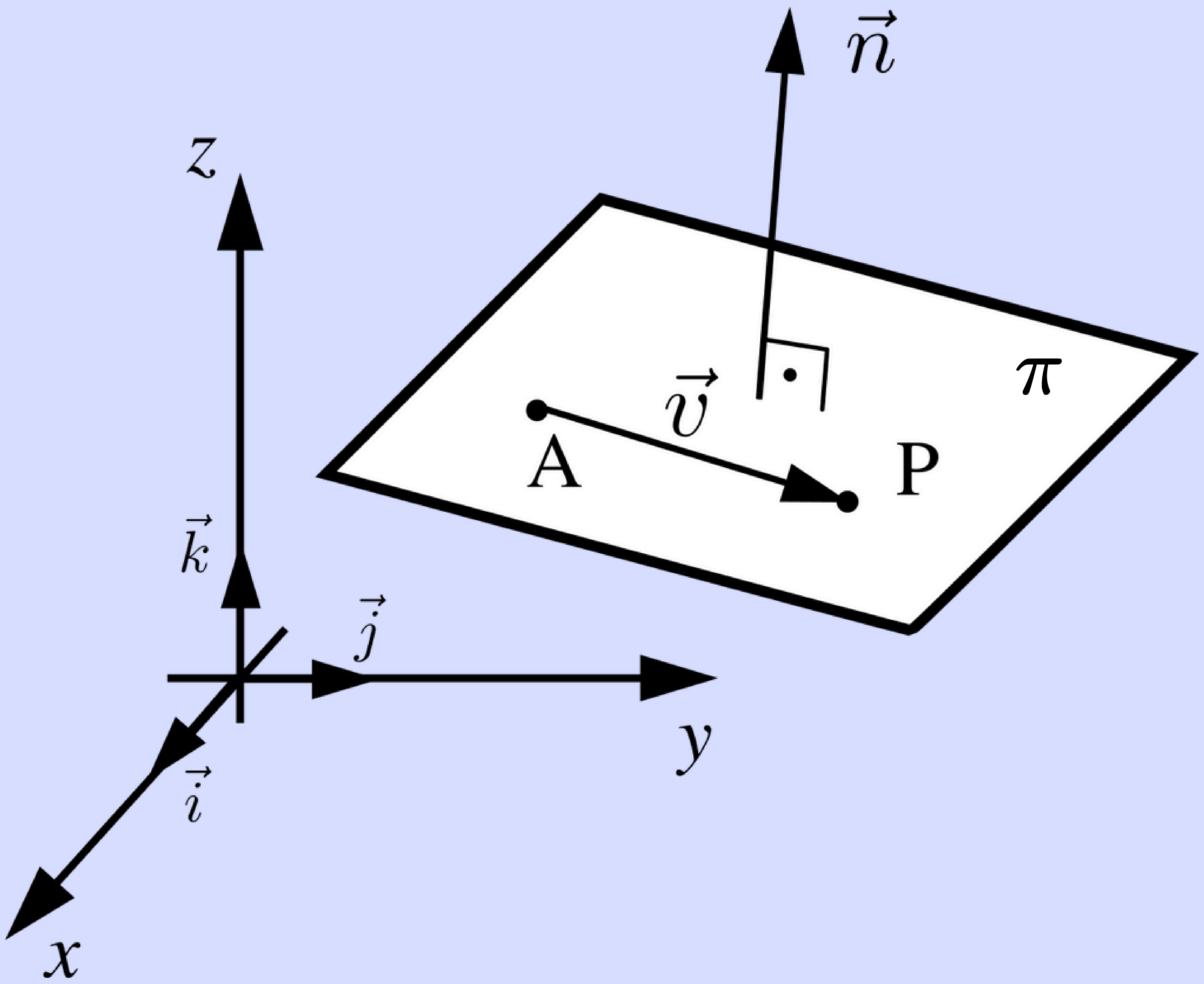
$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$$

Como descrever um plano?



$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$$

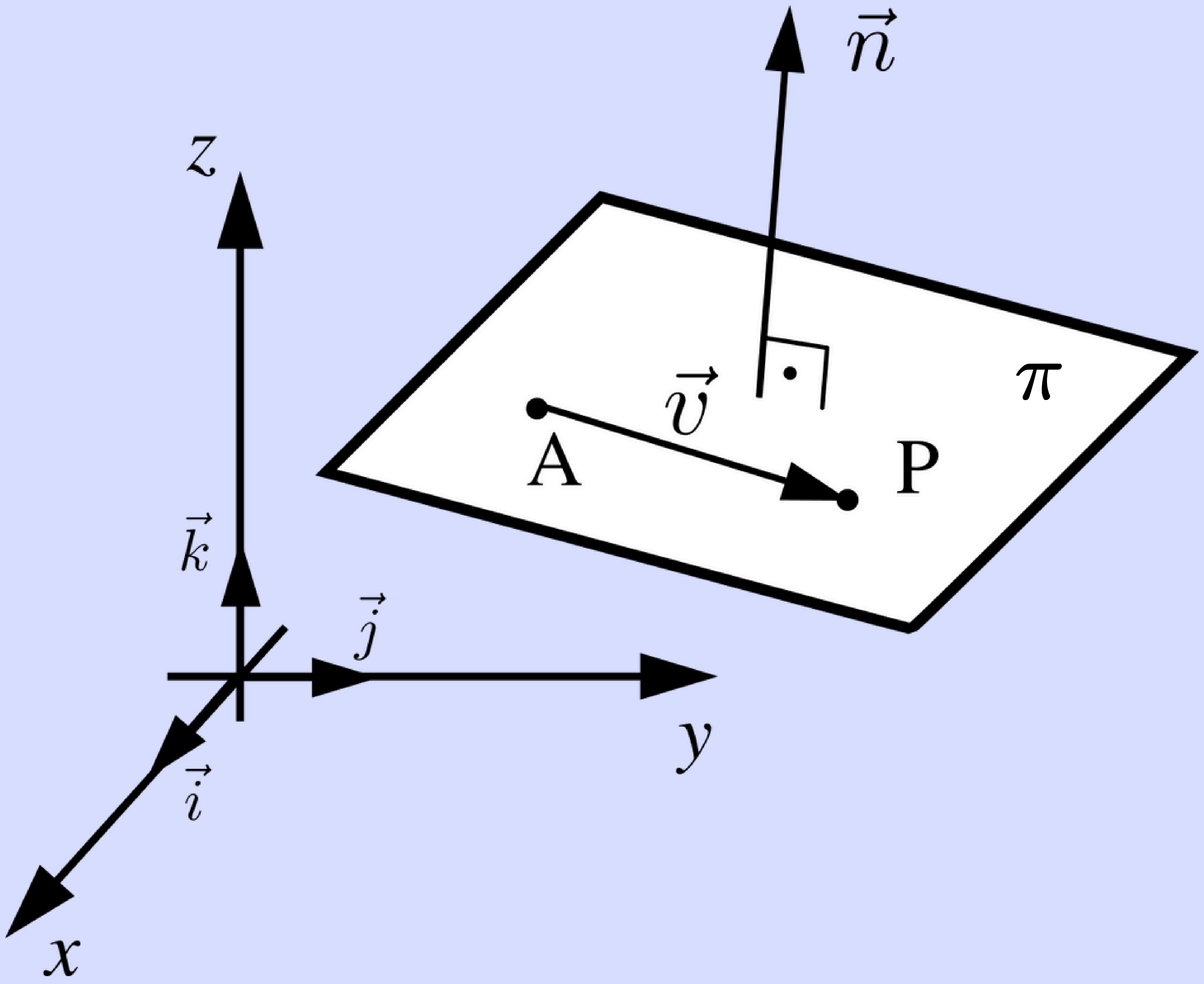
Como descrever um plano?



$$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$$

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0}$$

Equação geral do plano

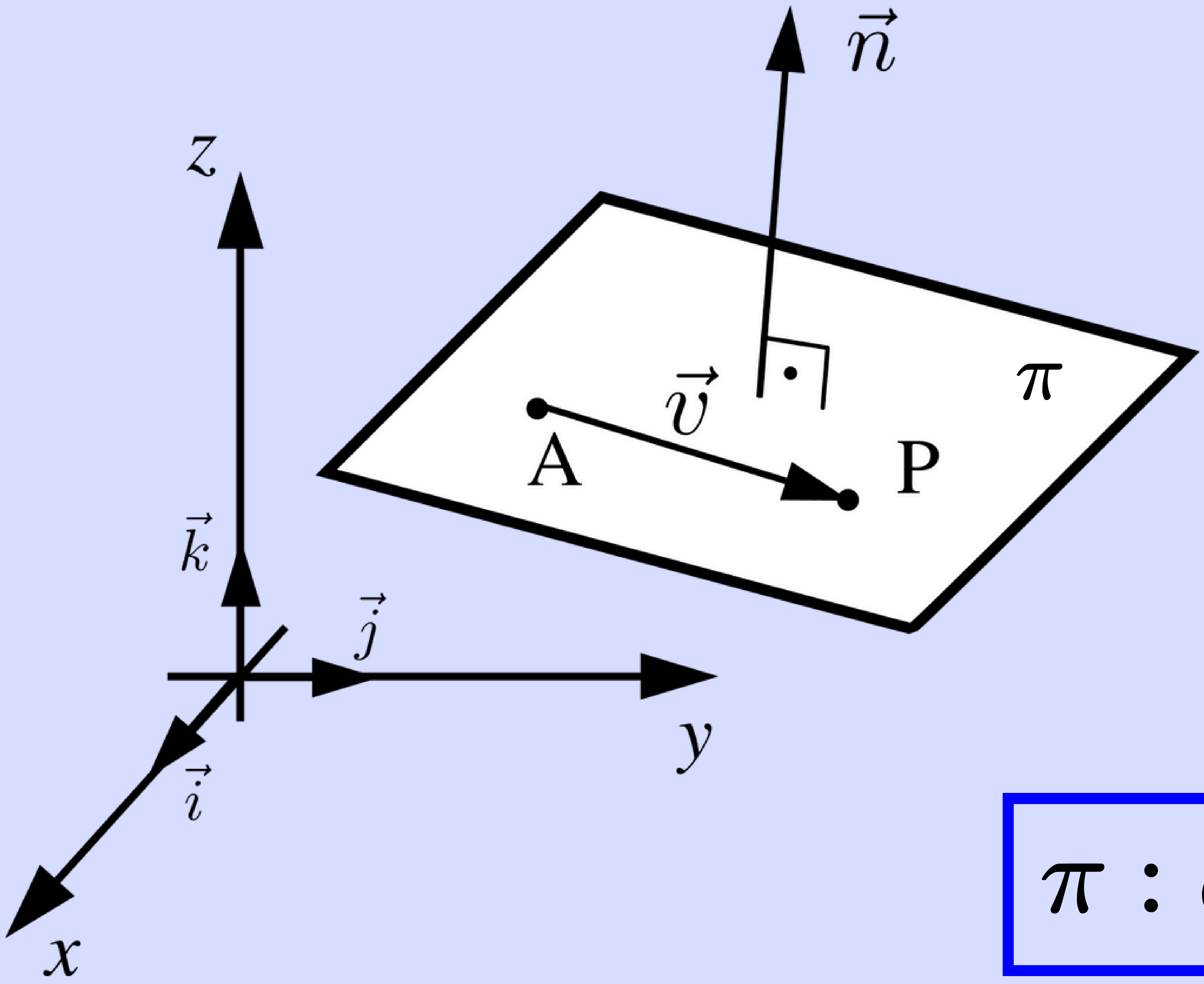


$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$A(x_1, x_2, x_3)$$

Equação geral do plano



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$A(x_1, x_2, x_3)$$

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0}$$

Equação geral do plano

Observações

- Um plano é identificado por um de seus pontos e por um vetor normal $\vec{n}$
    - Qualquer vetor $k\vec{n}, \;\; k \neq 0,$ também é um vetor normal ao plano.

- Sendo $\vec{n}$ um vetor ortogonal ao plano, ele será ortogonal a qualquer vetor representado neste plano

Equação geral do plano

Observações

- Os três coeficientes, a, b, c, da equação geral

$$ax + by + cz + d = 0$$

representam as componentes de um vetor normal.

  - Por exemplo, se $\pi : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$ .Todos os infinitos planos paralelos a tem equação geral do tipo

$$\pi : 3x + 2y - 4z + d = 0$$

onde d é o elemento que diferencia um plano do outro.

Equação geral do plano

Exemplo: Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto A(2,-1,3) com vetor normal $\vec{n} = (3, 2, -4)$.

Equação geral do plano

Exemplo: Escrever a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto A(3,1,-4) e é paralelo ao plano

$$\pi : 2x - 3y + z - 6 = 0$$

Equação geral do plano

Exemplo: Estabelecer a equação geral do plano mediador do segmento AB com A(2,-1,4) e B(4,-3,-2).

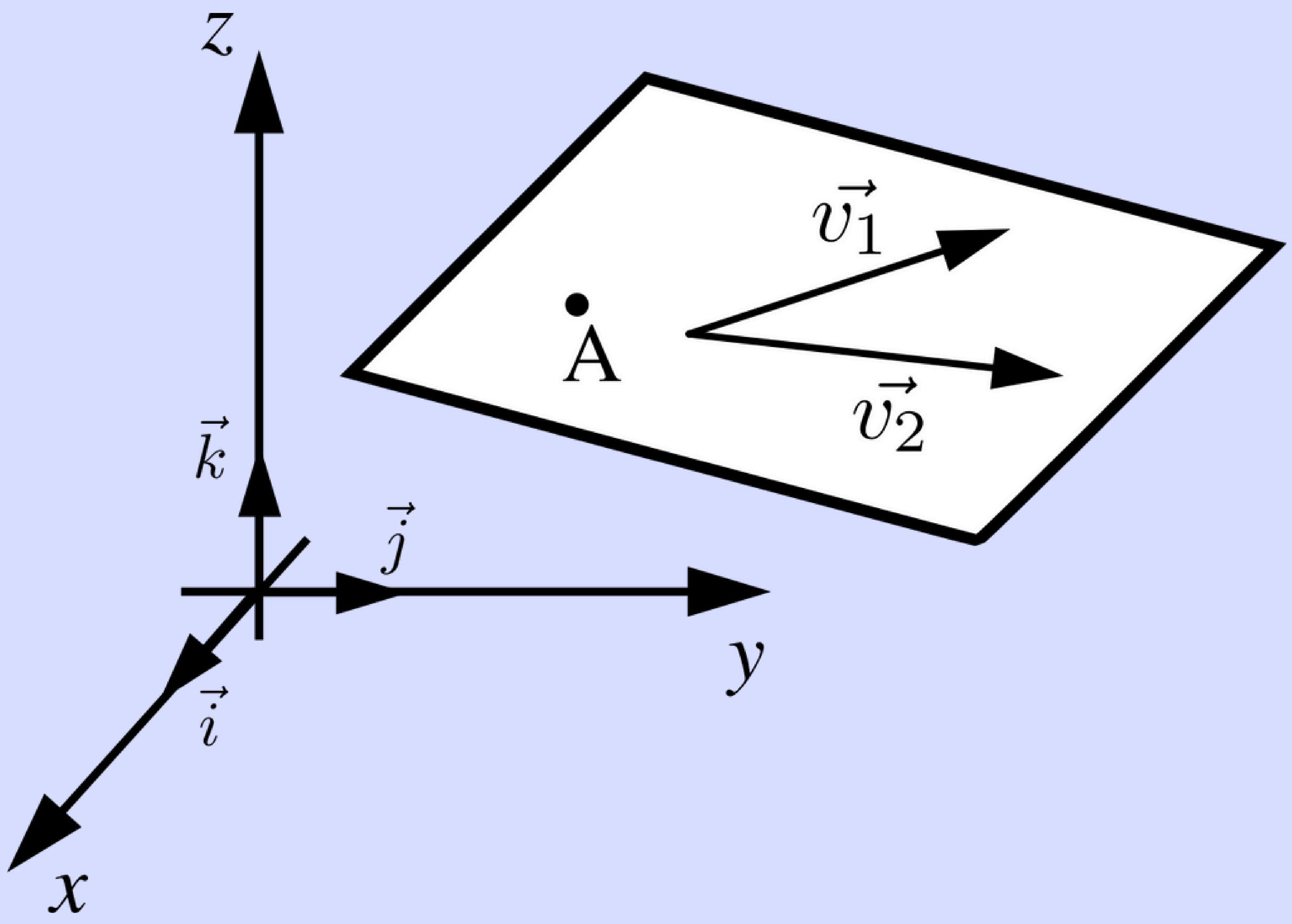
Equação geral do plano

Exemplo: Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto A(2,1,-2) e é perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Determinação de um plano

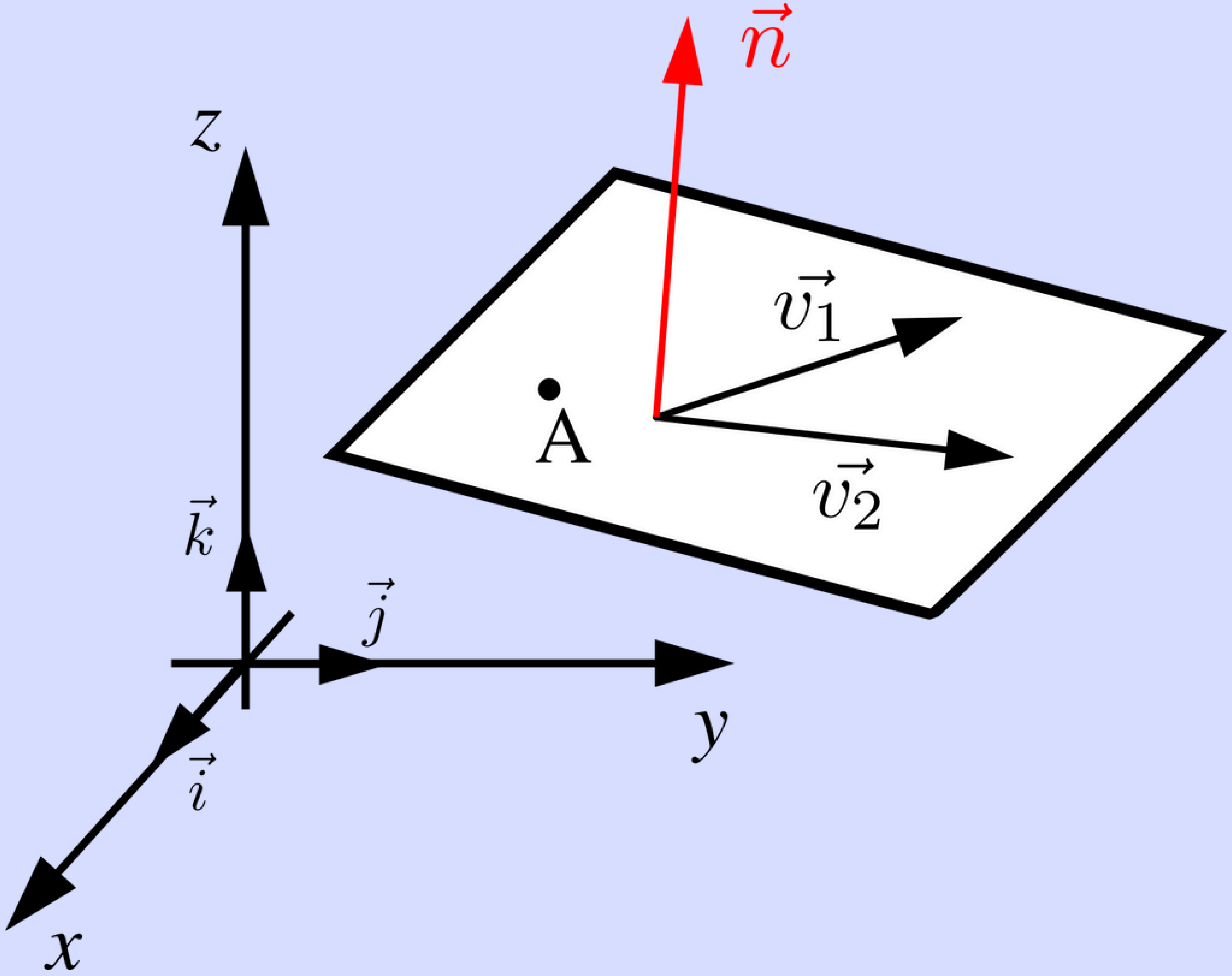
1) Um ponto A e dois vetores paralelos ao plano



Determinação de um plano

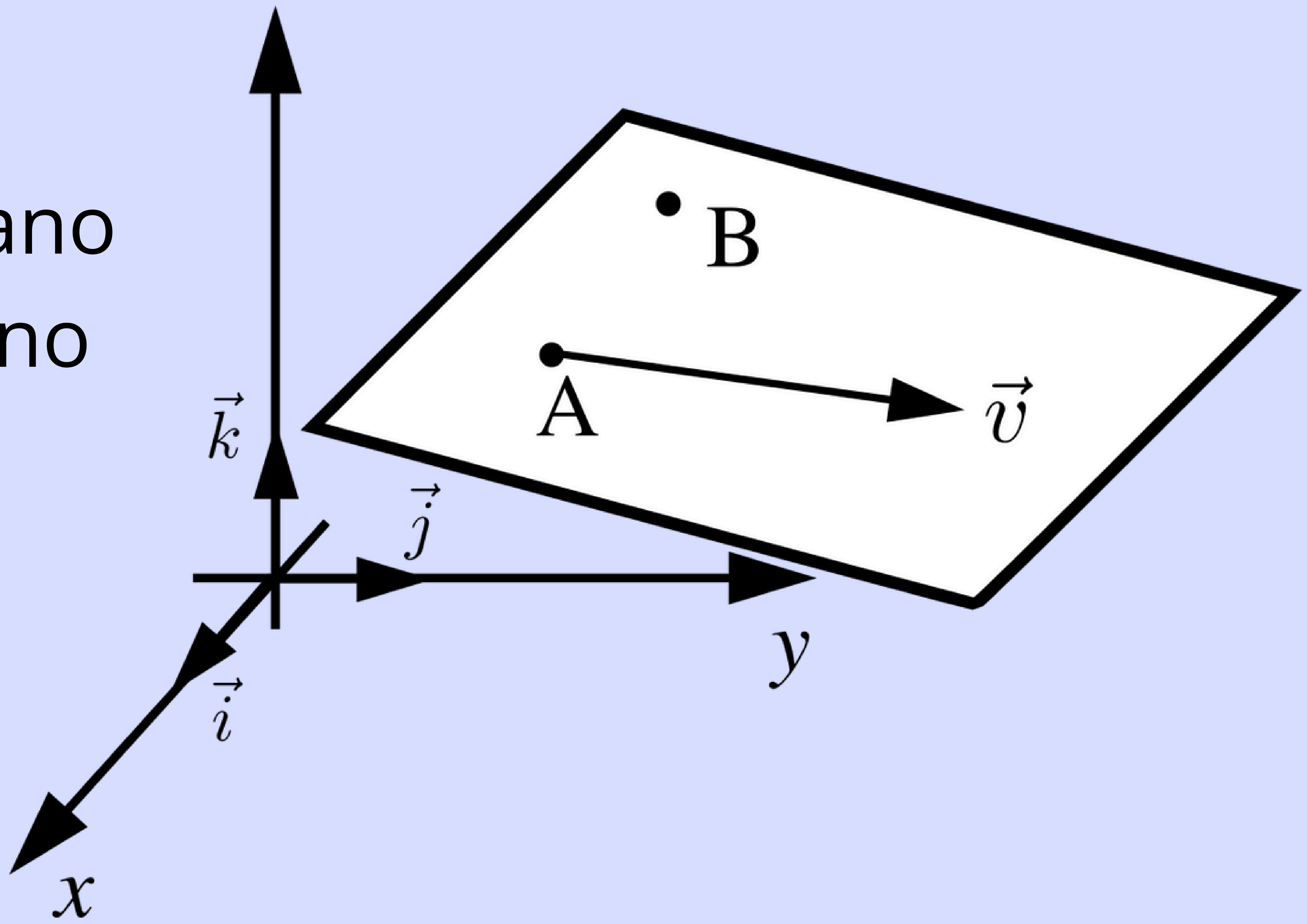
1) Um ponto A e dois vetores paralelos ao plano

$$\boxed{\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}}$$



Determinação de um plano

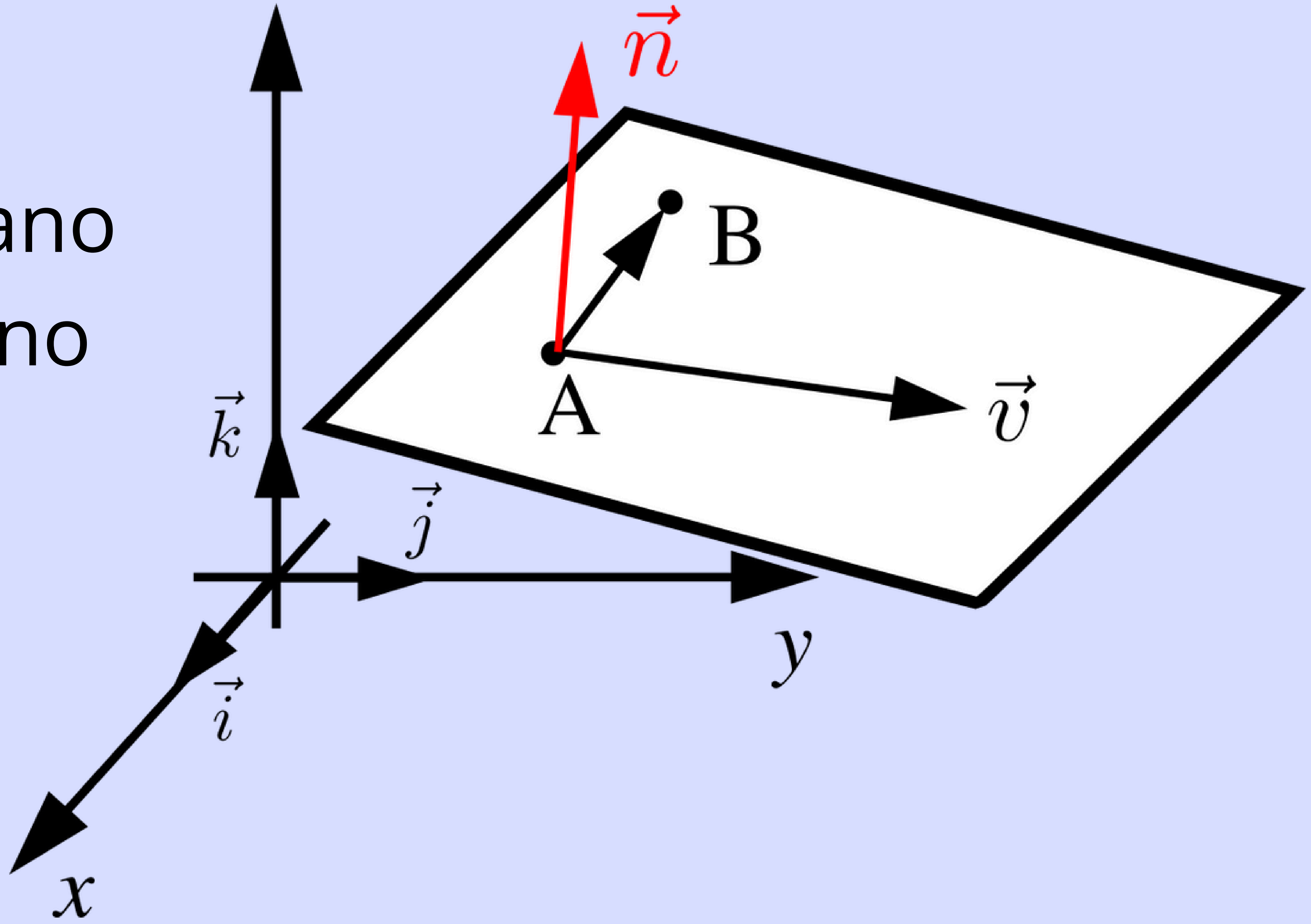
2) Dois pontos A e B no plano e um vetor paralelo ao plano



Determinação de um plano

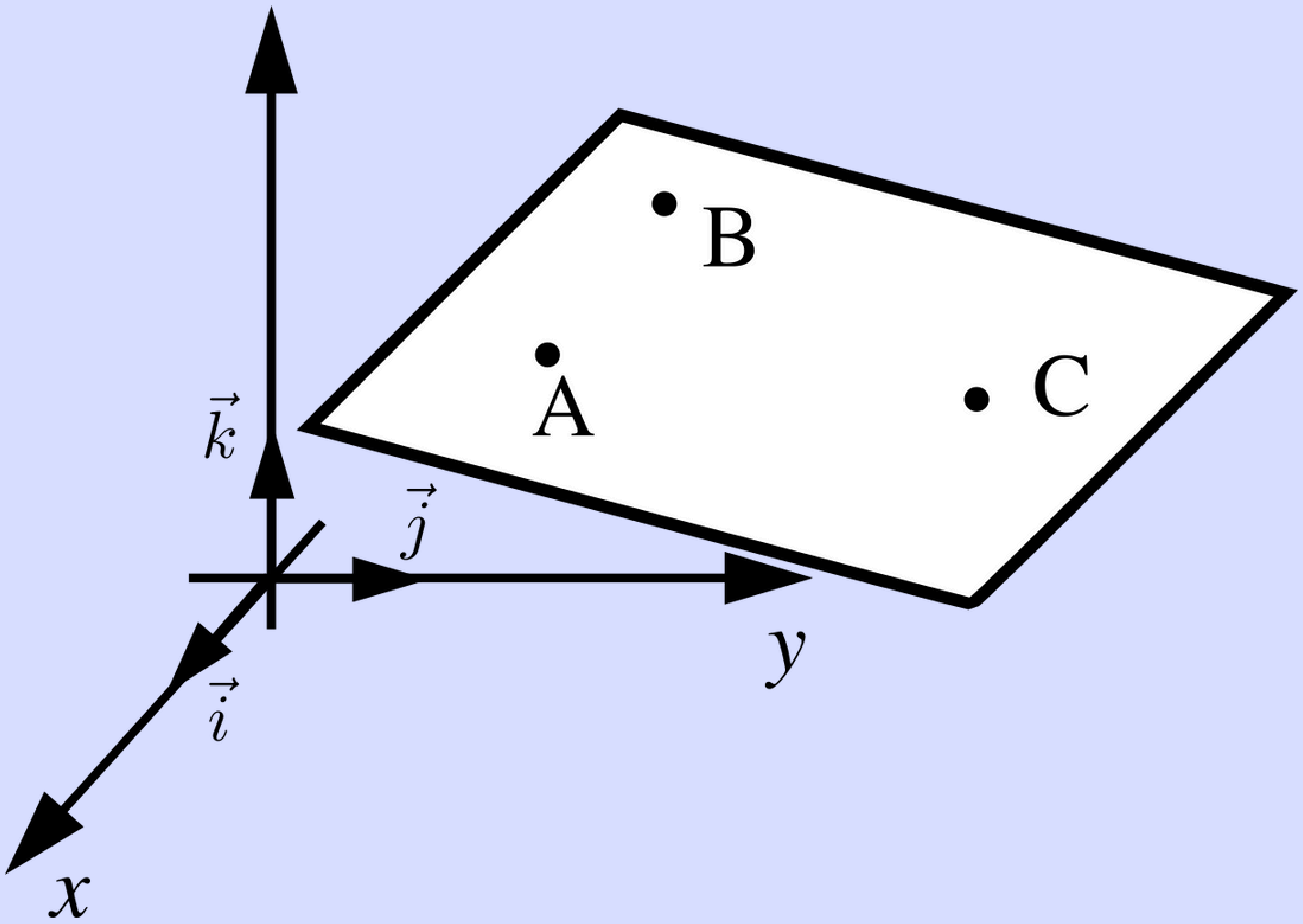
2) Dois pontos A e B no plano e um vetor paralelo ao plano

$$\boxed{\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}}$$



Determinação de um plano

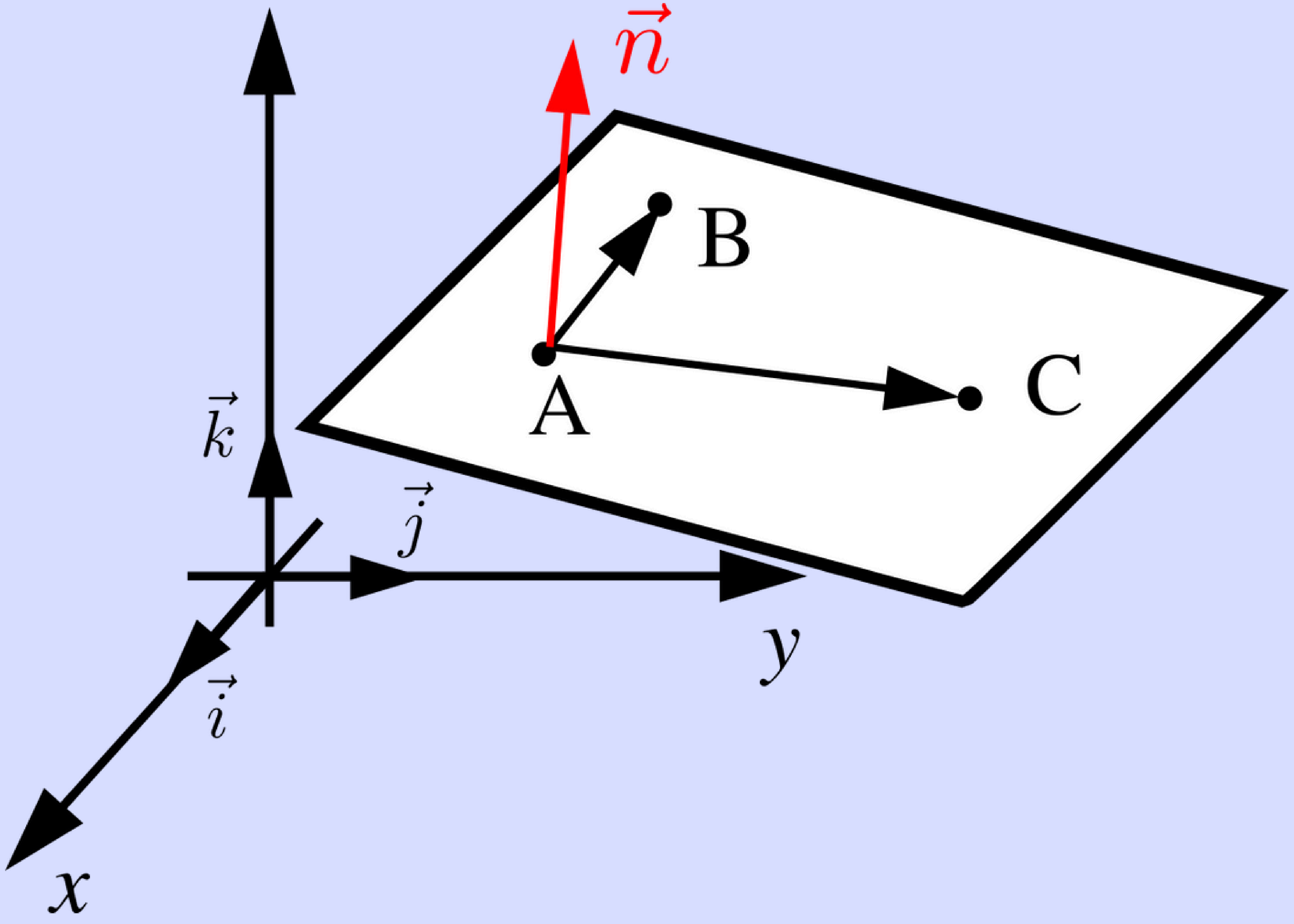
3) Três pontos A, B e C



Determinação de um plano

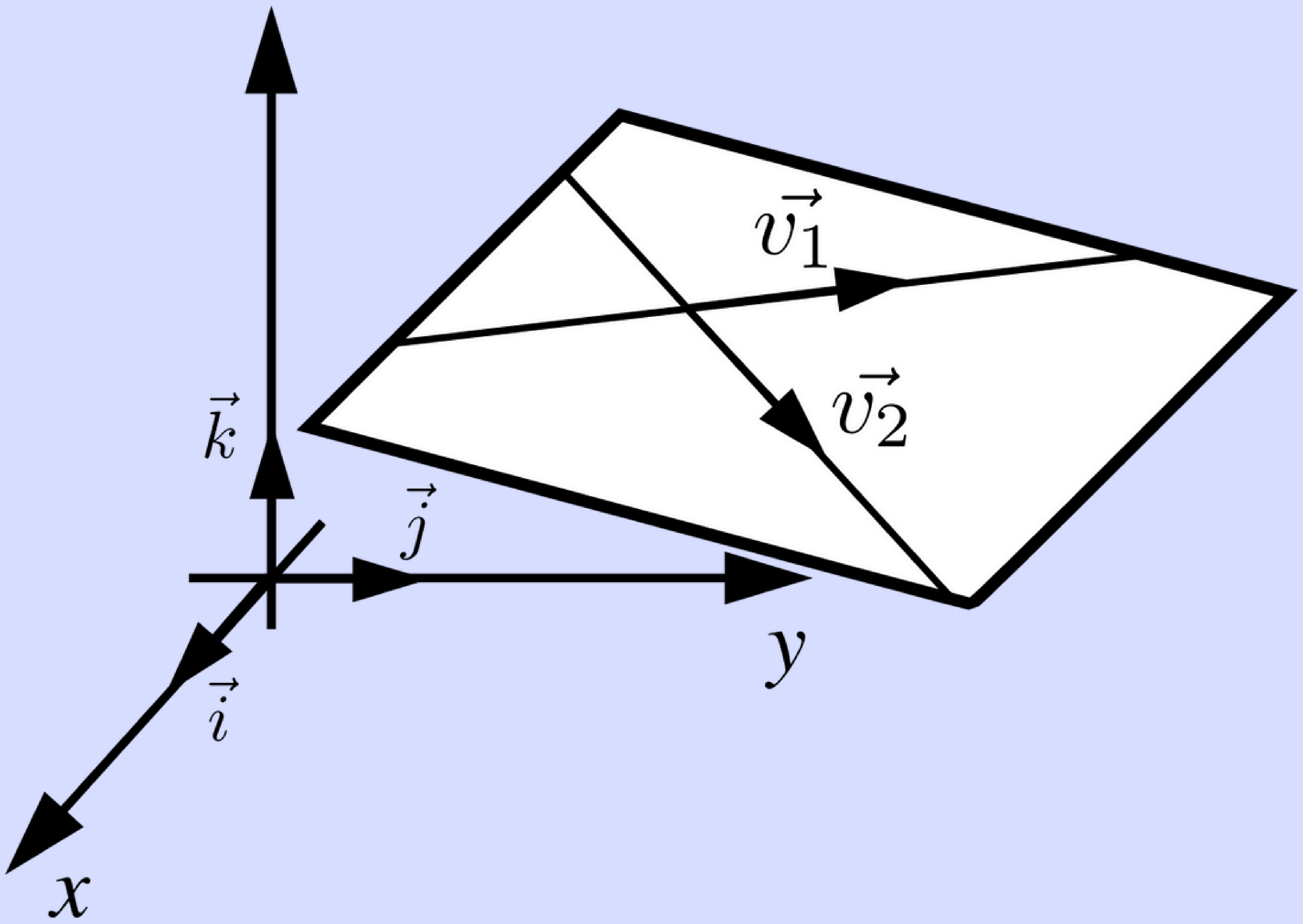
3) Três pontos A, B e C

$$\boxed{\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}$$



Determinação de um plano

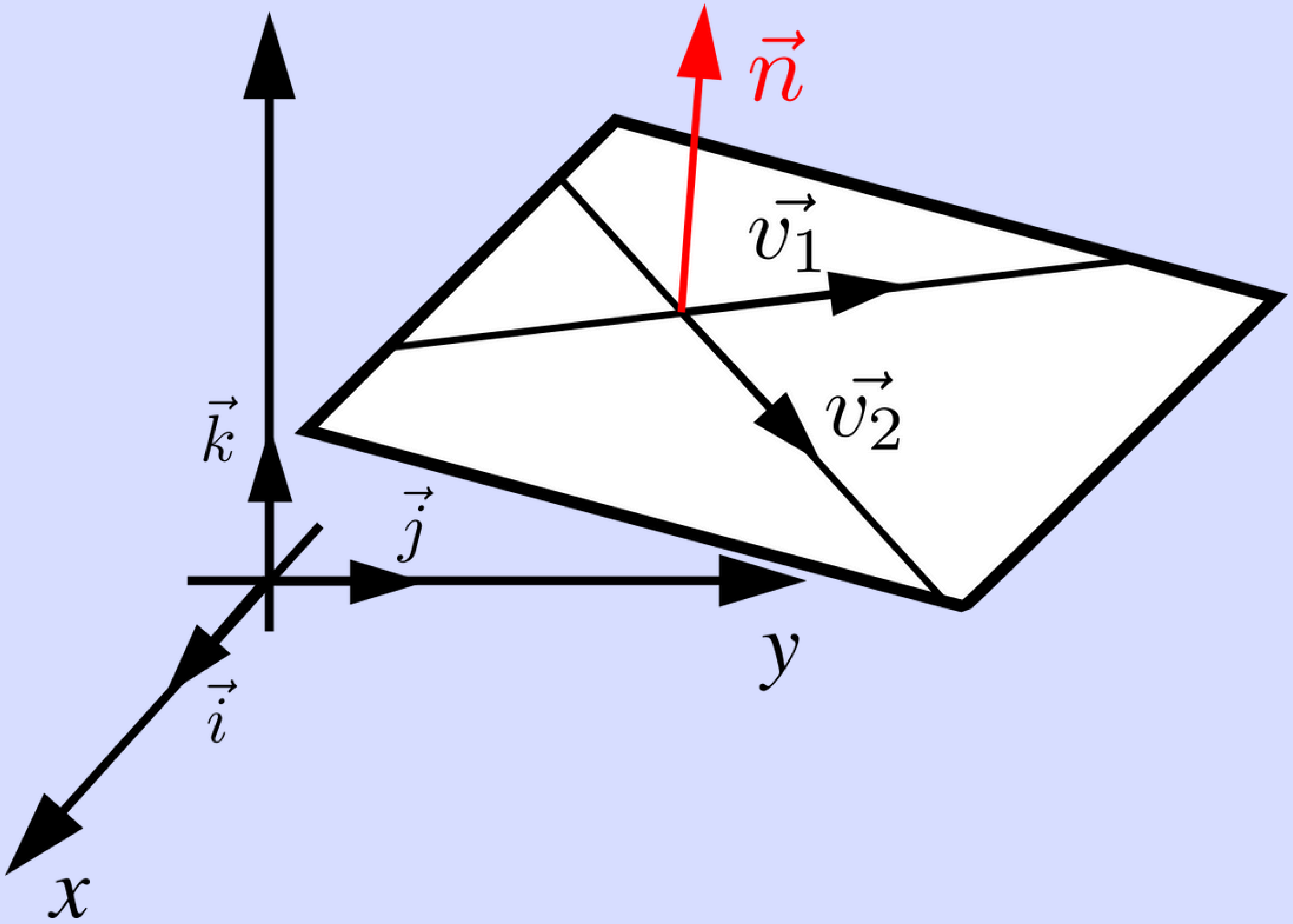
4) Plano contém duas retas concorrentes



Determinação de um plano

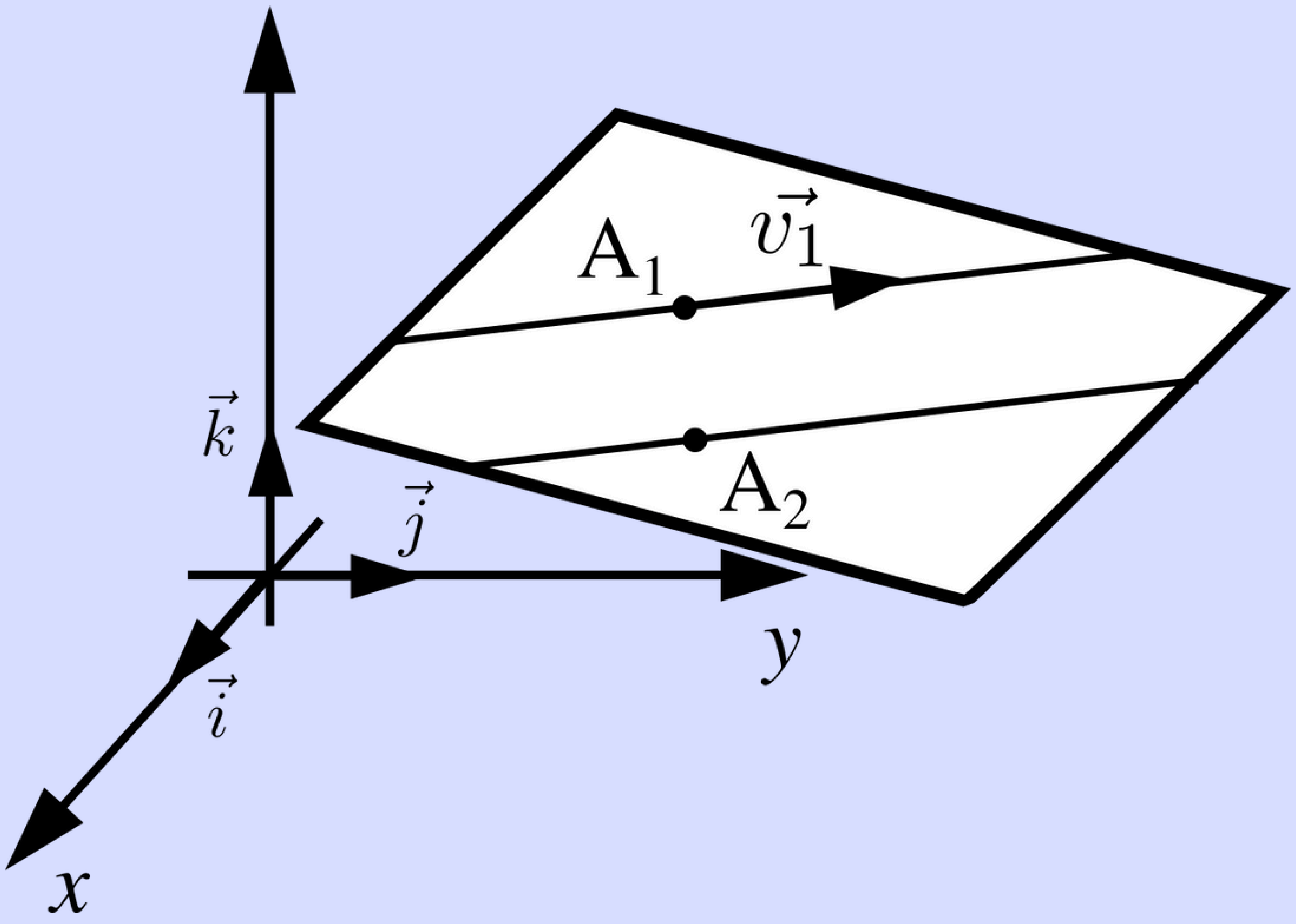
4) Plano contém duas retas concorrentes

$$\boxed{\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}}$$



Determinação de um plano

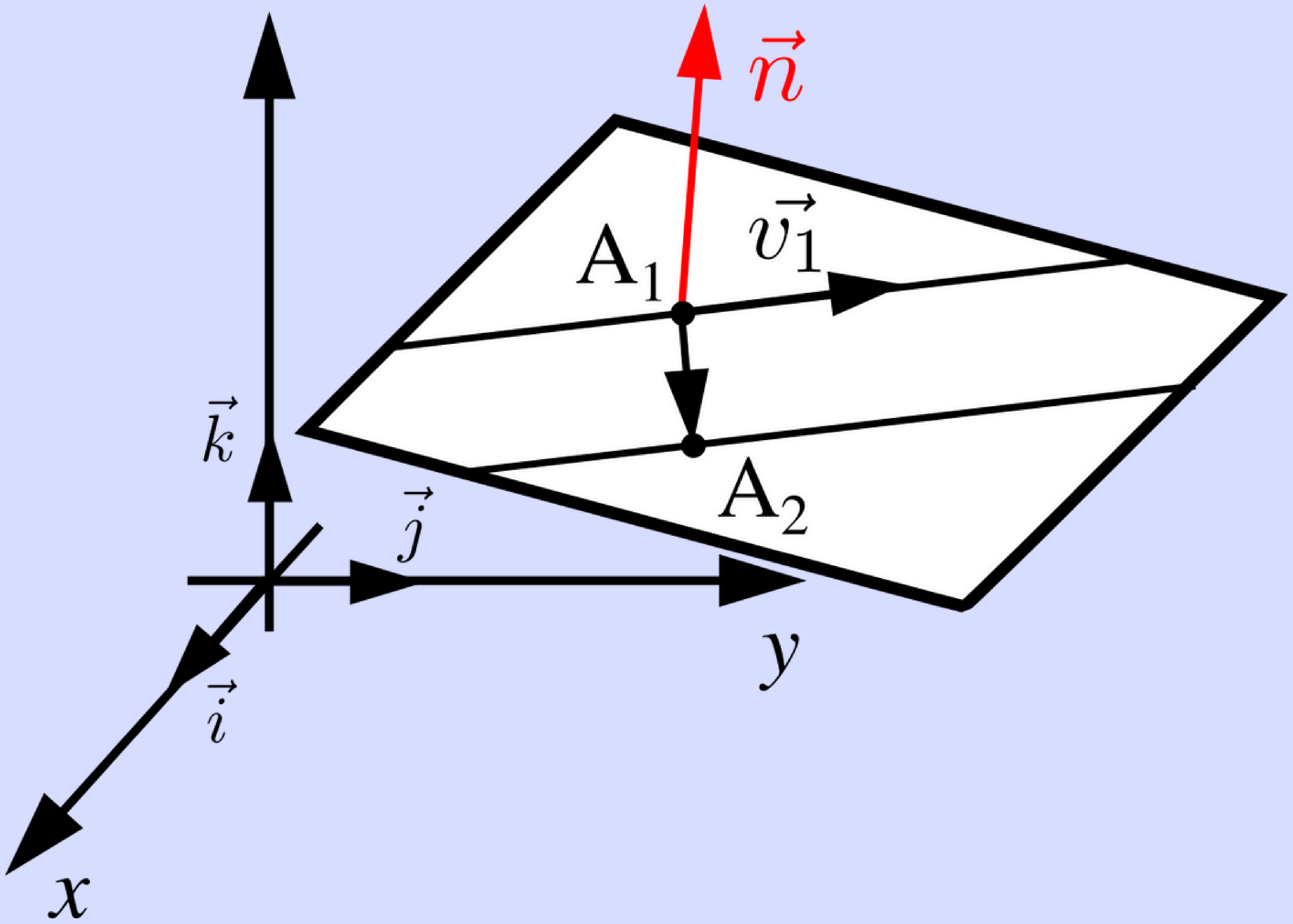
5) Plano contém duas retas paralelas



Determinação de um plano

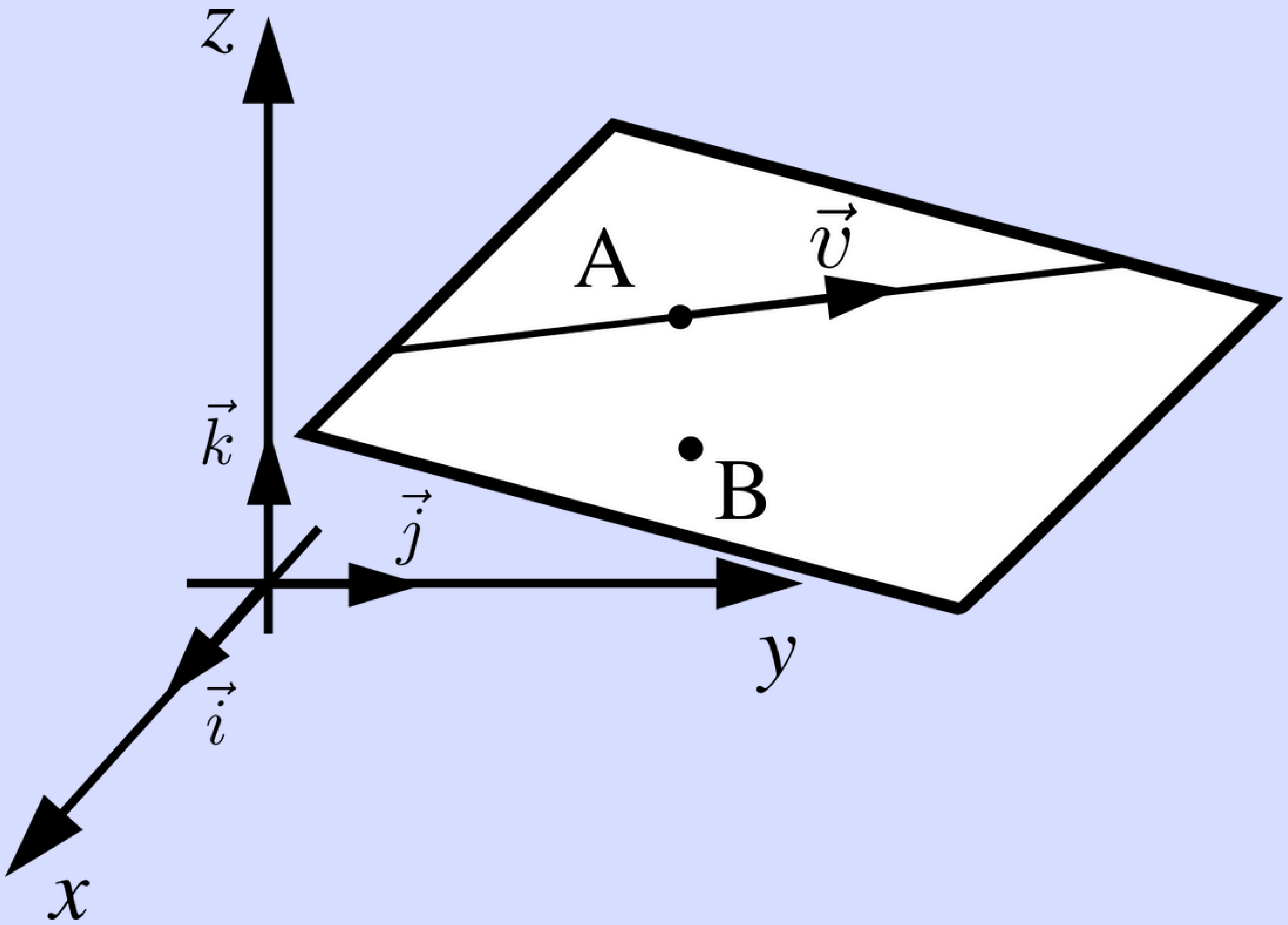
5) Plano contém duas retas paralelas

$$\boxed{\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2}}$$



Determinação de um plano

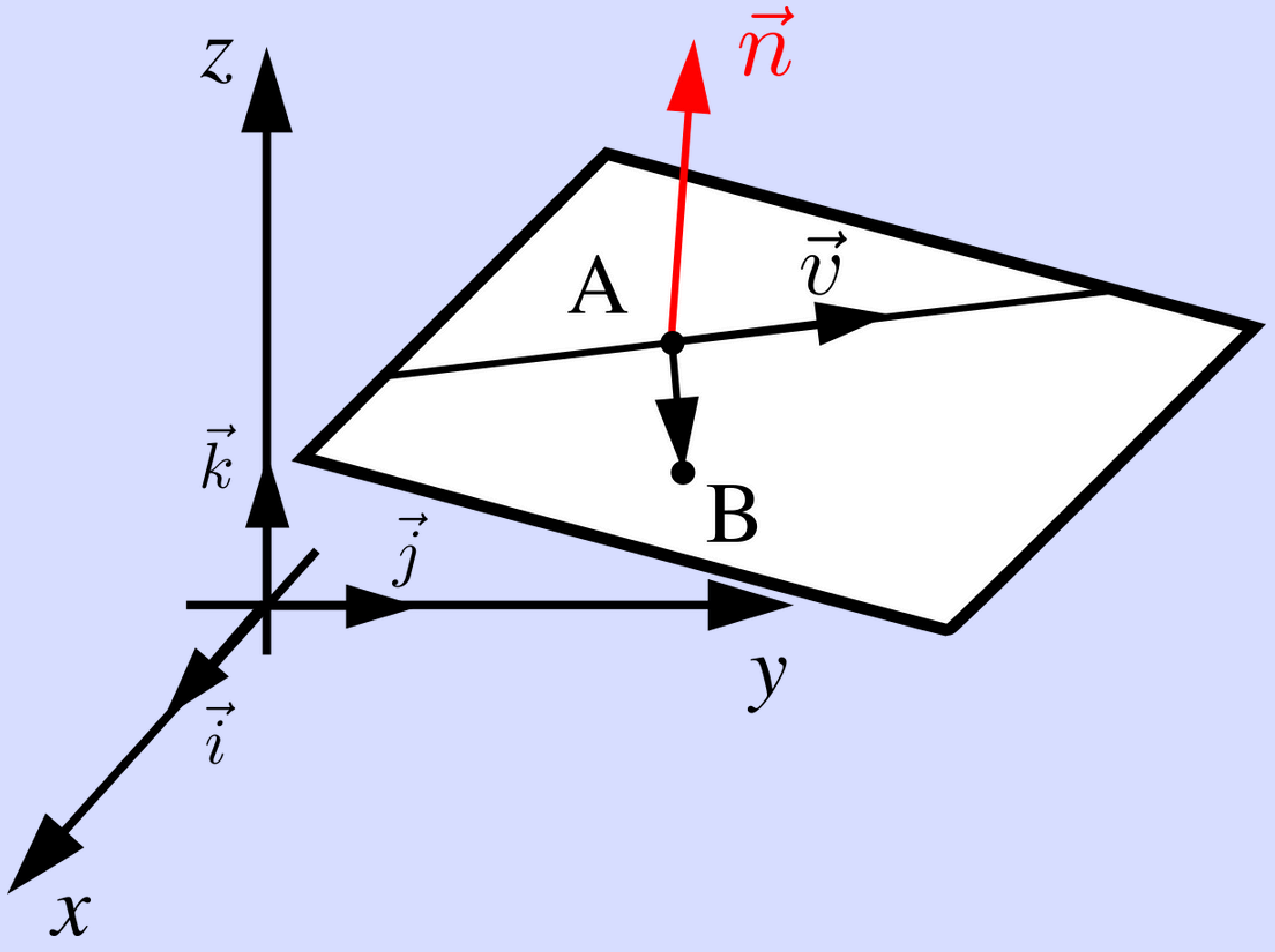
6) Plano contém uma reta e um ponto $B \notin r$



Determinação de um plano

6) Plano contém uma reta e um ponto $B \notin r$

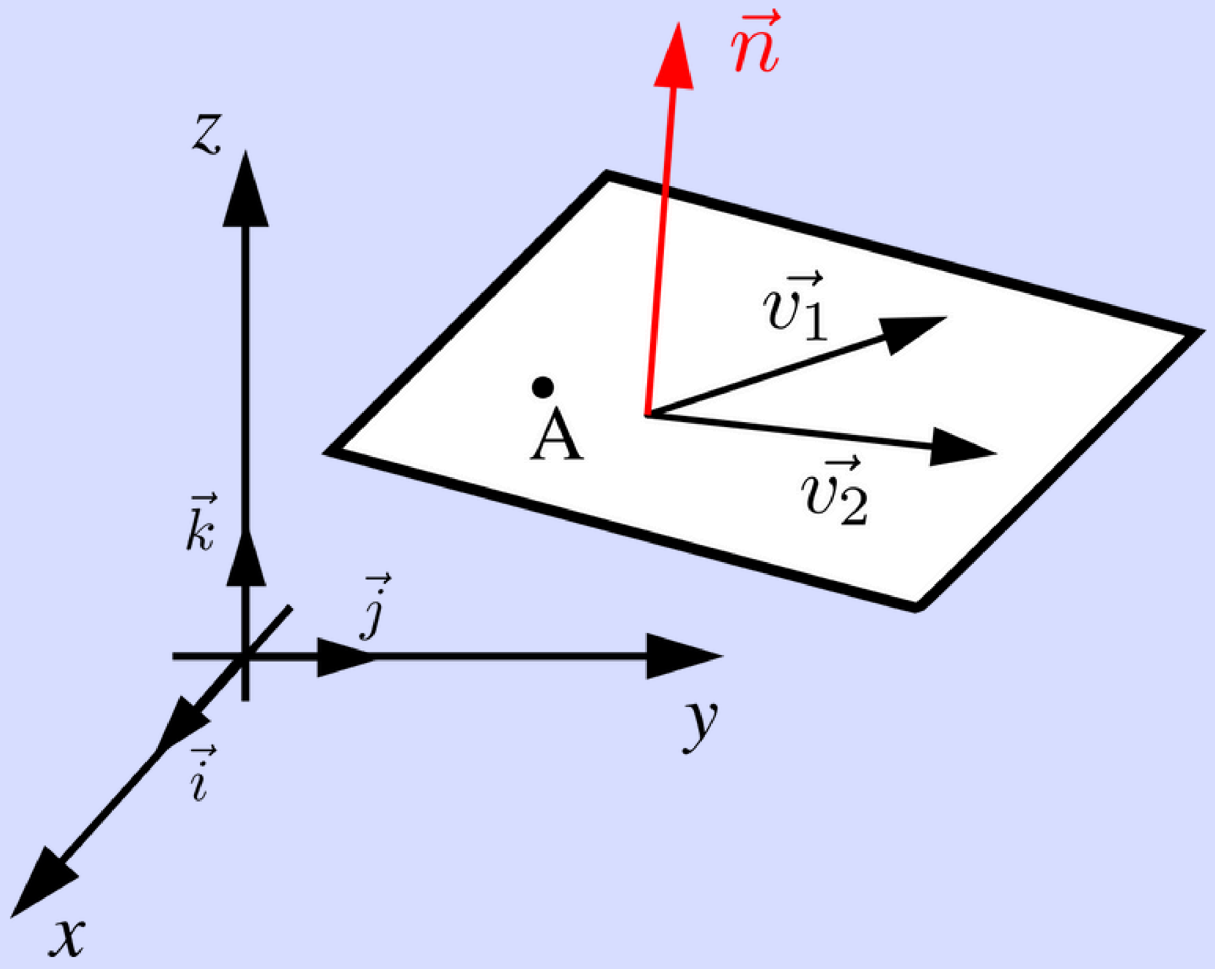
$$\boxed{\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{AB}}$$



Determinação de um plano

A determinação do vetor normal $\vec{n}$ ocorre pelo produto vetorial de dois vetores representados no plano

- Estes vetores são denominados **vetores-base** do plano



Determinação de um plano

Exemplo: Determinar a equação geral do plano determinado pelos pontos A(2,1,-1), B(0,-1,1) e C(1,2,1).

Determinação de um plano

Exemplo: Determinar a equação do plano que contém a reta

$$r : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

e o ponto B(-3,2,1).

Casos particulares

Plano que passa pela origem

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{d = 0}$$

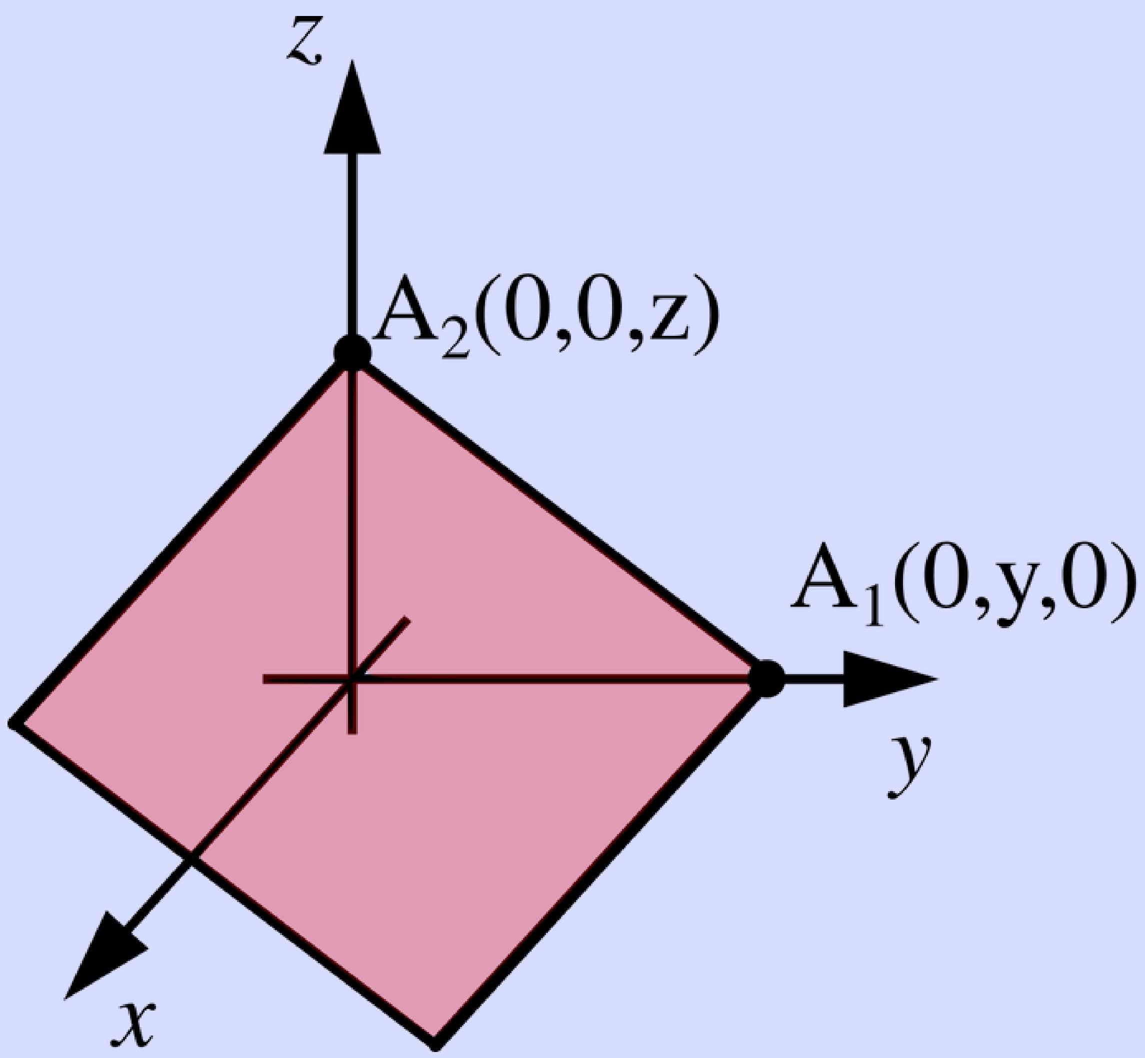
Casos particulares

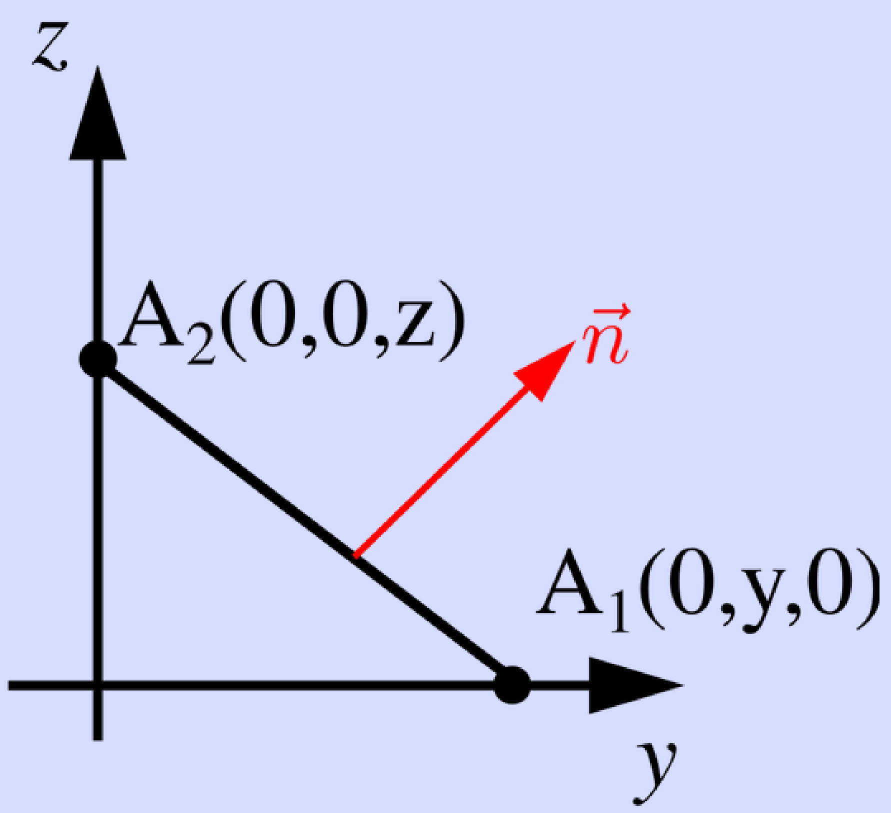
Planos paralelos aos eixos coordenados

Se apenas **uma** das componentes do vetor normal é **nula**, o **vetor** é **ortogonal a um dos eixos coordenados** e portanto o **plano é paralelo ao mesmo eixo.**

Casos particulares

- $a = 0, \vec{n} = (0, b, c) \perp Ox \implies \pi \parallel Ox$



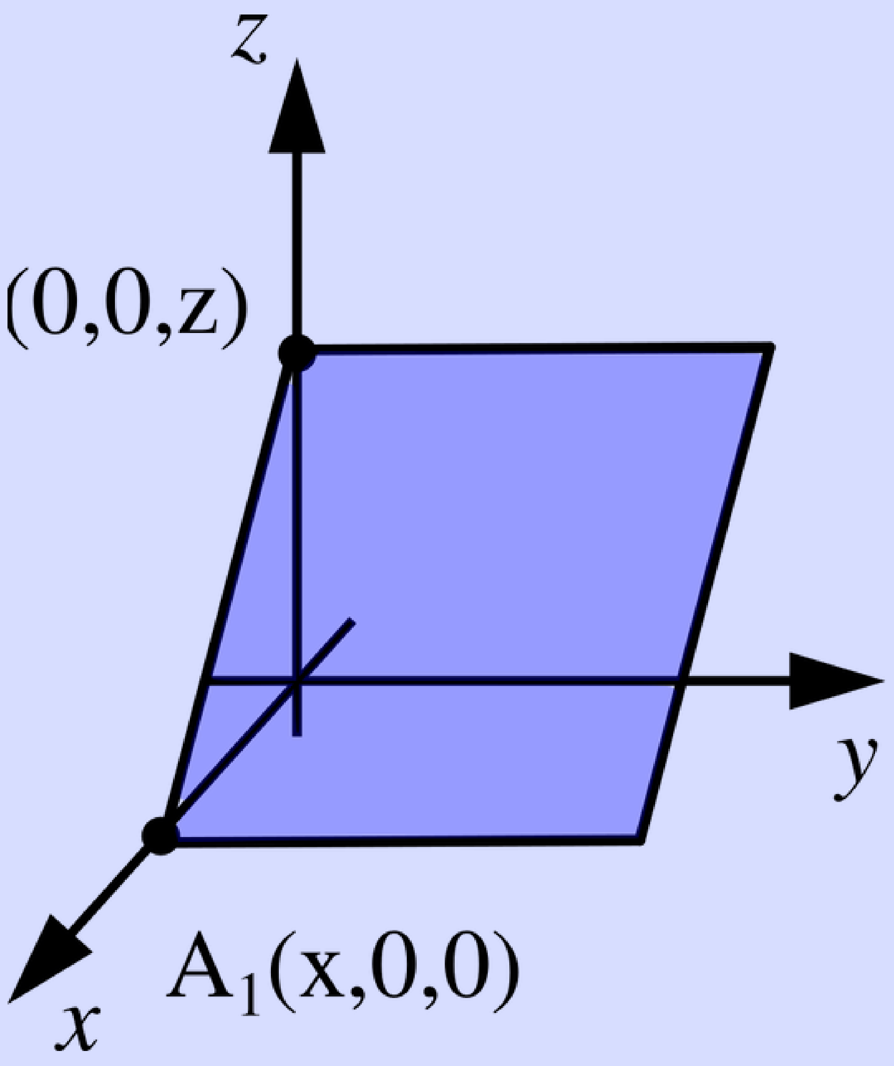


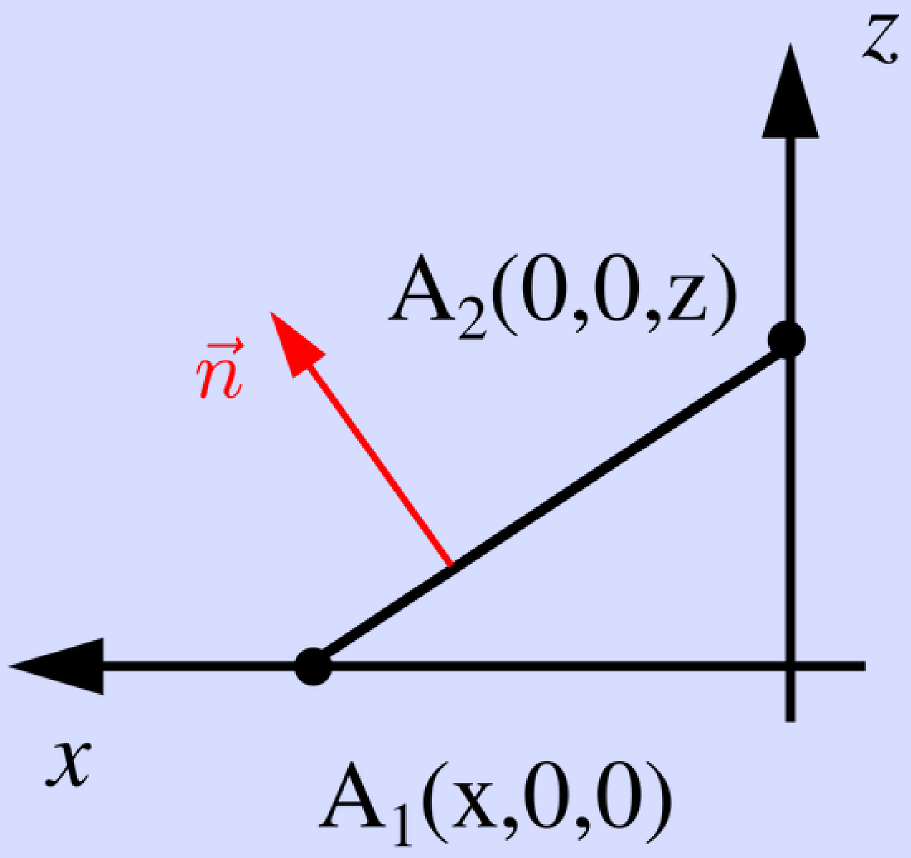
$\vec{n} \perp \vec{i}$

$$\boxed{by + cz + d = 0}$$

Casos particulares

- $b = 0, \vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy \Longrightarrow \pi \parallel Oy$



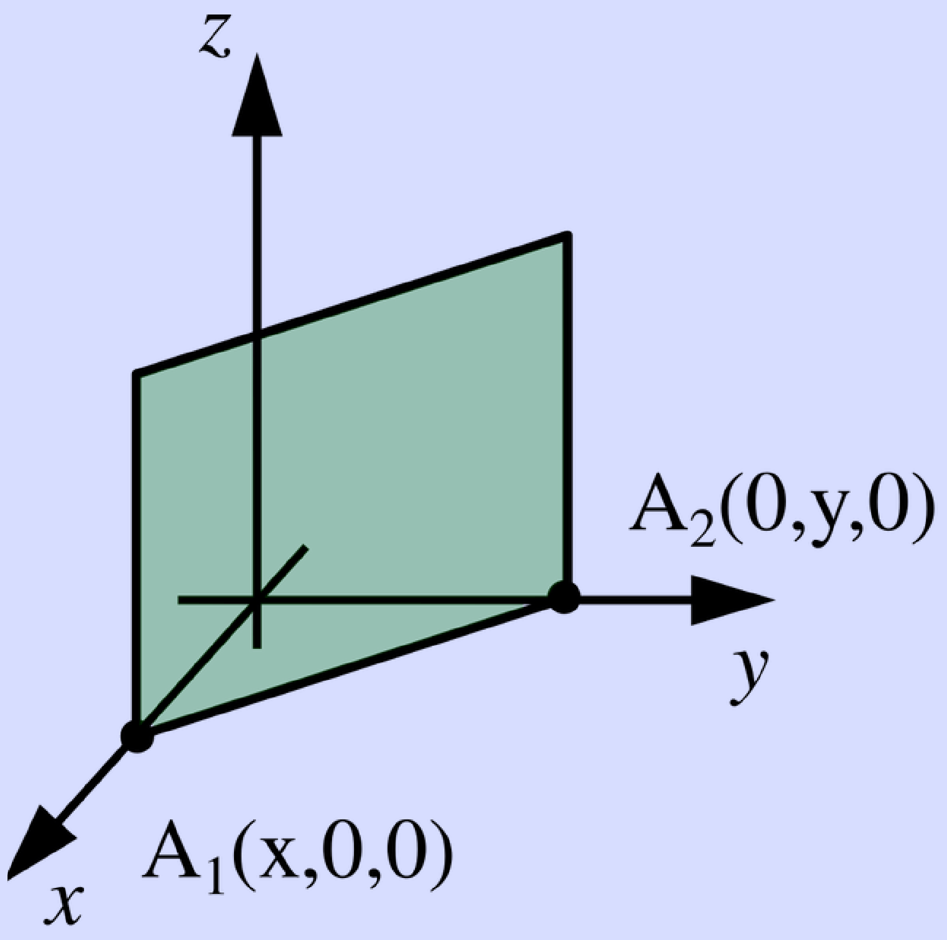


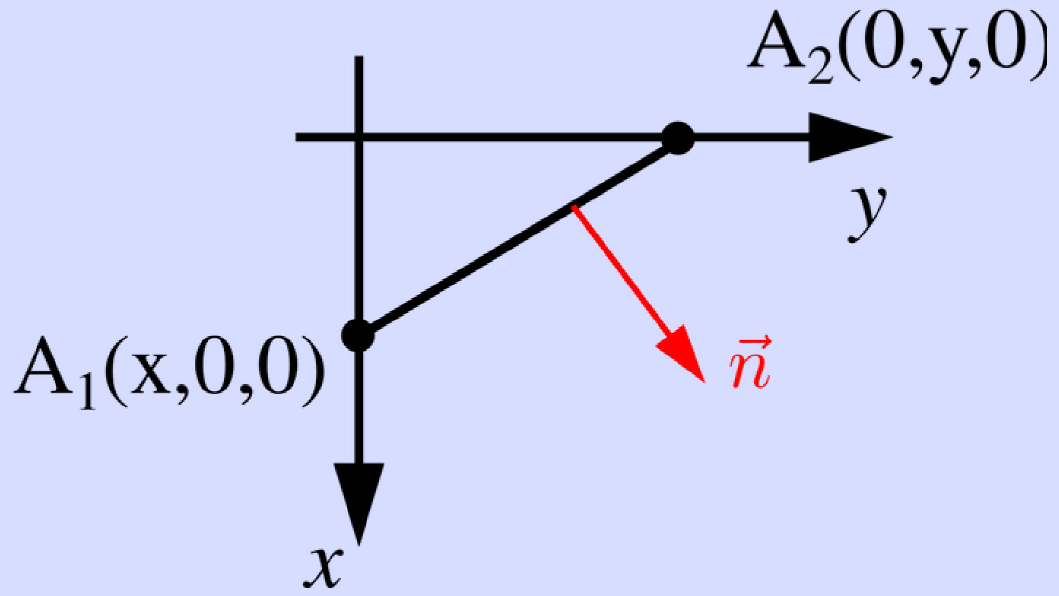
$\vec{n} \perp \vec{j}$

$$\boxed{ax + cz + d = 0}$$

Casos particulares

- $c = 0, \vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz \Longrightarrow \pi \parallel Oz$





$\vec{n} \perp \vec{k}$

$$\boxed{ax + by + d = 0}$$

Casos particulares

Planos paralelos aos planos coordenados

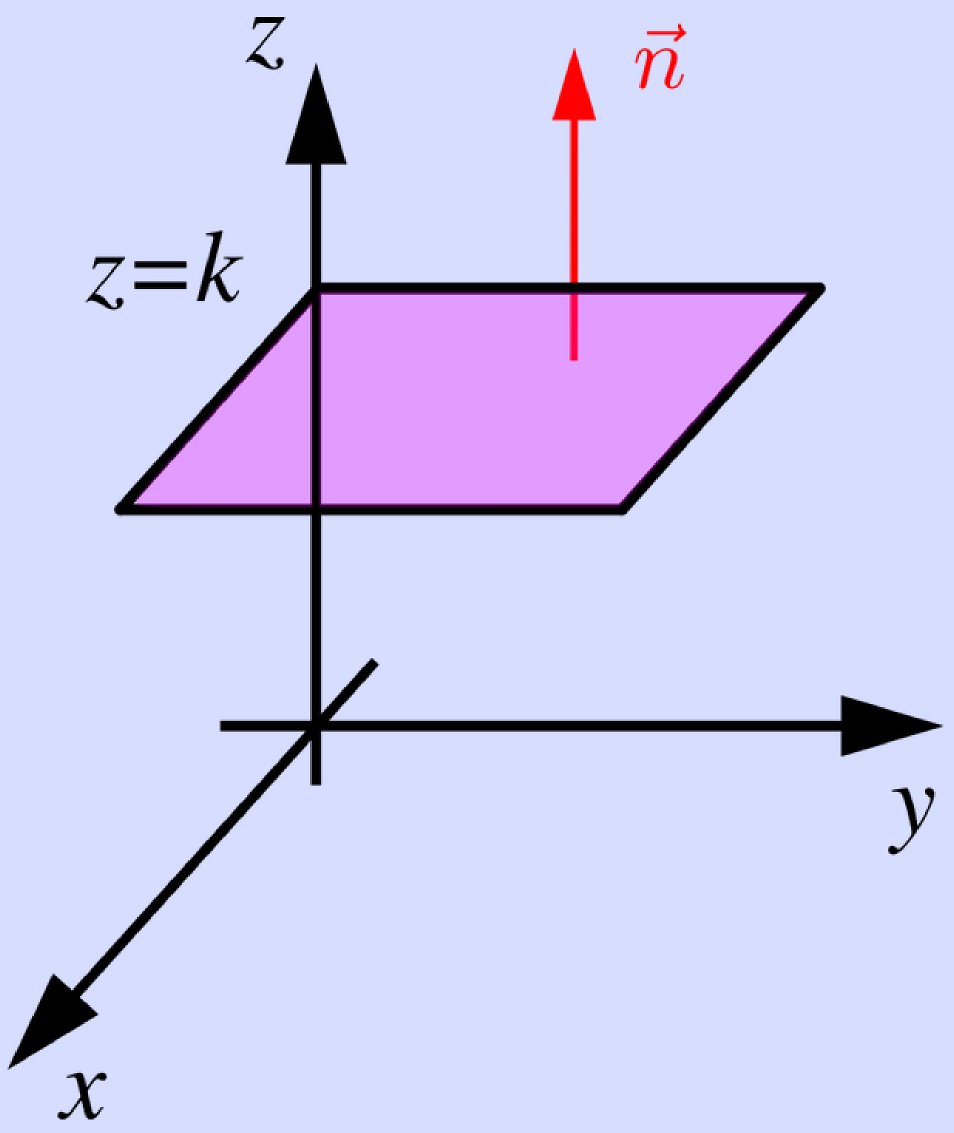
Se **duas** das componentes do vetor normal são **nulas**, o vetor normal é **colinear** a um dos vetores

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

e o **plano é paralelo ao plano dos outros dois vetores.**

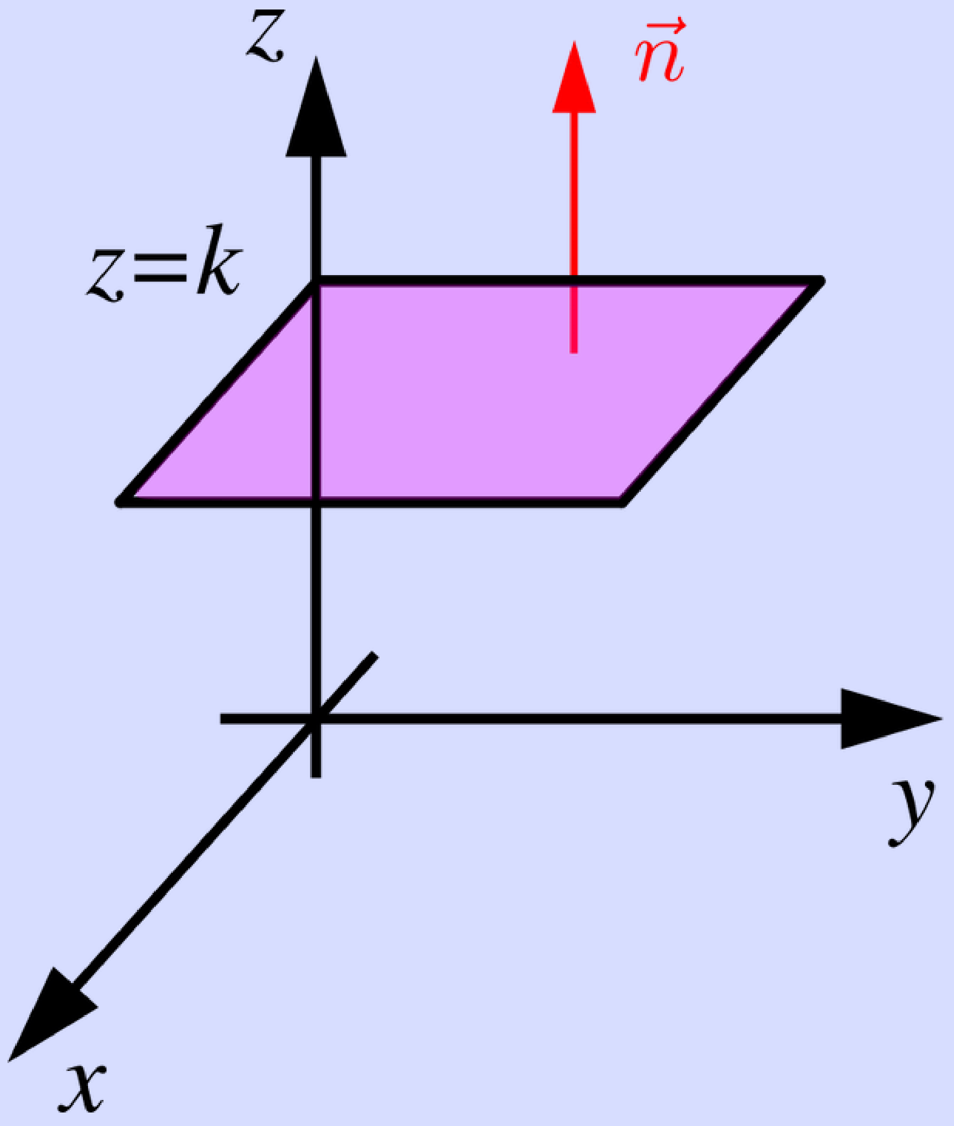
Casos particulares

$\rightarrow$ $a = b = 0, \vec{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1) \Longrightarrow \pi \parallel xOy$



Casos particulares

$\rightarrow a = b = 0, \vec{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1) \Longrightarrow \pi \parallel xOy$



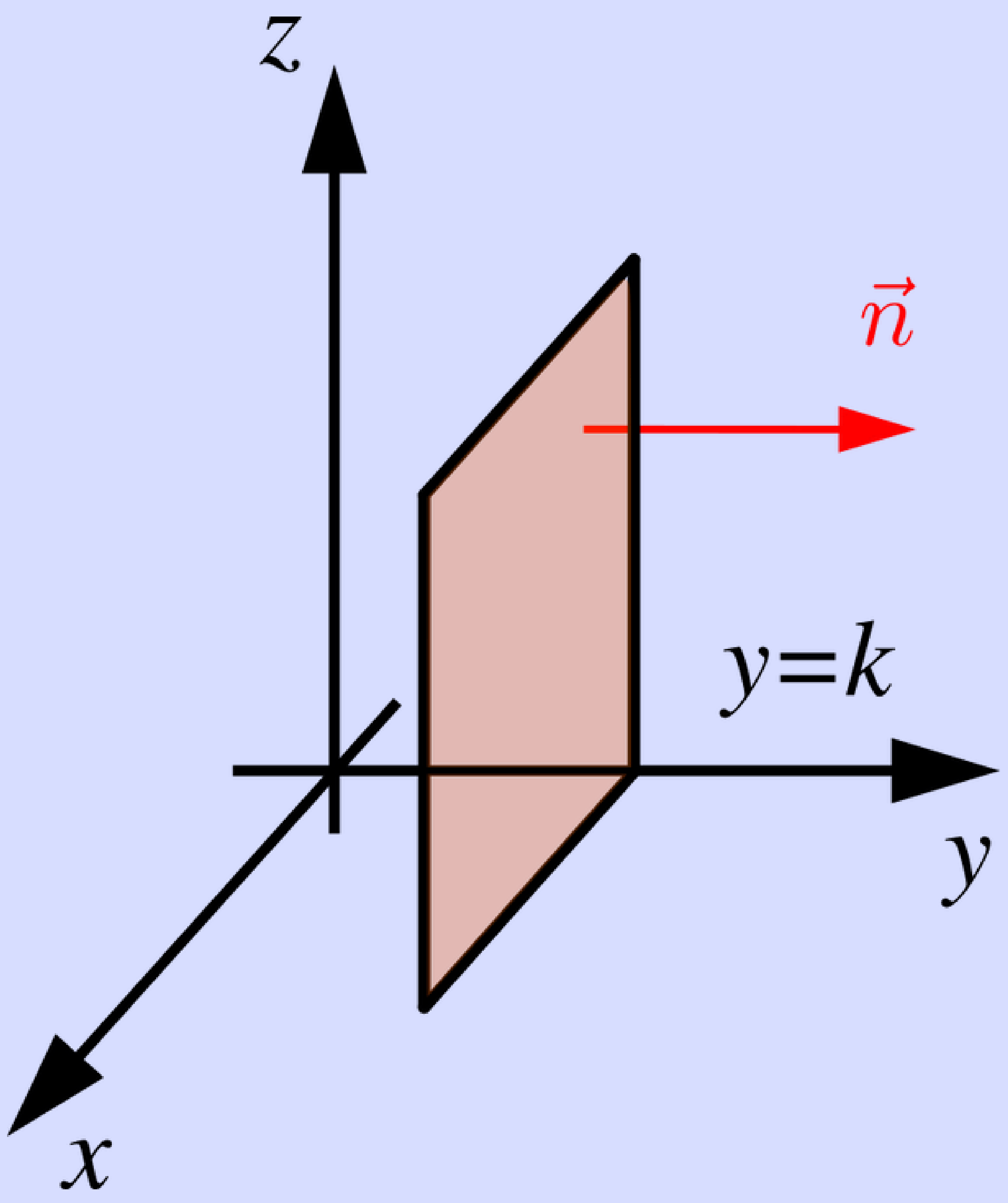
$$\vec{n} \parallel \vec{k}$$

$$cz + d = 0$$

$$\boxed{z = k}$$

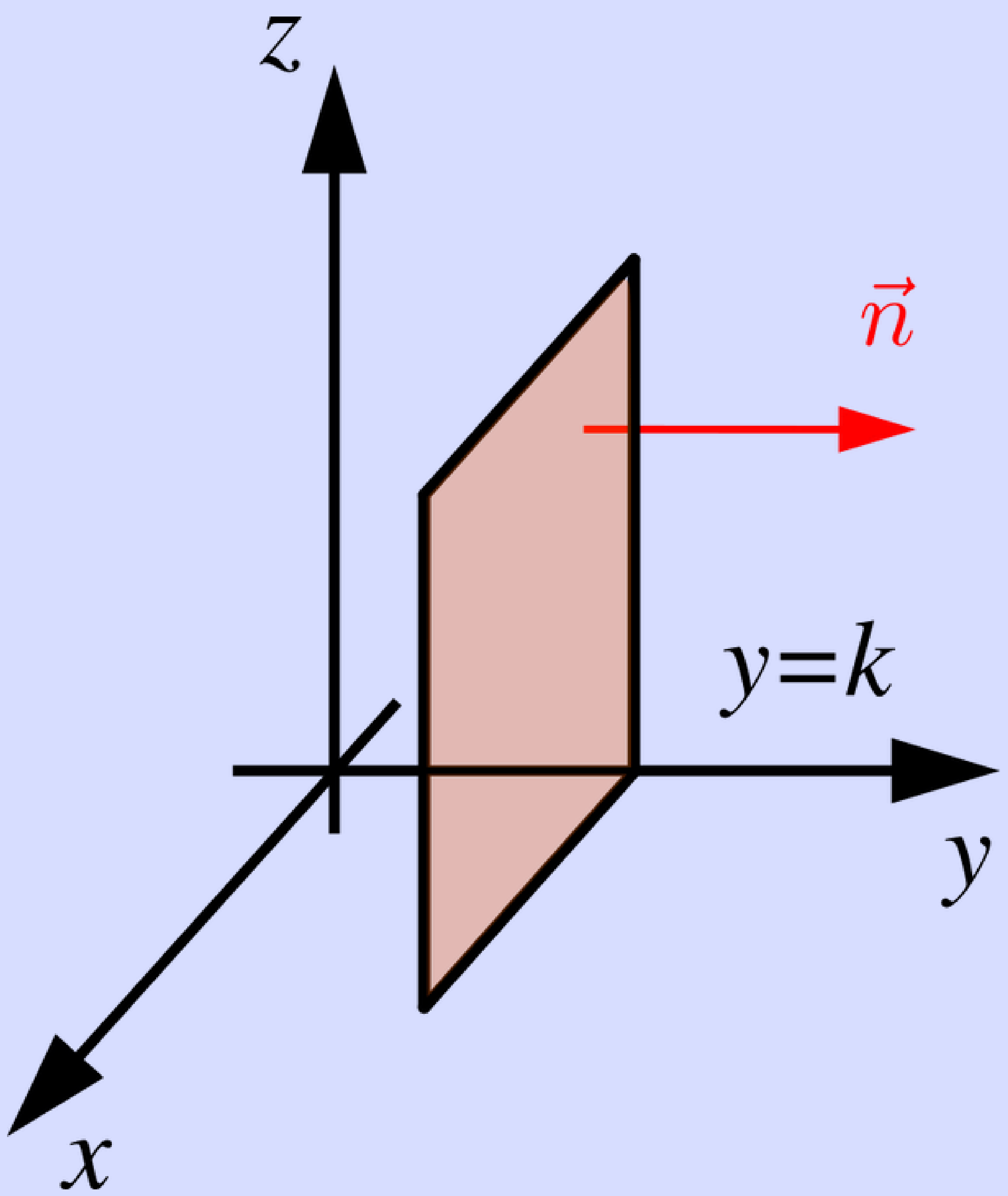
Casos particulares

$\rightarrow a = c = 0, \vec{n} = (0, b, 0) = b(0, 1, 0) \Longrightarrow \pi \parallel xOz$



Casos particulares

$\rightarrow a = c = 0, \vec{n} = (0, b, 0) = b(0, 1, 0) \implies \pi \parallel xOz$



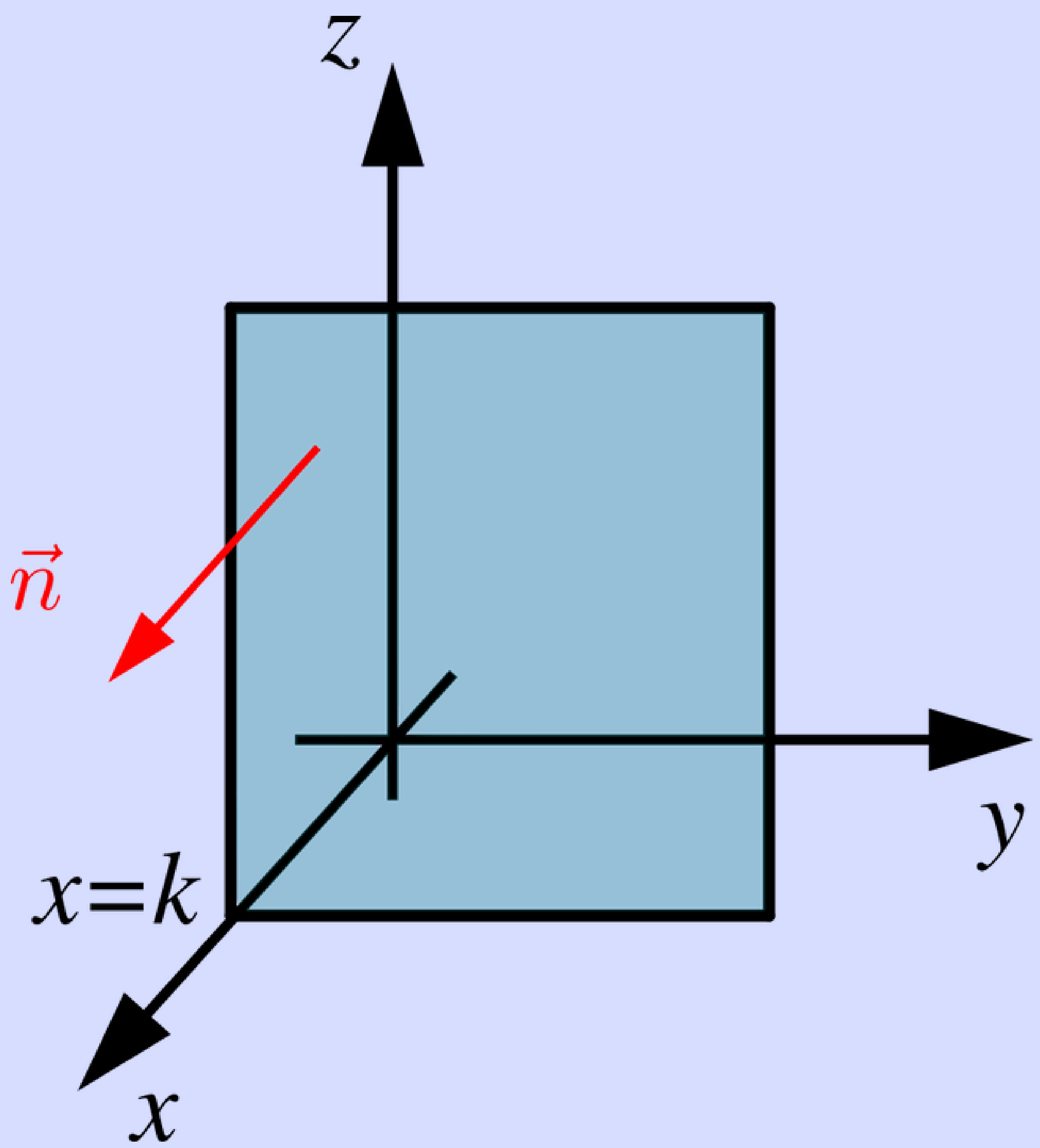
$$\vec{n} \parallel \vec{j}$$

$$by + d = 0$$

$$\boxed{y = k}$$

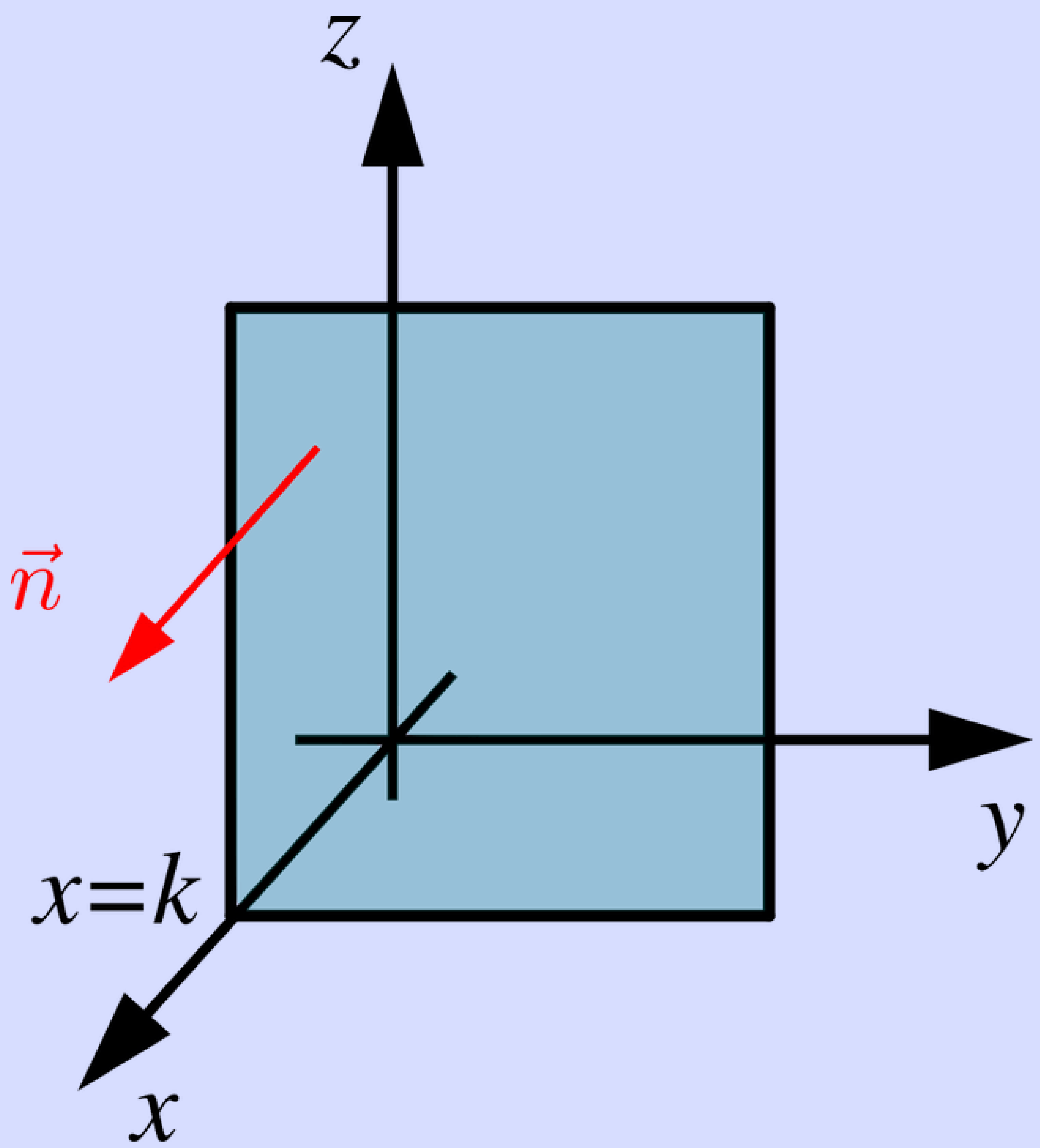
Casos particulares

$\rightarrow b = c = 0, \vec{n} = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0) \implies \pi \parallel yOz$



Casos particulares

$$\rightarrow b = c = 0, \vec{n} = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0) \Longrightarrow \pi \parallel yOz$$



$$\vec{n} \parallel \vec{i}$$

$$ax + d = 0$$

$$\boxed{x = k}$$

Casos particulares

Exemplo: Determinar a equação do plano que contém o ponto A(2,2,-1) e a reta

$$r : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Casos particulares

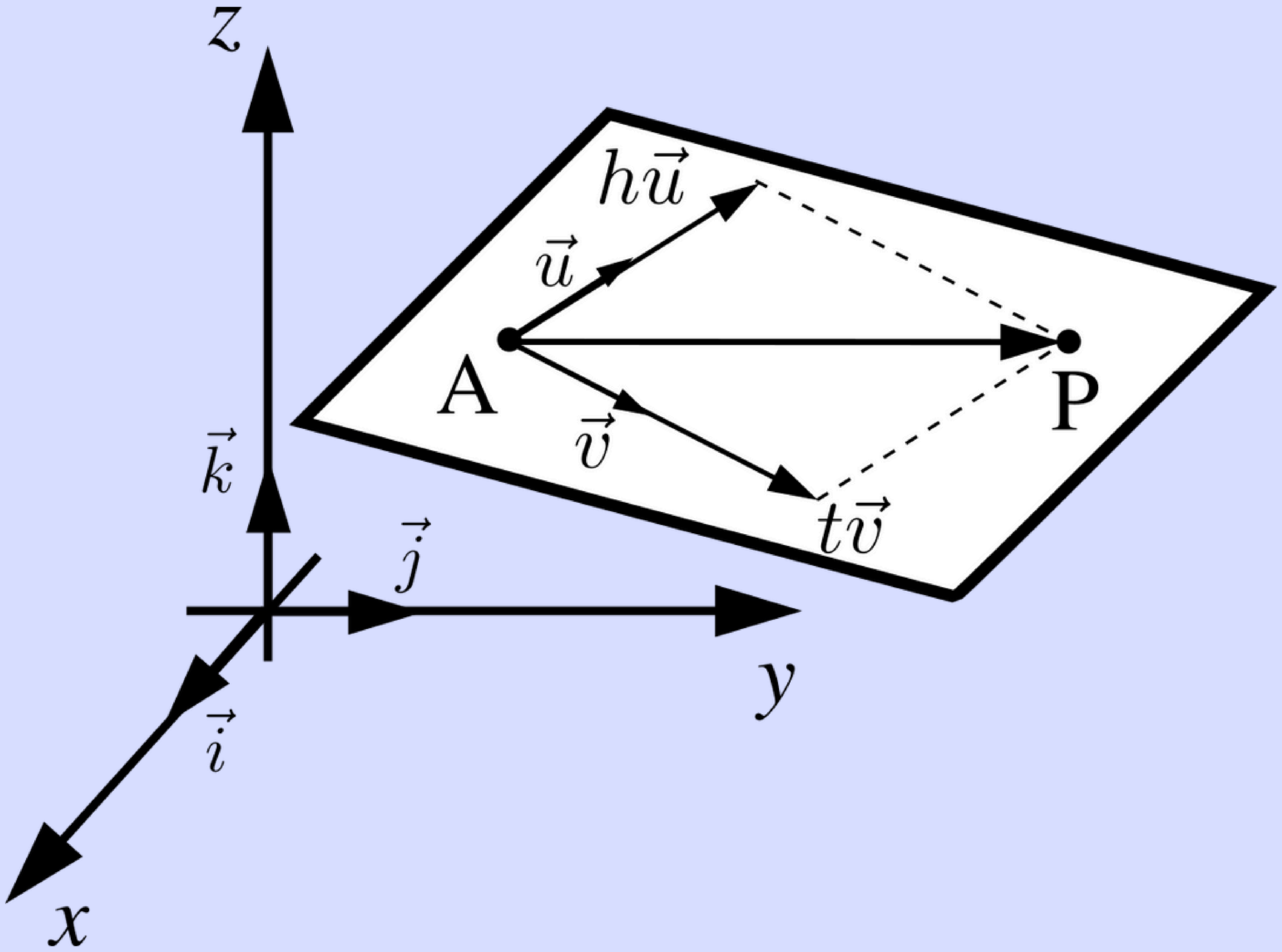
Exemplo: Determinar a equação do plano que contém o ponto A(2,2,-1) e a reta

$$r : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\ \pi : x - 2y + 2 = 0}$$

$\pi \parallel Oz$

Equações paramétricas do plano



$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$$

Equações paramétricas do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Equações paramétricas do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1h + a_2t \\ y = y_0 + b_1h + b_2t \\ z = z_0 + c_1h + c_2t \end{cases}}$$

Equações paramétricas do plano

Exemplo: Escrever as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos A(5,7,-2), B(8,2,-3) e C(1,2,4).

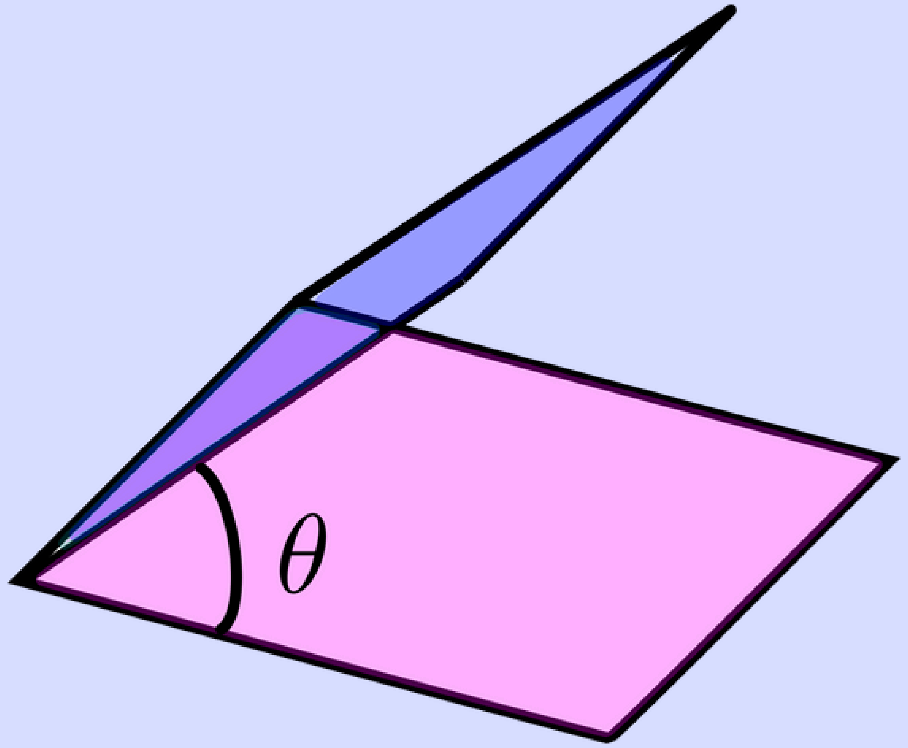
Ângulo de dois planos

Sejam os planos,

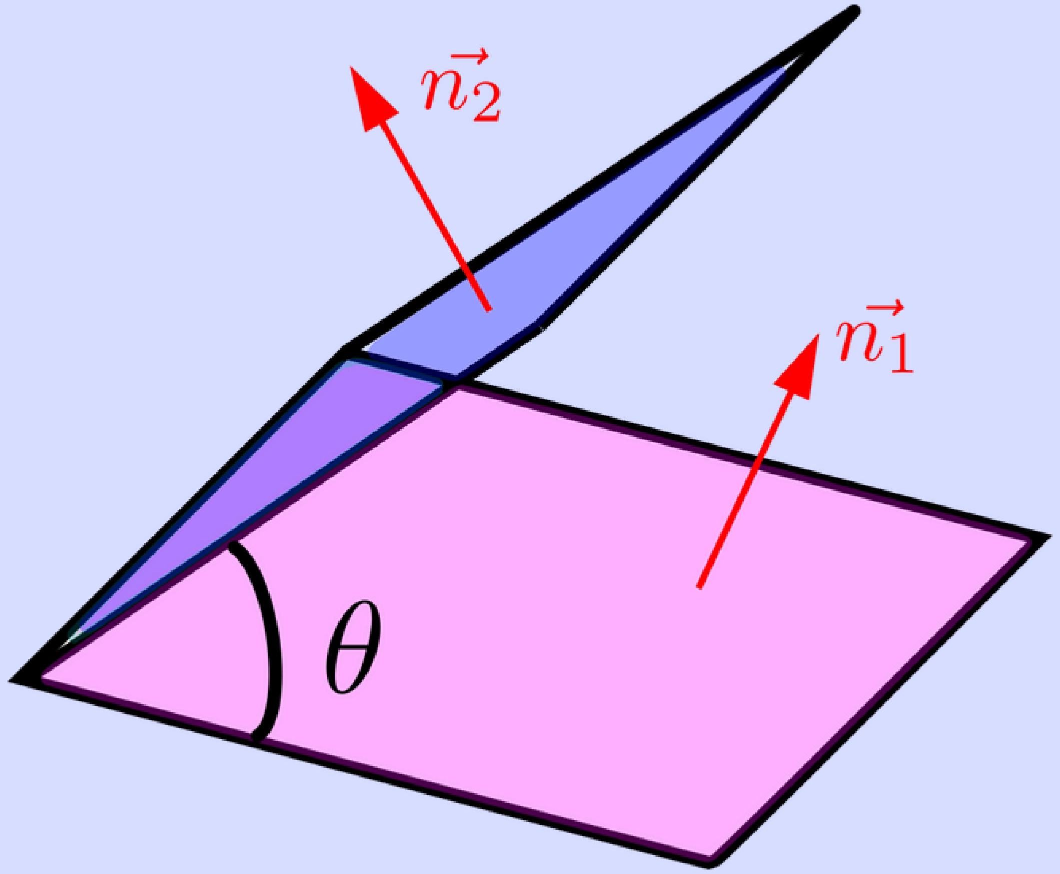
$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Seus vetores normais são

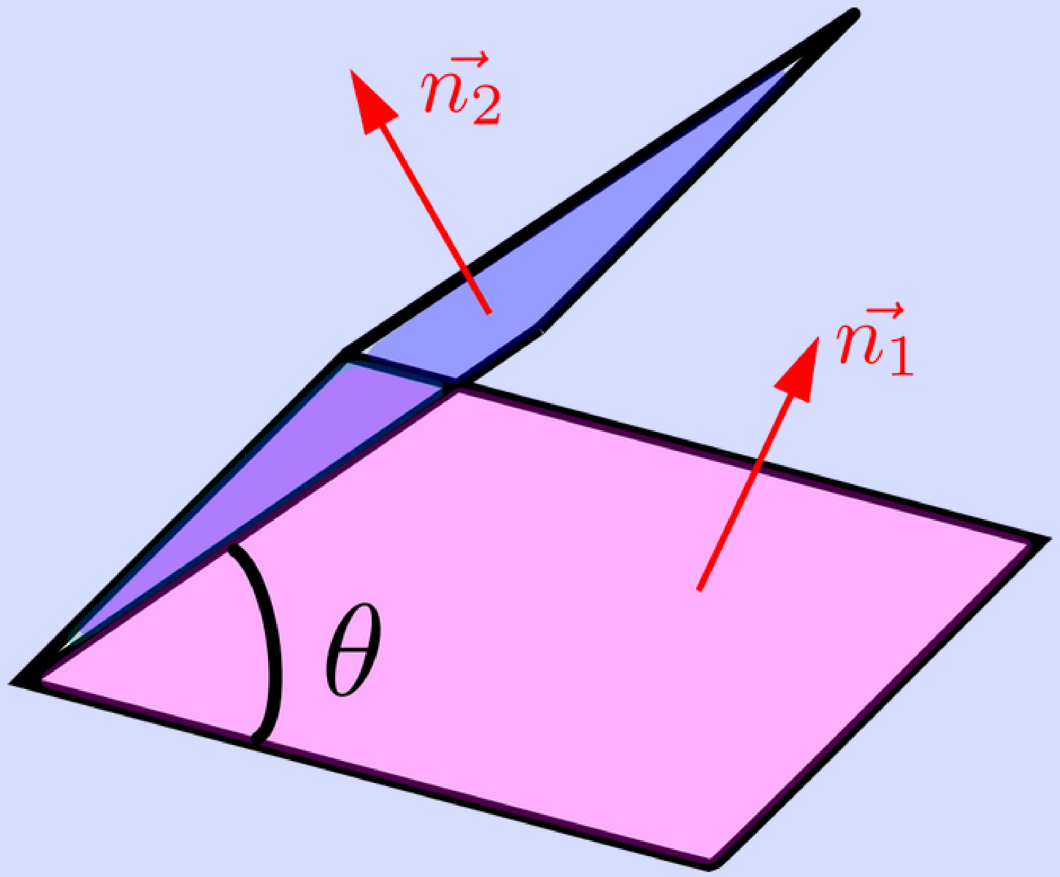
$$\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1) \qquad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

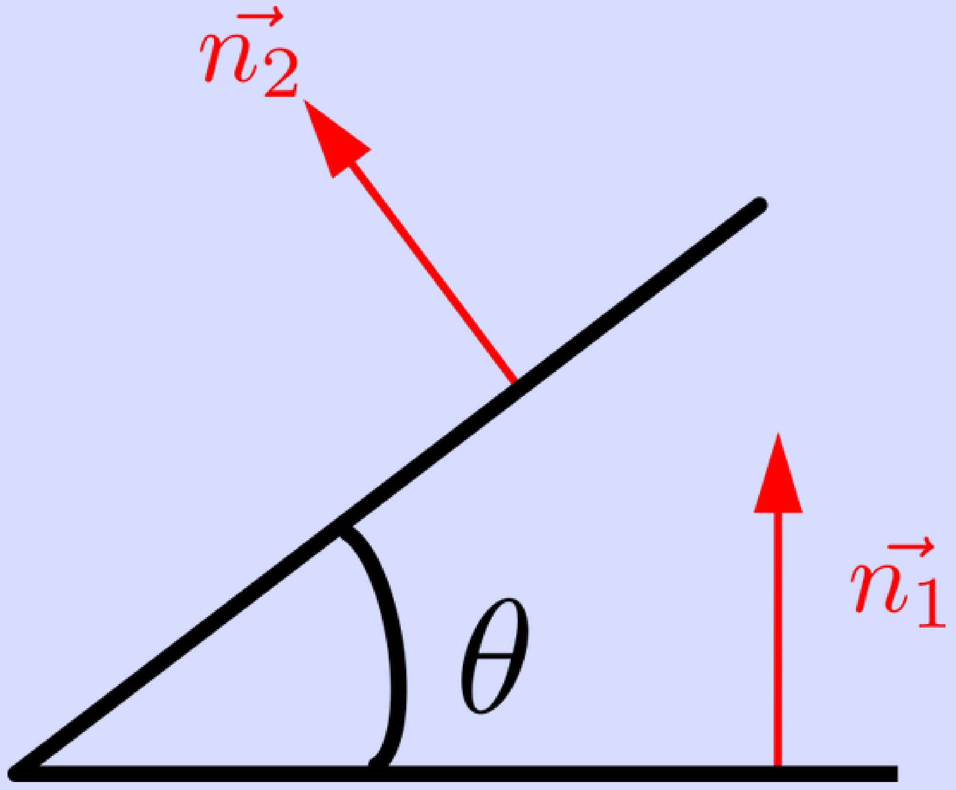


Ângulo de dois planos

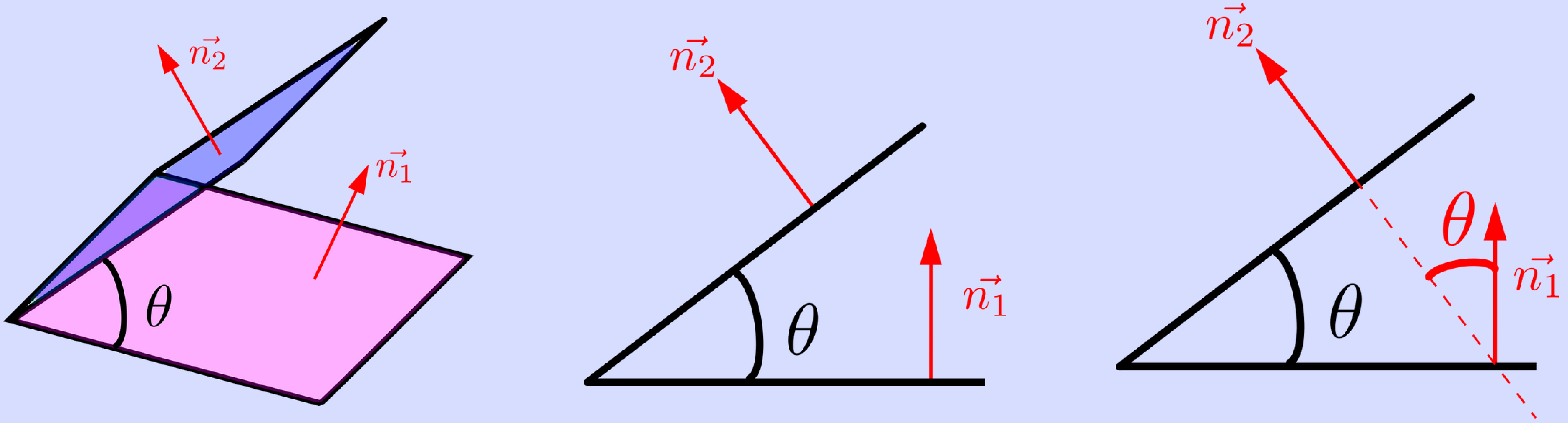


Ângulo de dois planos

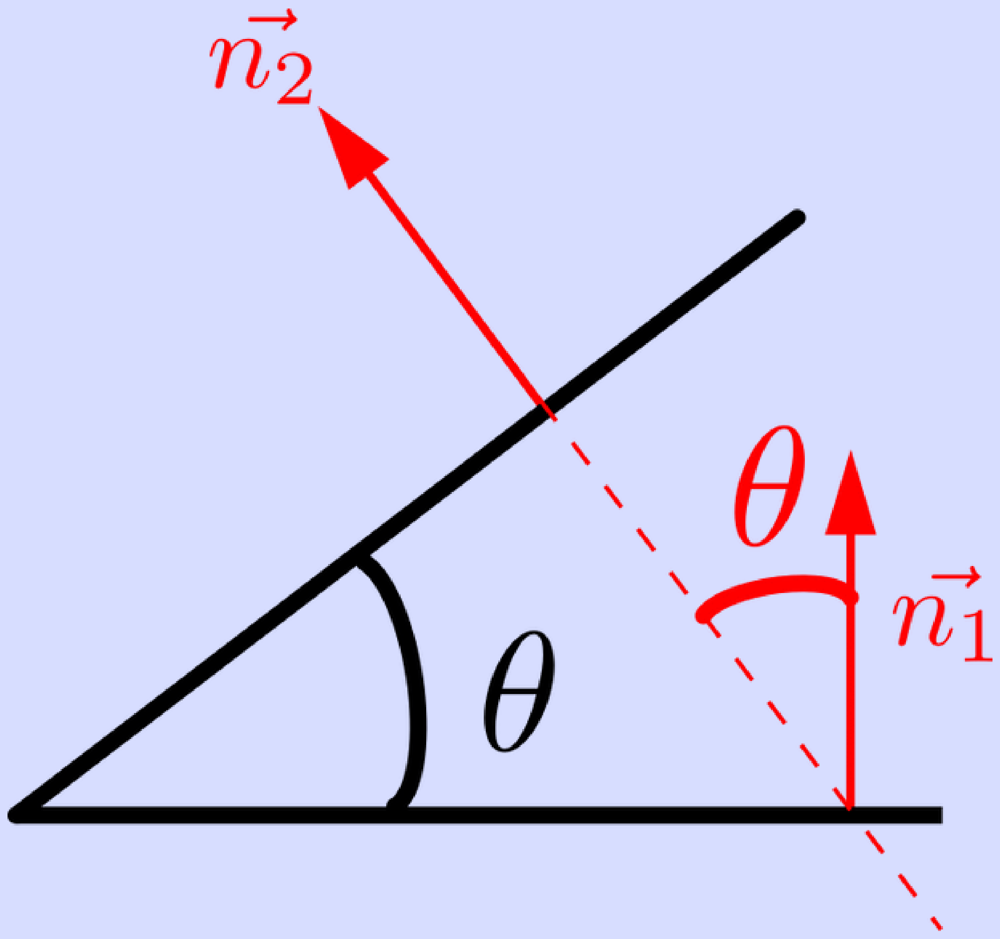




Ângulo de dois planos



Ângulo de dois planos

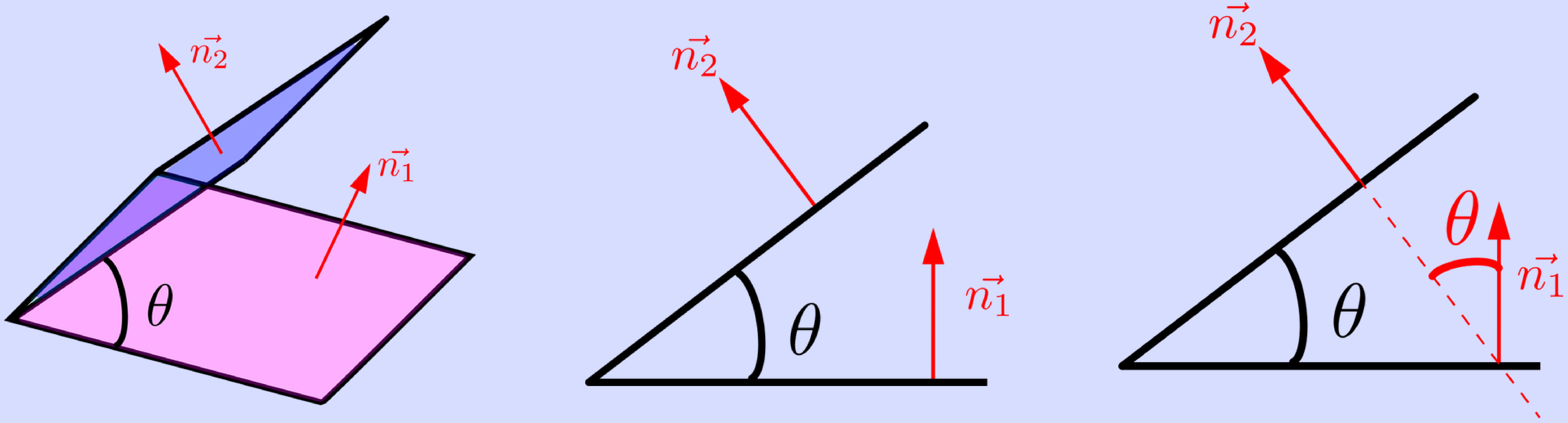


$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

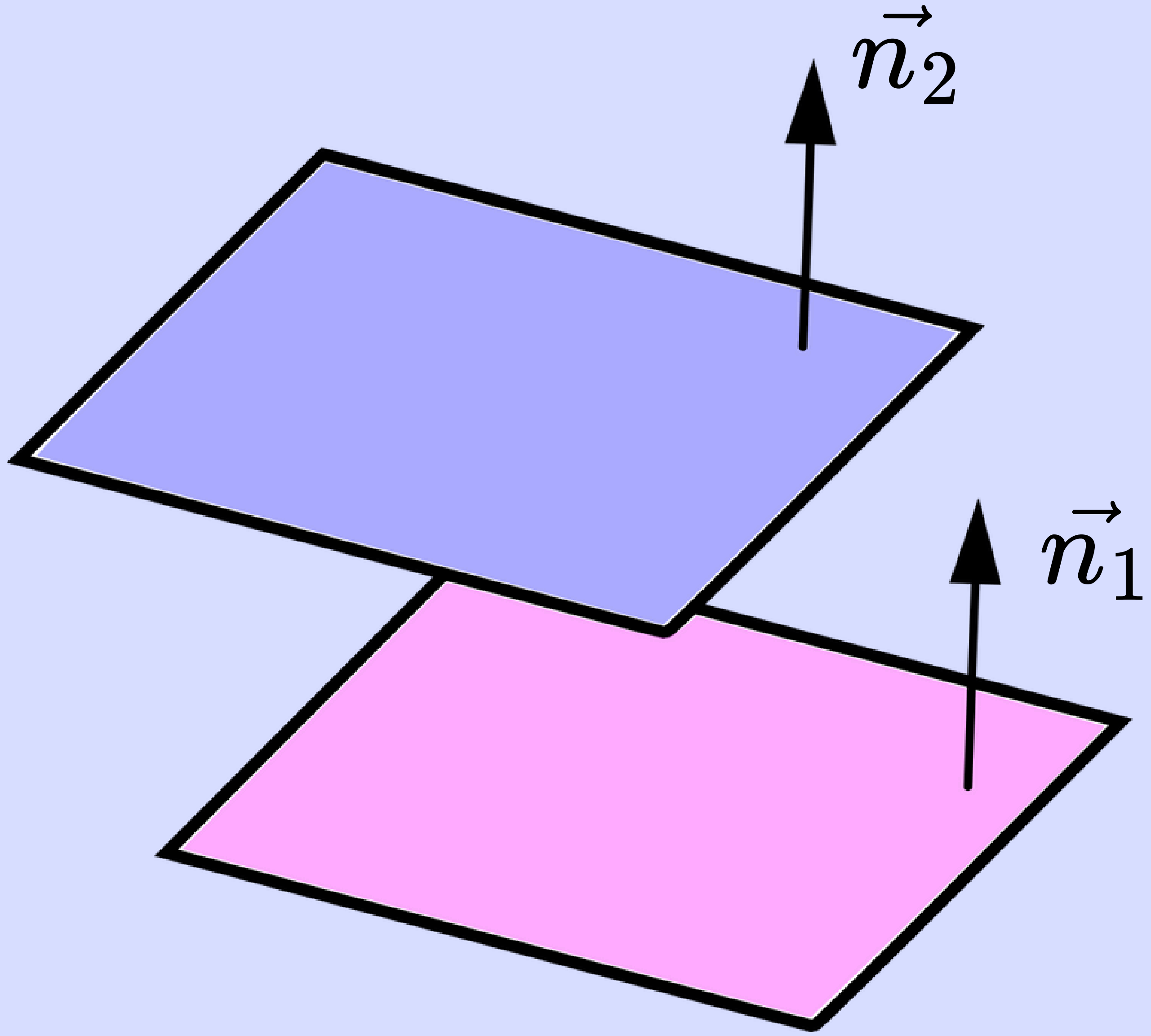
Condição de paralelismo e perpendicularismo de dois planos

- As condições de paralelismo e de perpendicularismo de dois planos são as mesma de seus respectivos vetores normais



Paralelismo

- Se $\pi_1 \parallel \pi_2 \longrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$



$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Paralelismo

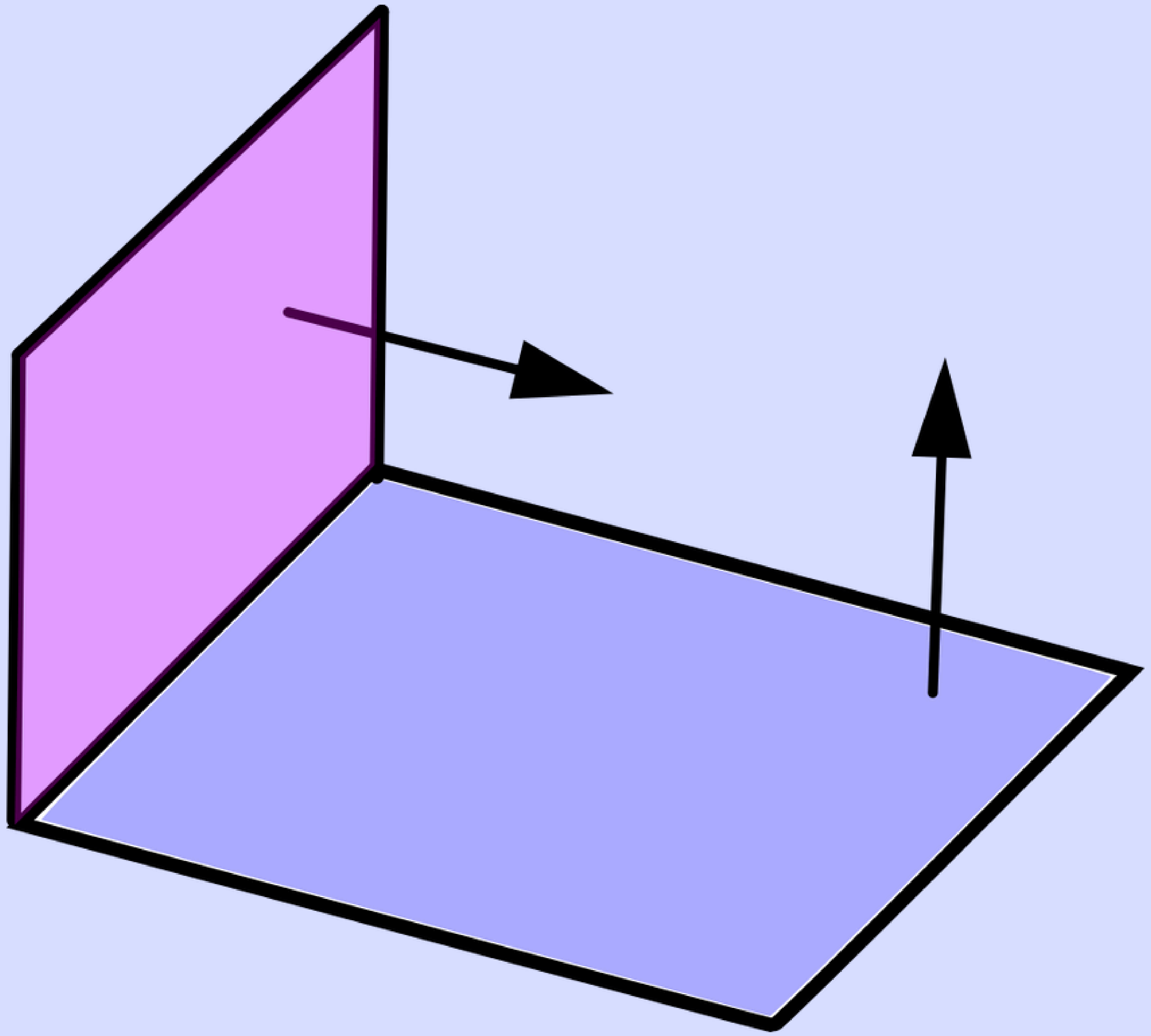
- Se

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}}$$

os planos são **coincidentes**.

Perpendicularismo

Se $\pi_1 \perp \pi_2 \longrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$



$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$$

Ângulo de dois planos

Exemplo: Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z - 8 = 0 \qquad \pi_2 : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$$

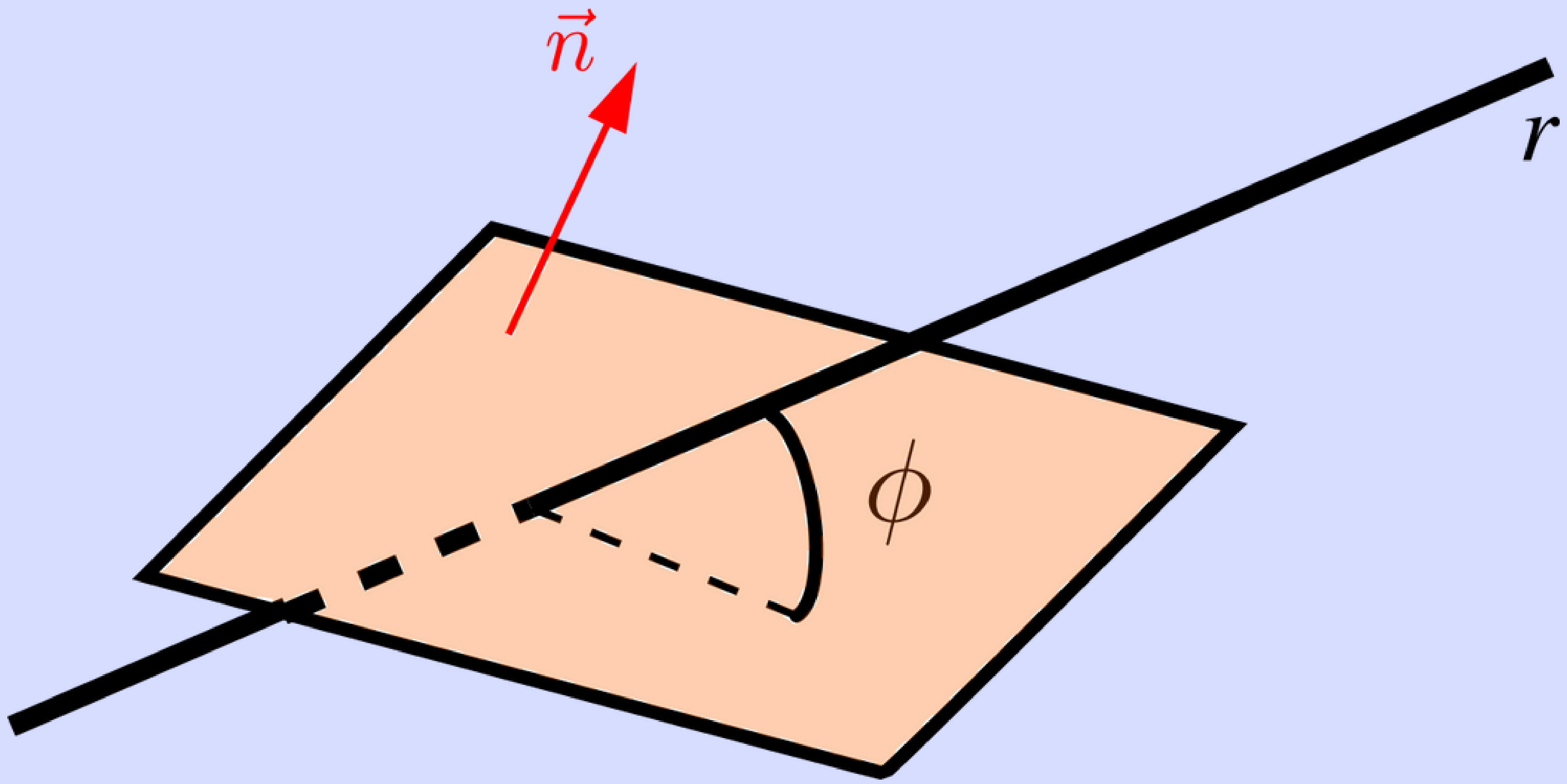
Ângulo de dois planos

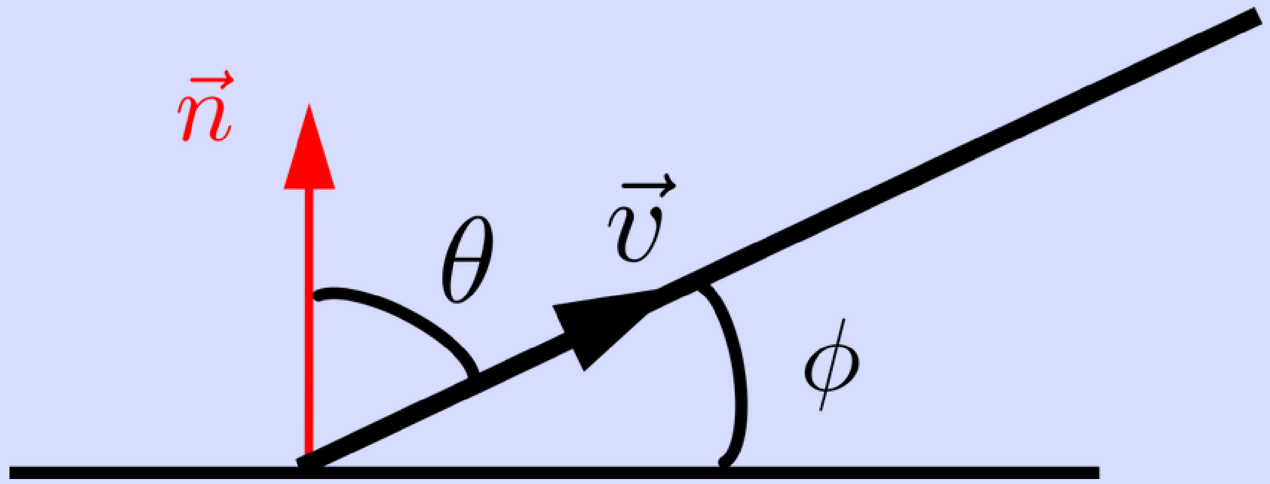
Exemplo: Determinar **m** e **n** para que os planos sejam paralelos

$\pi_1 : (2m - 1)x - 2y + nz - 3 = 0$ $\pi_2 : 4x + 4y - z = 0$

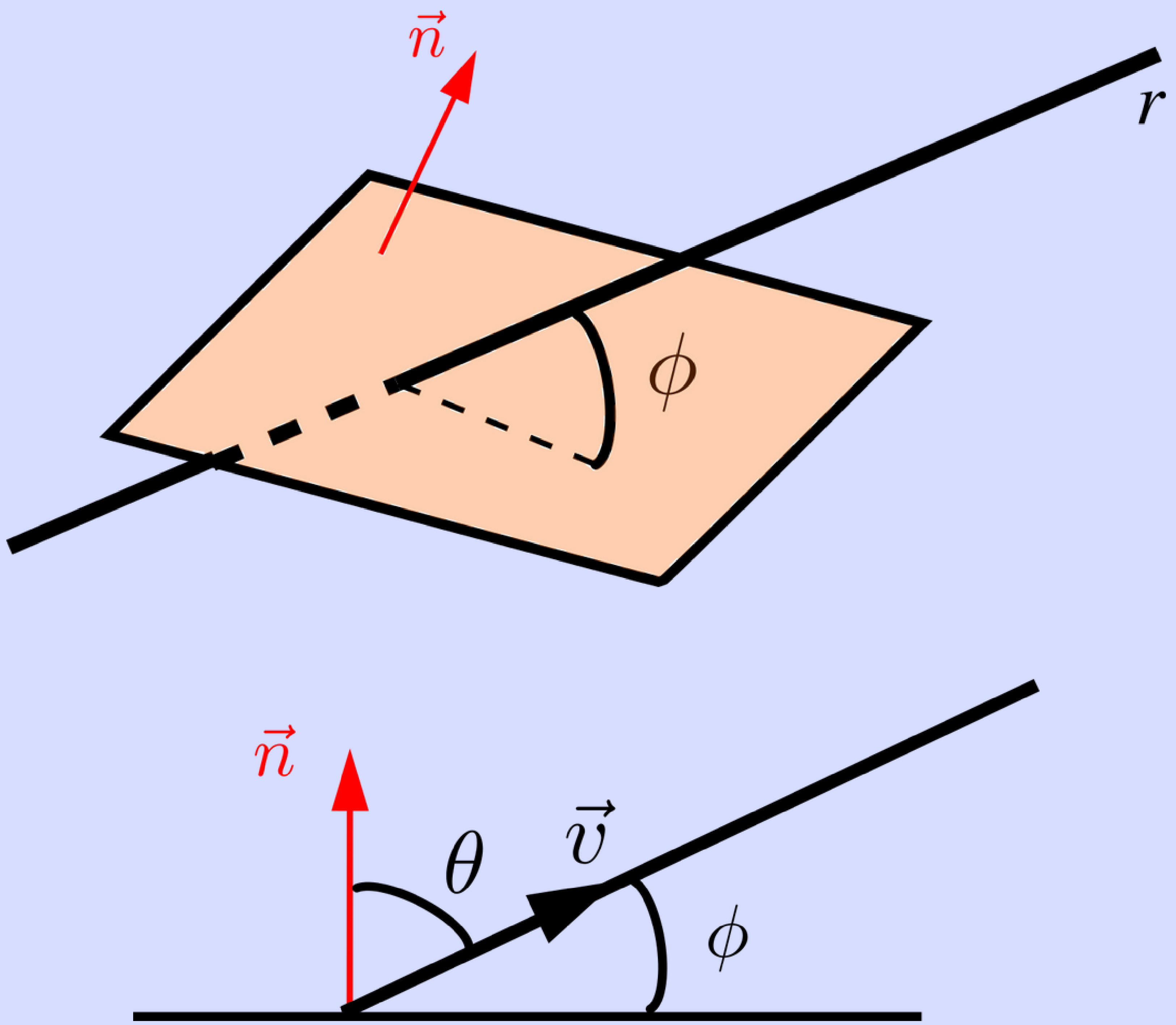
Ângulo de uma reta com um plano

Seja uma reta r com direção do vetor $\vec{v}$ e um plano com um vetor normal $\vec{n}$.





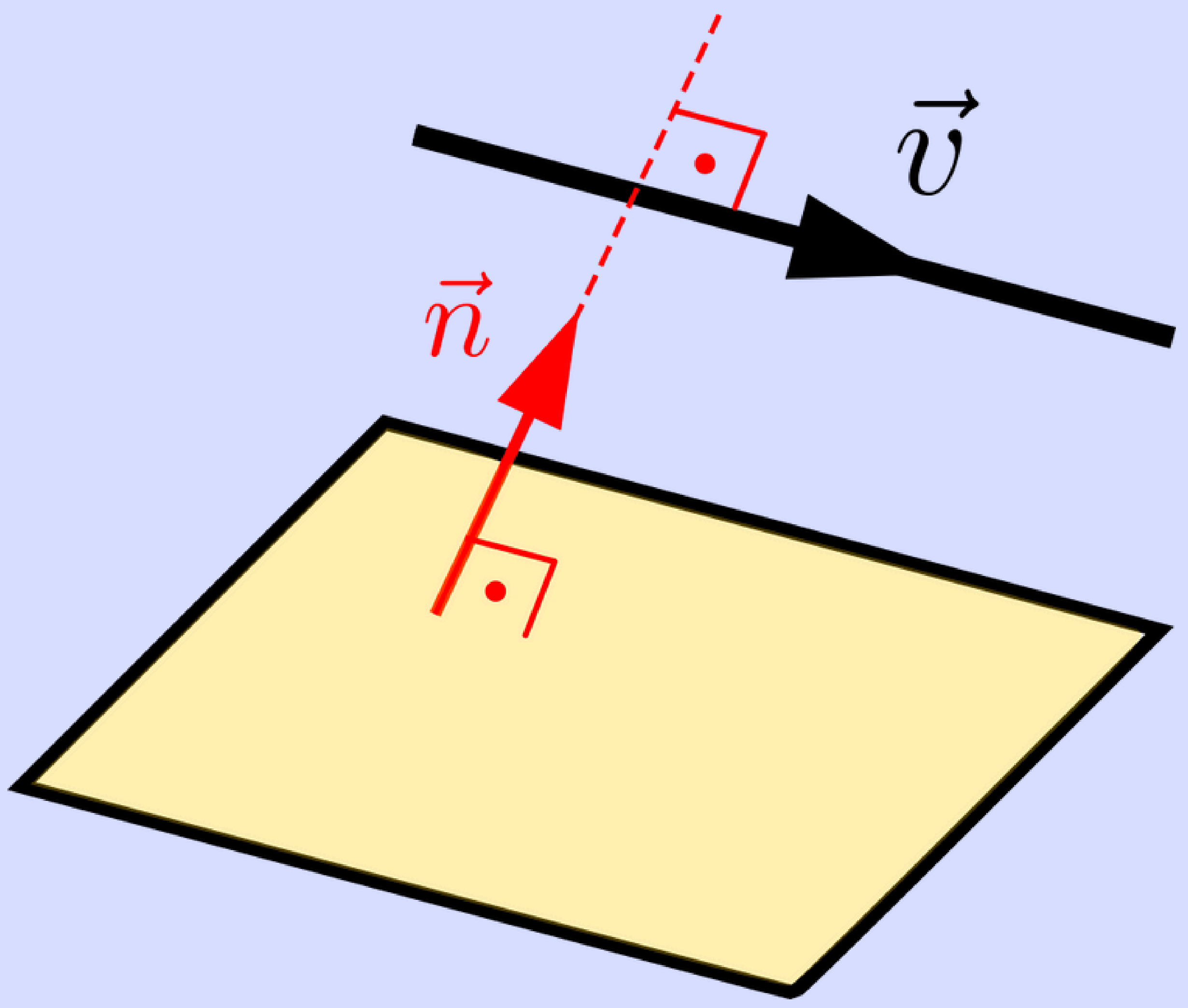
Ângulo de uma reta com um plano



$$\boxed{\operatorname{sen}\phi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}}$$

Ângulo de uma reta com um plano

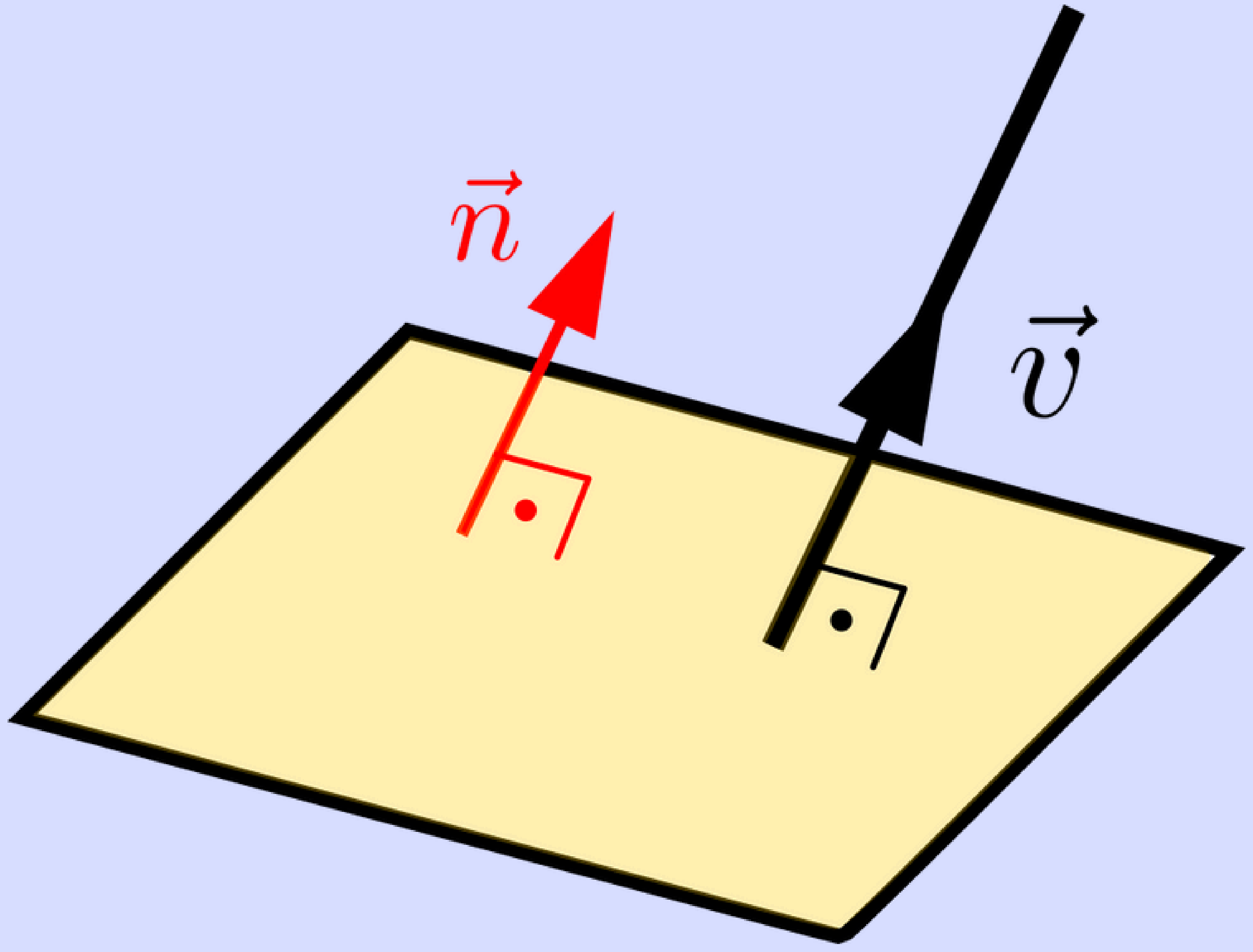
Condição de paralelismo



$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{v} = 0}$$

Ângulo de uma reta com um plano

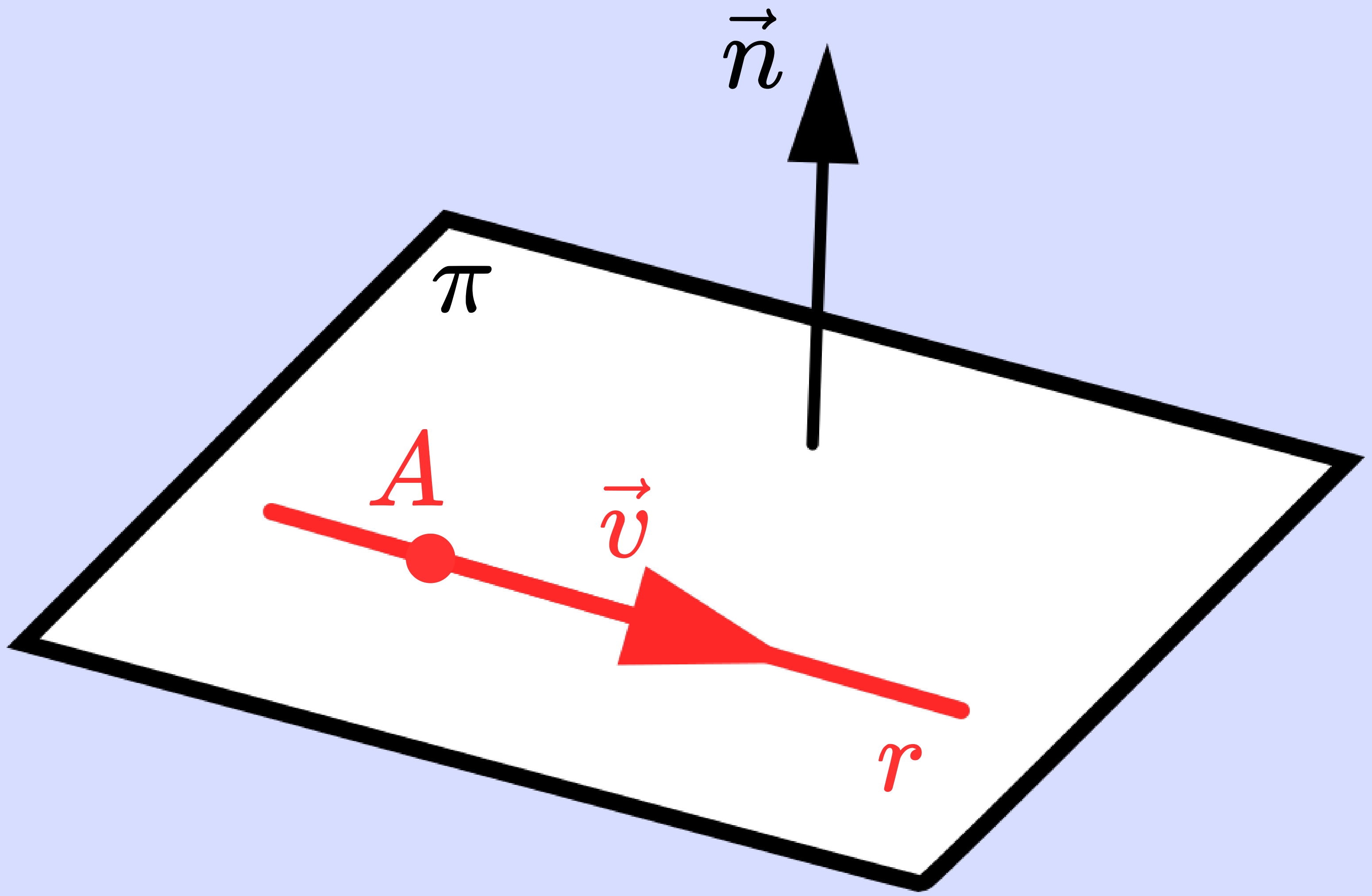
Condição de perpendicularismo



$$\boxed{\vec{v} = k\vec{n}}$$

Ângulo de uma reta com um plano

Condição para que uma reta esteja contida em um plano



- O vetor diretor da reta é ortogonal ao vetor normal ao plano
- Um ponto pertence a reta e ao plano

- Se dois pontos pertencentes a reta pertencem também ao plano

Ângulo de uma reta com um plano

Exemplo: Determinar o ângulo que a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

forma com o plano

$$\pi : x + y - 5 = 0$$

Ângulo de uma reta com um plano

Exemplo: Verificar se a reta

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$$

é perpendicular ao plano

$$\pi: 9x - 6y - 3z + 5 = 0$$

Ângulo de uma reta com um plano

Exemplo: Determinar os valores de m e n para que a reta

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

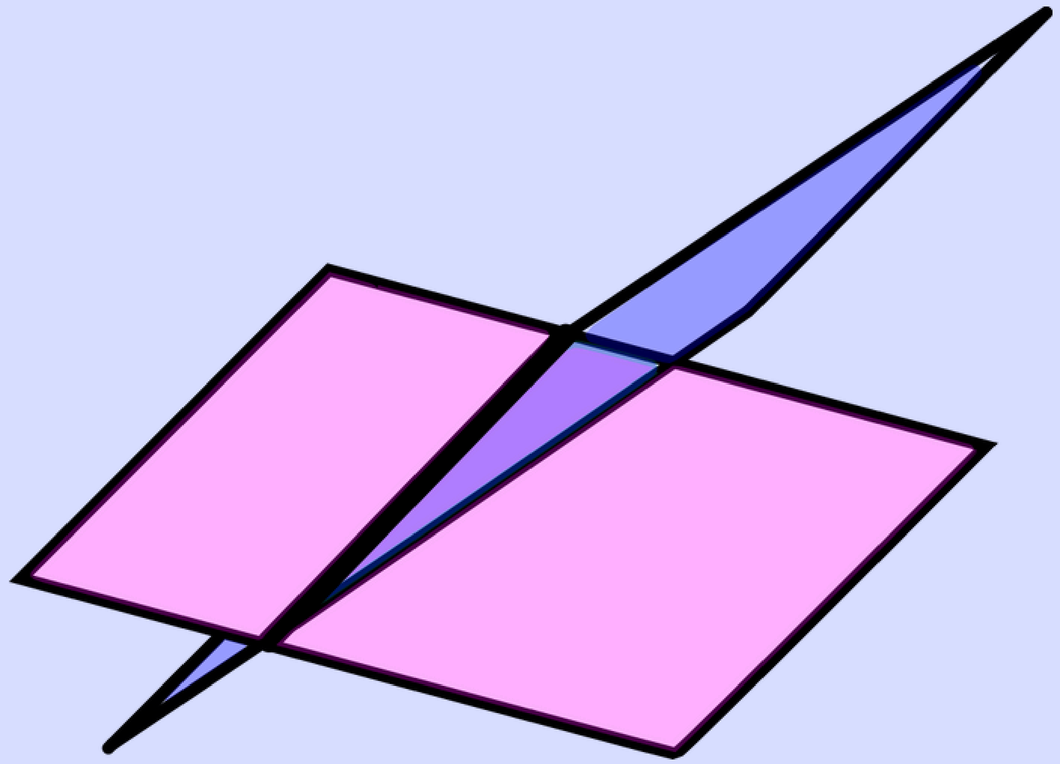
esteja contida no plano

$$\pi : mx + ny + 2z - 1 = 0$$

Interseção de dois planos

A **interseção** de dois planos não paralelos é uma **reta** que pertence aos dois planos ao mesmo tempo.

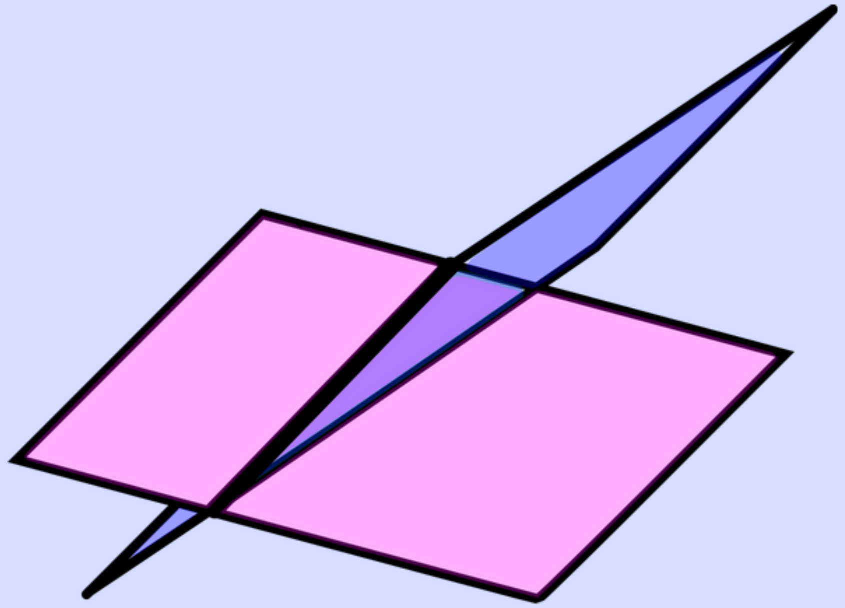
- Um ponto pertence à reta interseção se suas coordenadas satisfazem simultaneamente ao sistema formado pelas equações dos dois planos



Interseção de dois planos

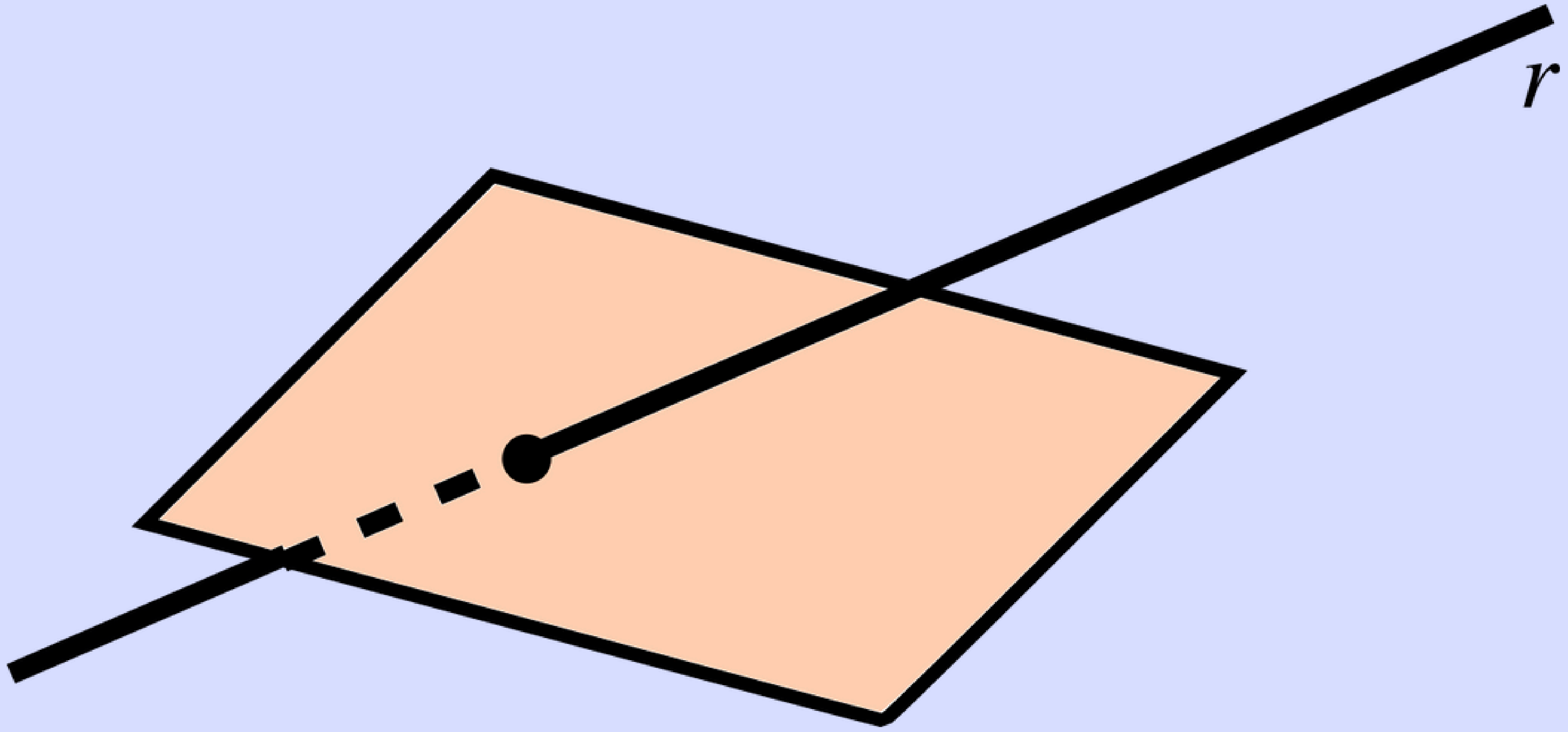
Exemplo: Qual a interseção entre os planos

$$\pi_1 : 5x - 2y + z + 7 = 0$$
$$\pi_2 : 3x - 3y + z + 4 = 0$$



Interseção de uma reta com um plano

A interseção de uma reta com um plano é um ponto que pertence à reta e ao plano simultaneamente.



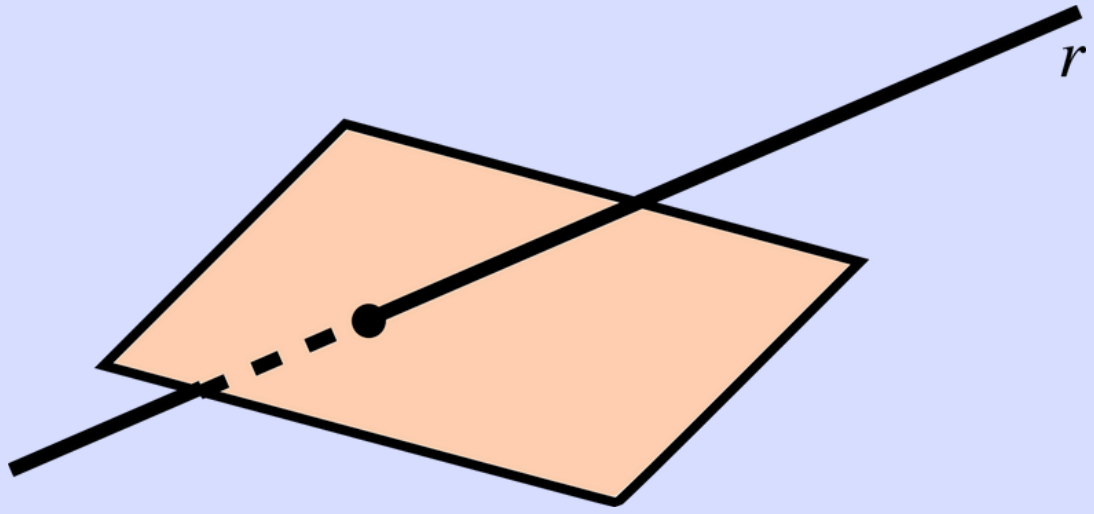
Interseção de uma reta com um plano

Exemplo: Determinar a interseção entre a reta

$$r : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{cases}$$

e o plano

$$\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0$$



Interseção com os eixos coordenados

Como os pontos dos eixos são da forma

$$(x, 0, 0), (y, 0, 0), (z, 0, 0)$$

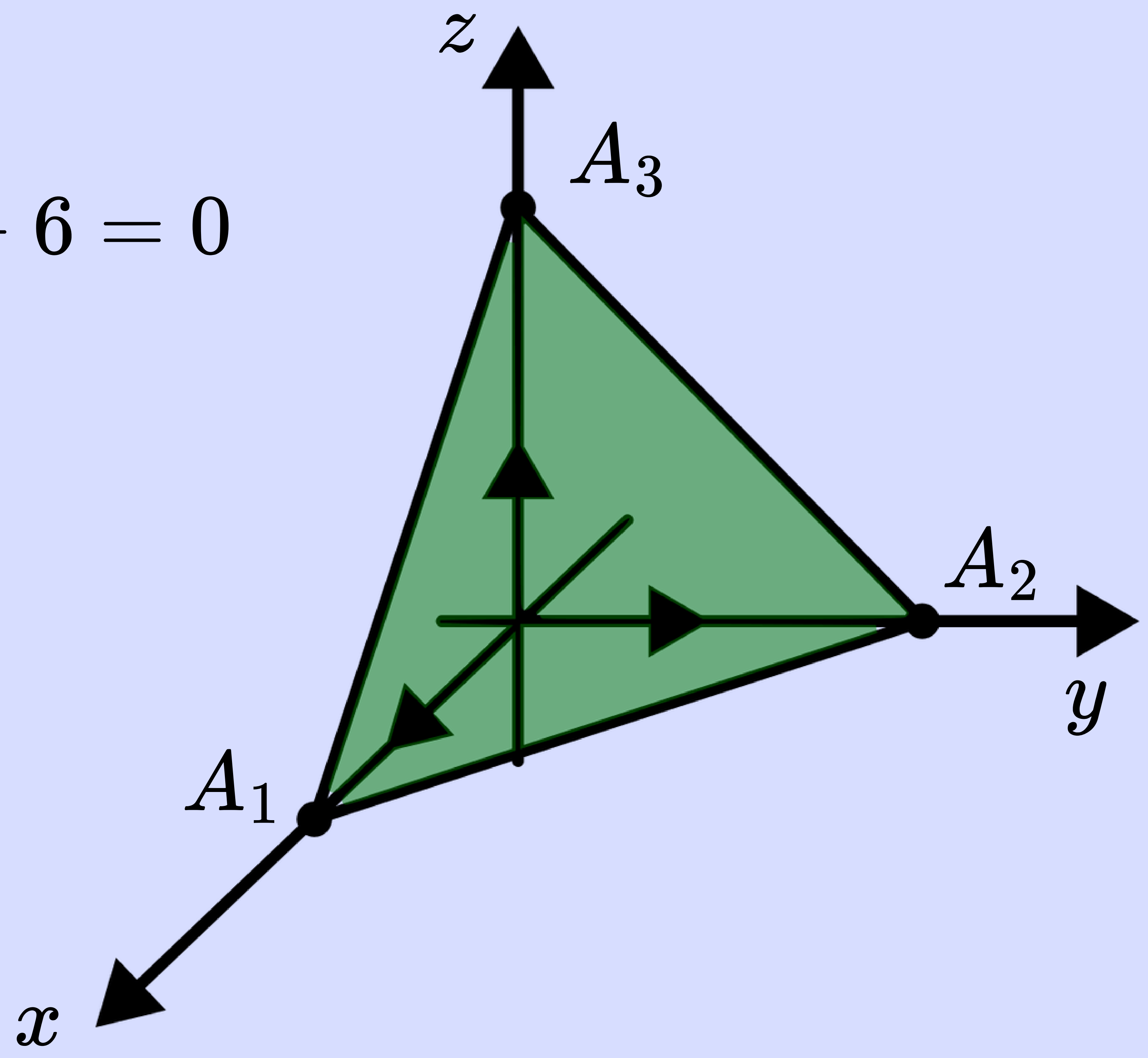
basta substituir cada ponto na equação do plano e encontrar x,y,z, obtendo as interseções.

Interseção com os planos coordenados

Exemplo: Plano

$$\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$$

- Interseção com $Ox : A_1(3, 0, 0)$
- Interseção com $Oy : A_2(0, 2, 0)$
- Interseção com $Oz : A_3(0, 0, 6)$

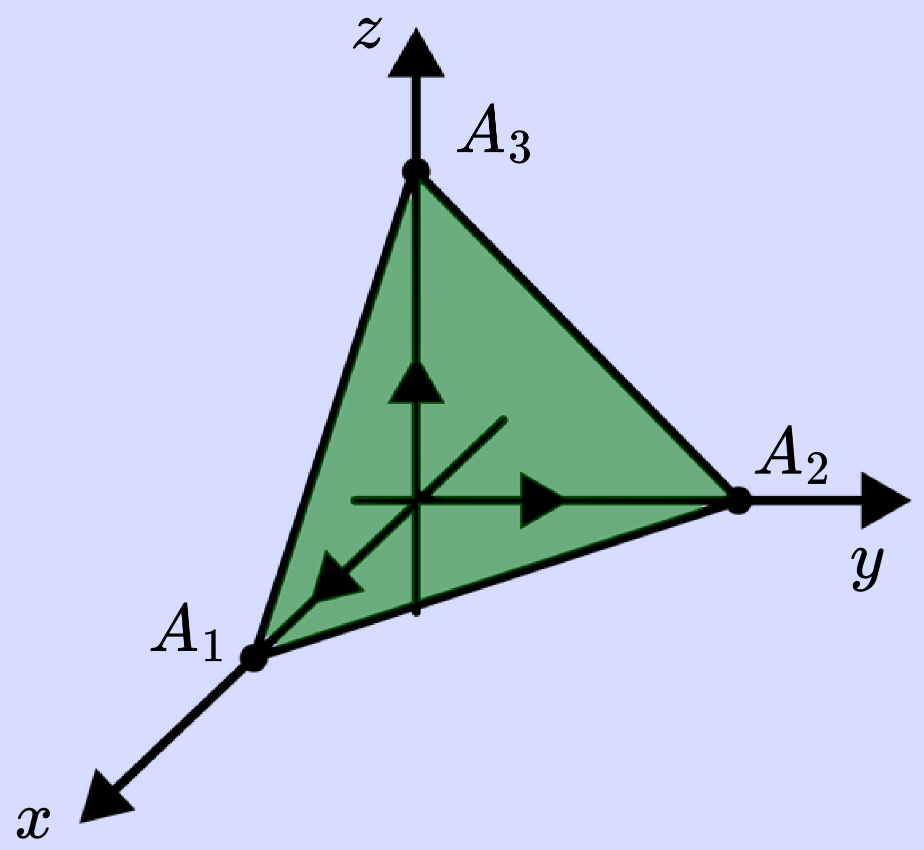


Interseção com os eixos coordenados

Como as equações dos planos coordenados são

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

substituímos estes valores na equação do plano e encontramos uma equação das duas outras variáveis.



Interseção com os eixos coordenados

Exemplo: Plano

$$\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$$

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 6 - 3y \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 6 - 2x \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} z = 0 \\ y = 2 - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

Equação segmentária do plano

Se um plano

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

não é paralelo a nenhum dos planos coordenados (a,b,c não nulos) e não passa pela origem (d não nulo), sua equação pode ser apresentado na forma

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

Equação segmentária do plano

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

$(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r) \rightarrow$ Interseção do plano com os eixos coordenados

Equação segmentária do plano

Exemplo:

$$\pi : 2x + 3y + z - 6$$

Equação segmentária do plano

Exemplo:

$$\pi : 2x + 3y + z - 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$