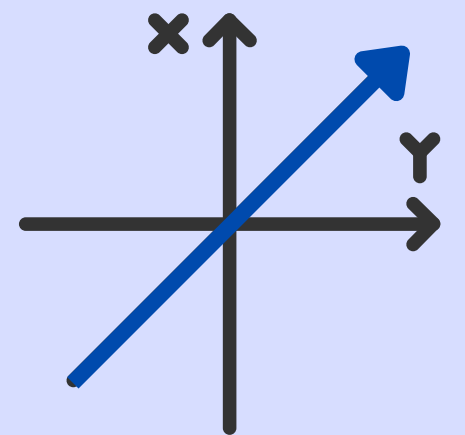


Vetores

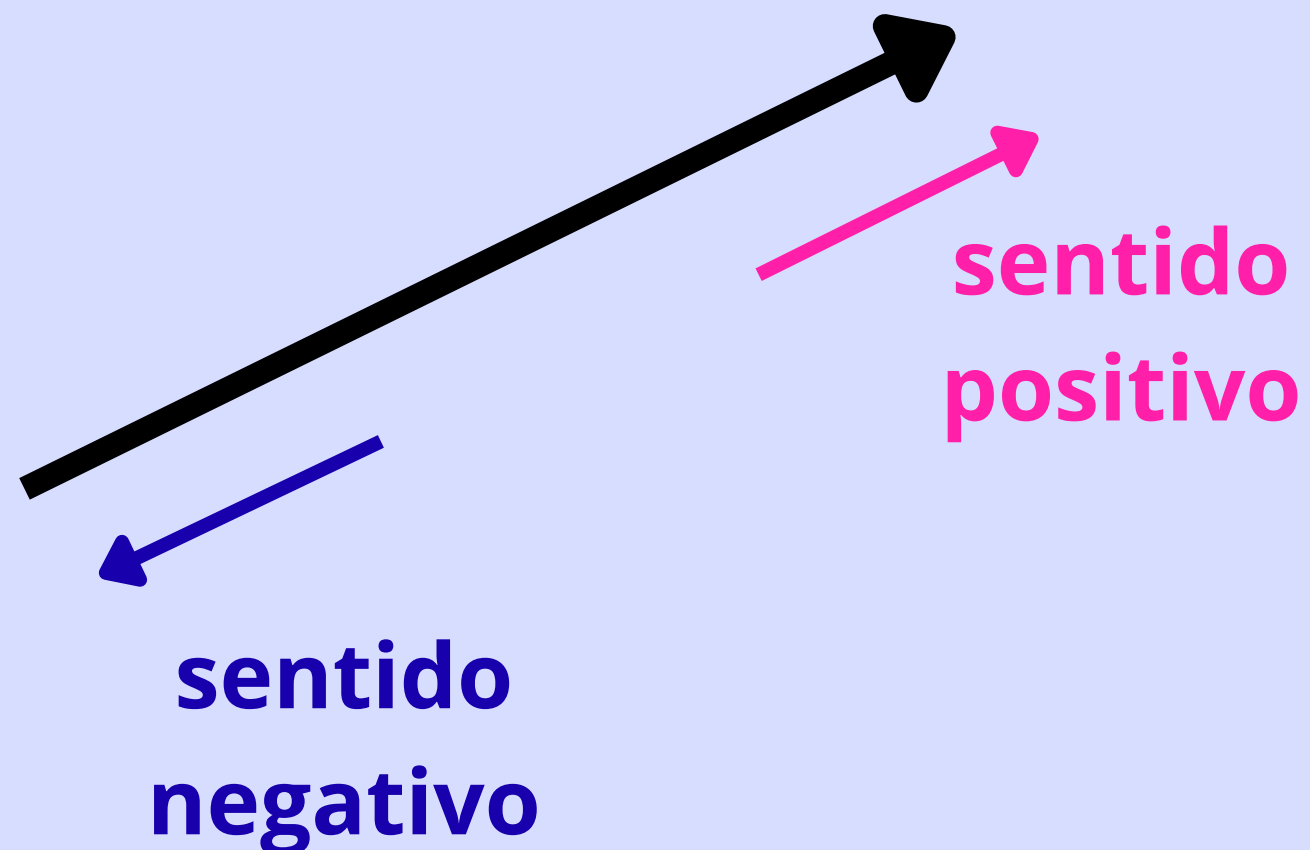
<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/GA>

- STEINBRUCH , Alfredo and WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. McGRAW-HILL, 2a edição, 1987.



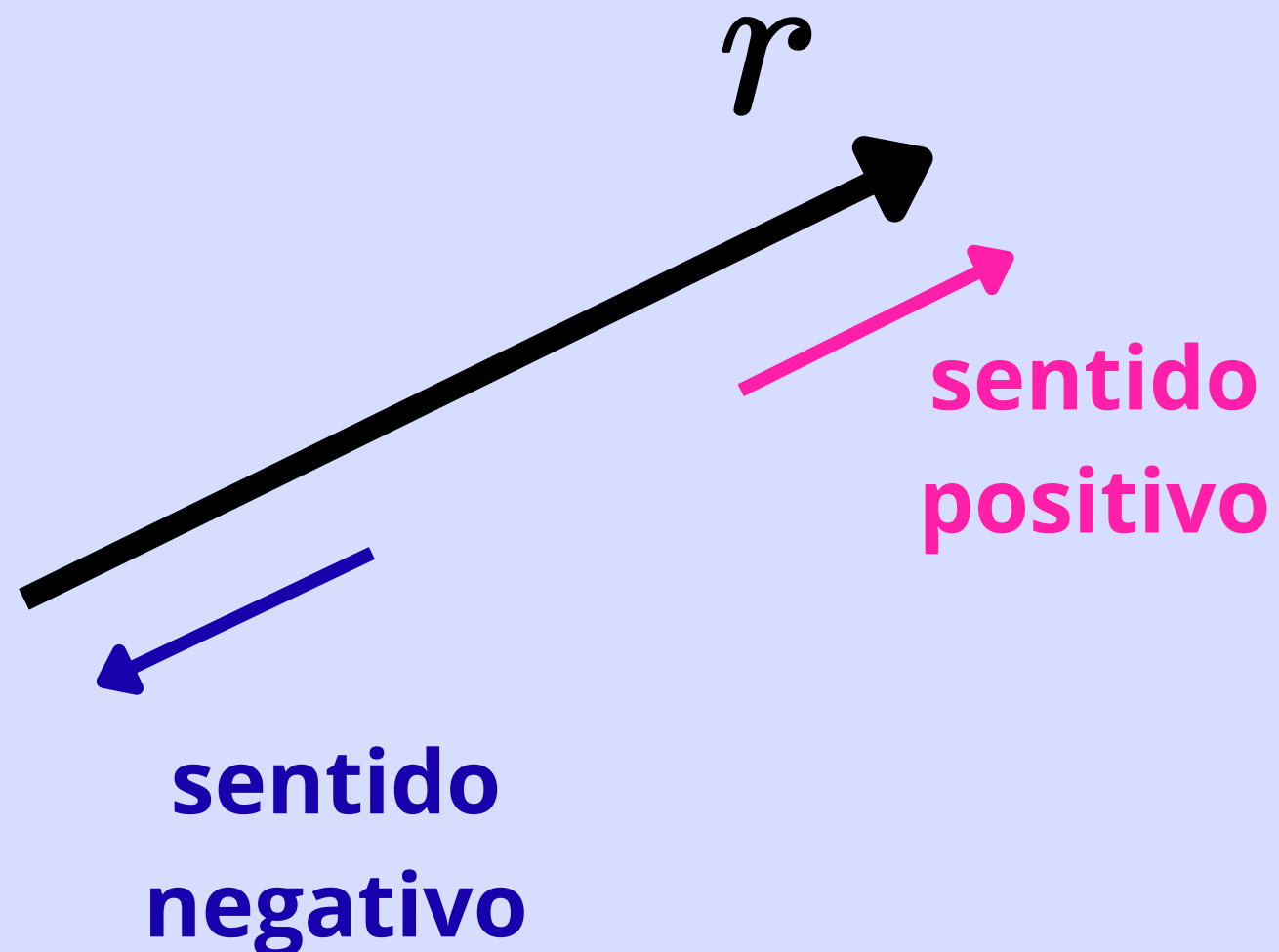
Reta orientada

Uma reta é orientada quando se fixa um sentido que é indicado por uma seta.



Reta orientada

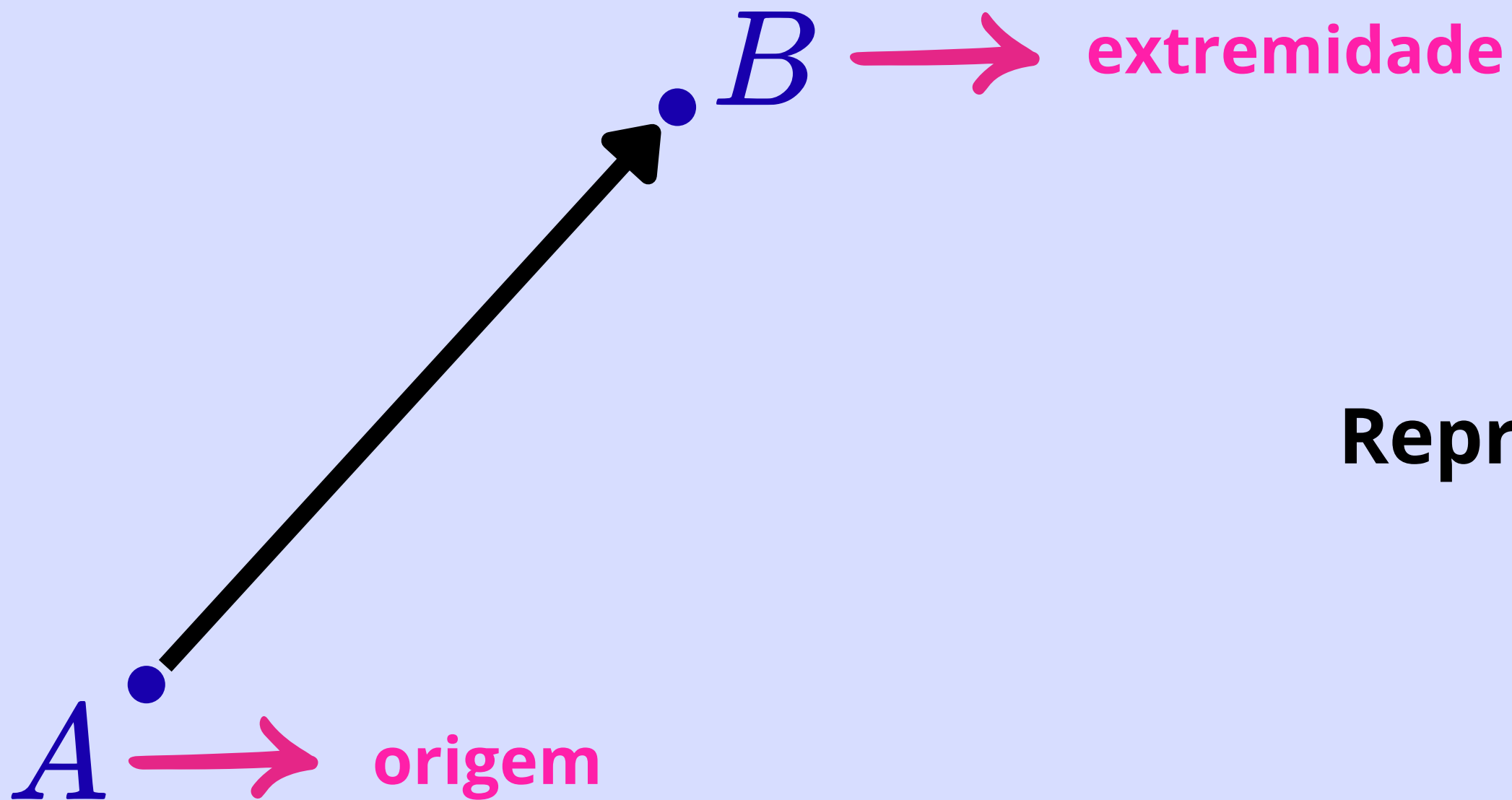
Uma reta é orientada quando se fixa um sentido que é indicado por uma seta.



Retas orientadas também são denominadas **eixos**.

Segmento orientado

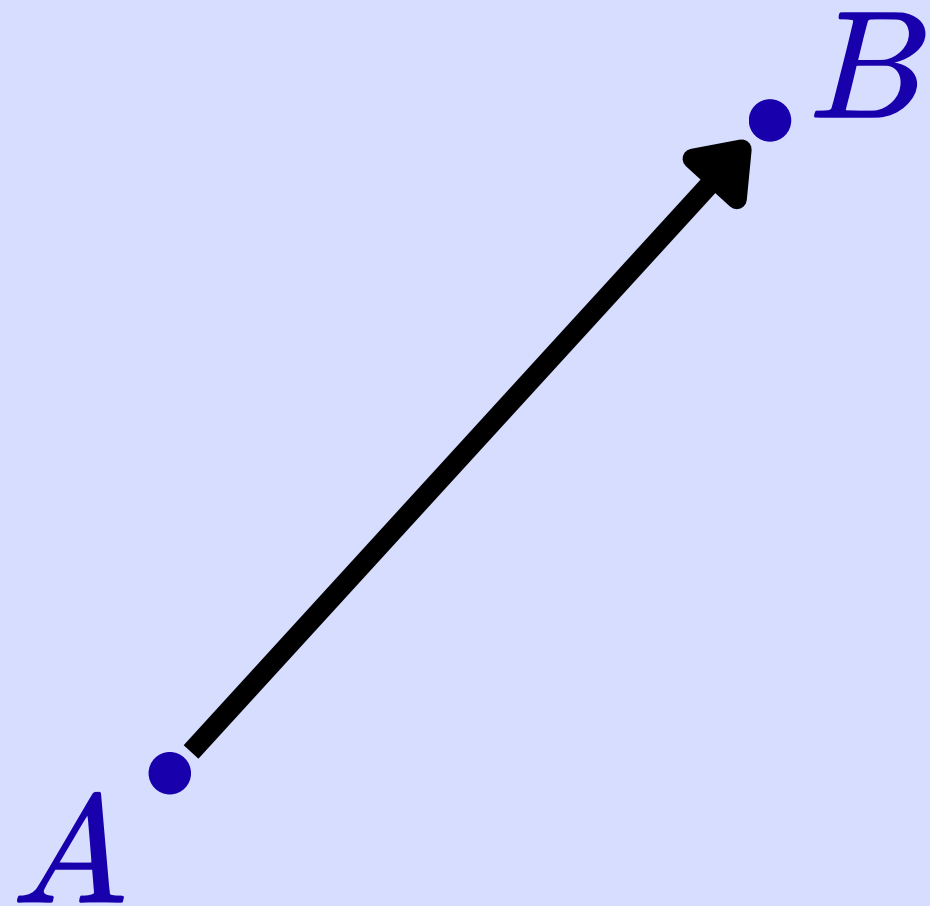
Segmentos orientados são determinados por um **par ordenados** de pontos: a **origem** e a **extremidade**.



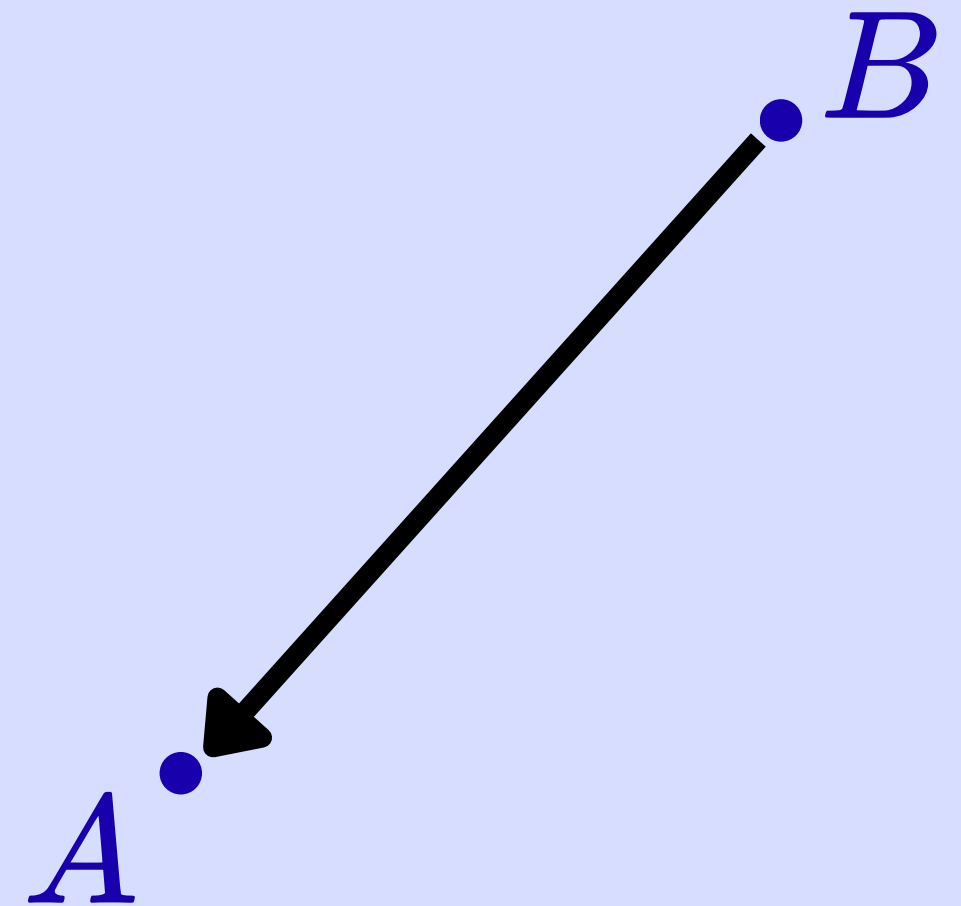
Representação: $\boxed{AB}$

Segmento orientado

- **Segmento nulo:** a origem coincide com a extremidade
- **Segmentos opostos:**



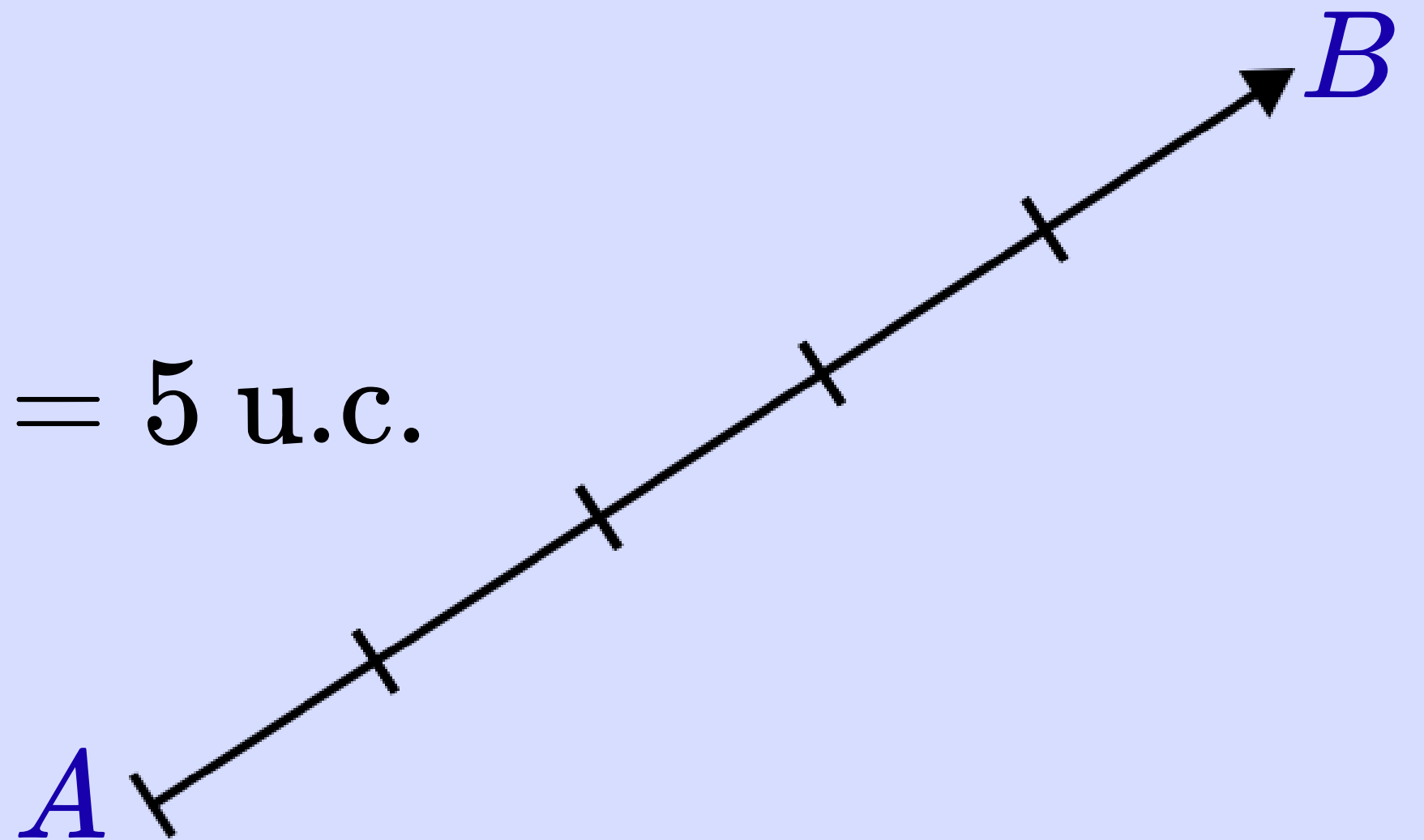
AB
é oposto de
 BA



Segmento orientado

- **Medida de um segmento:** definida uma unidade de comprimento, podemos associar um número real **não negativo** a cada segmento. A medida também é denominada **comprimento** ou **módulo**.

$$\overline{AB} = 5 \text{ u.c.}$$

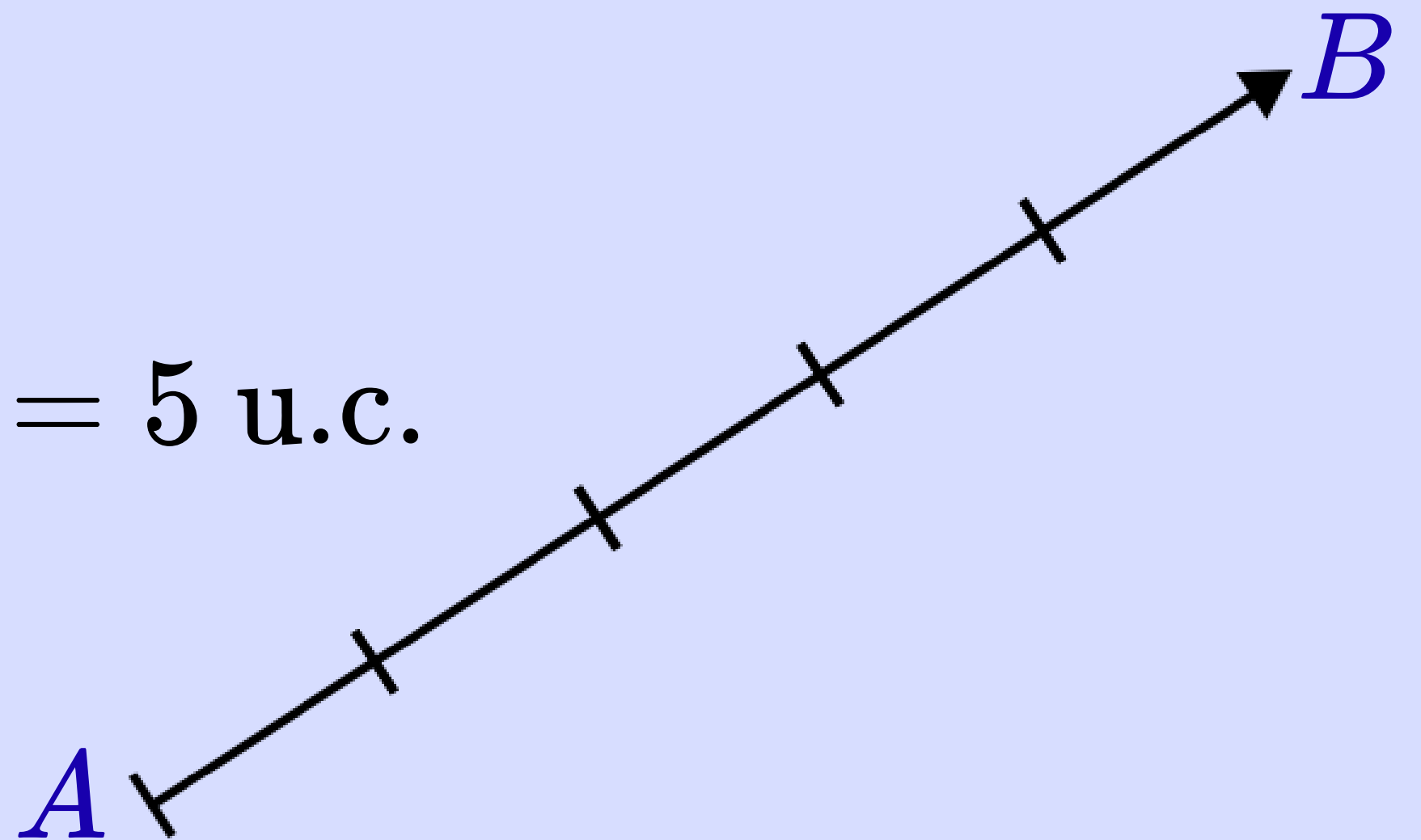


Segmento orientado

- **Medida de um segmento:** definida uma unidade de comprimento, podemos associar um número real **não negativo** a cada segmento. A medida também é denominada **comprimento** ou **módulo**.

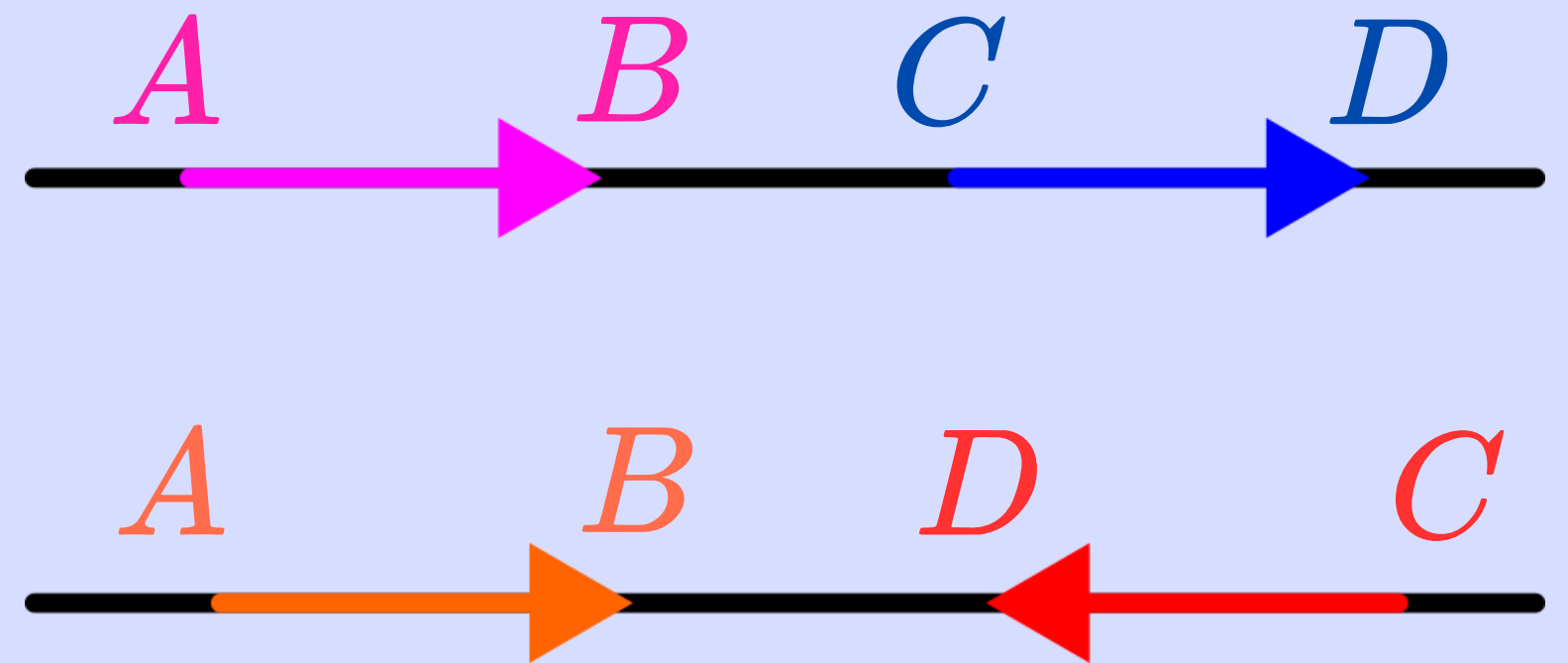
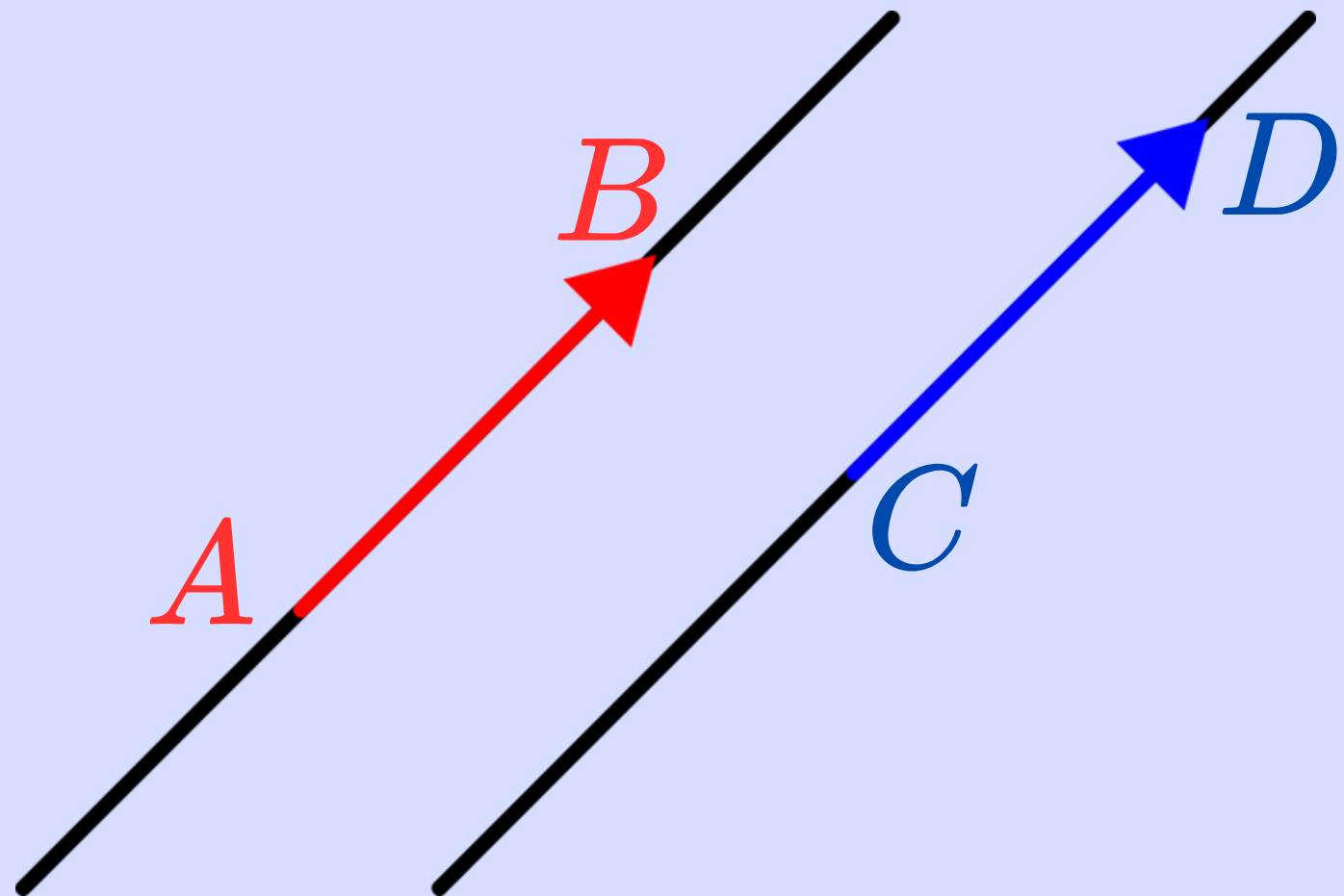
$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ u.c.}$$



Segmento orientado

- **Direção e sentido:** a direção de um segmento é definida pela sua reta suporte
 - Dois segmentos orientados não nulos têm a mesma direção se suas retas suportes são **paralelas**



Segmento orientado

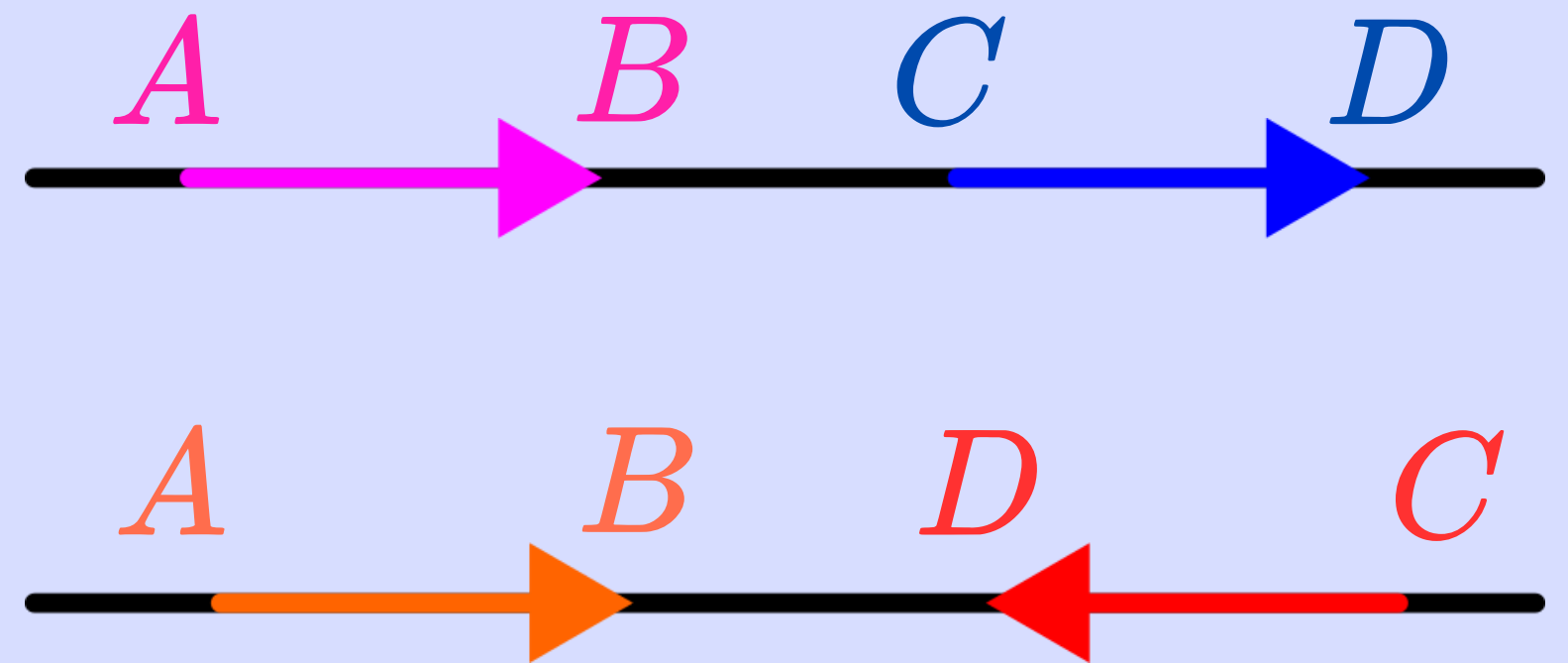
- **Direção e sentido:** a direção de um segmento é definida pela sua reta suporte
 - Dois segmentos orientados não nulos têm a mesma direção se suas retas suportes são **paralelas**

Só se pode comparar o sentido de dois segmentos orientados se eles tem a **mesma** direção

Segmento orientado

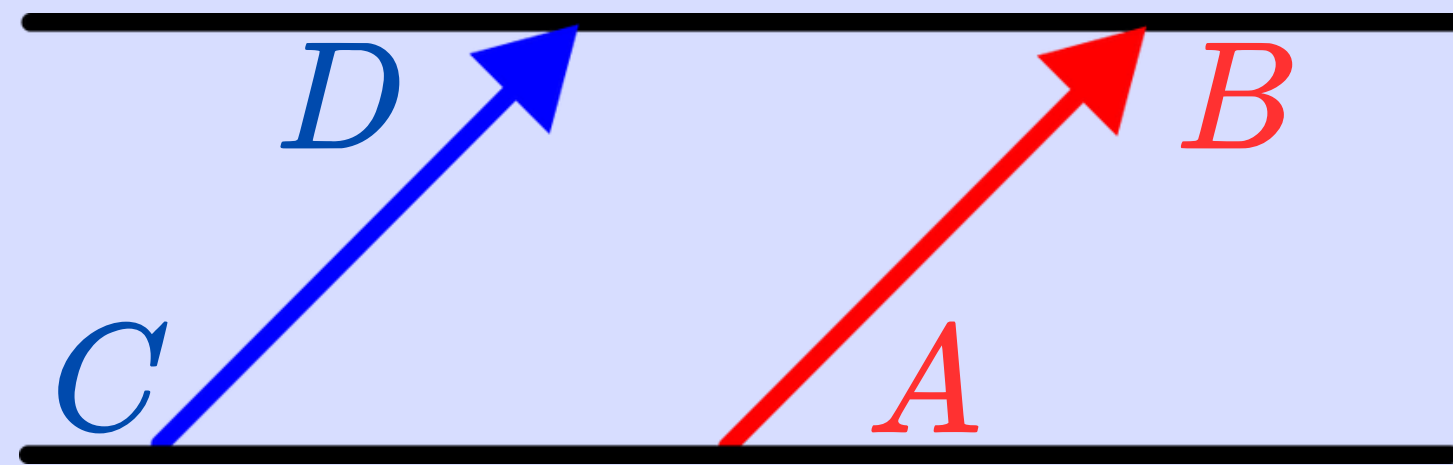
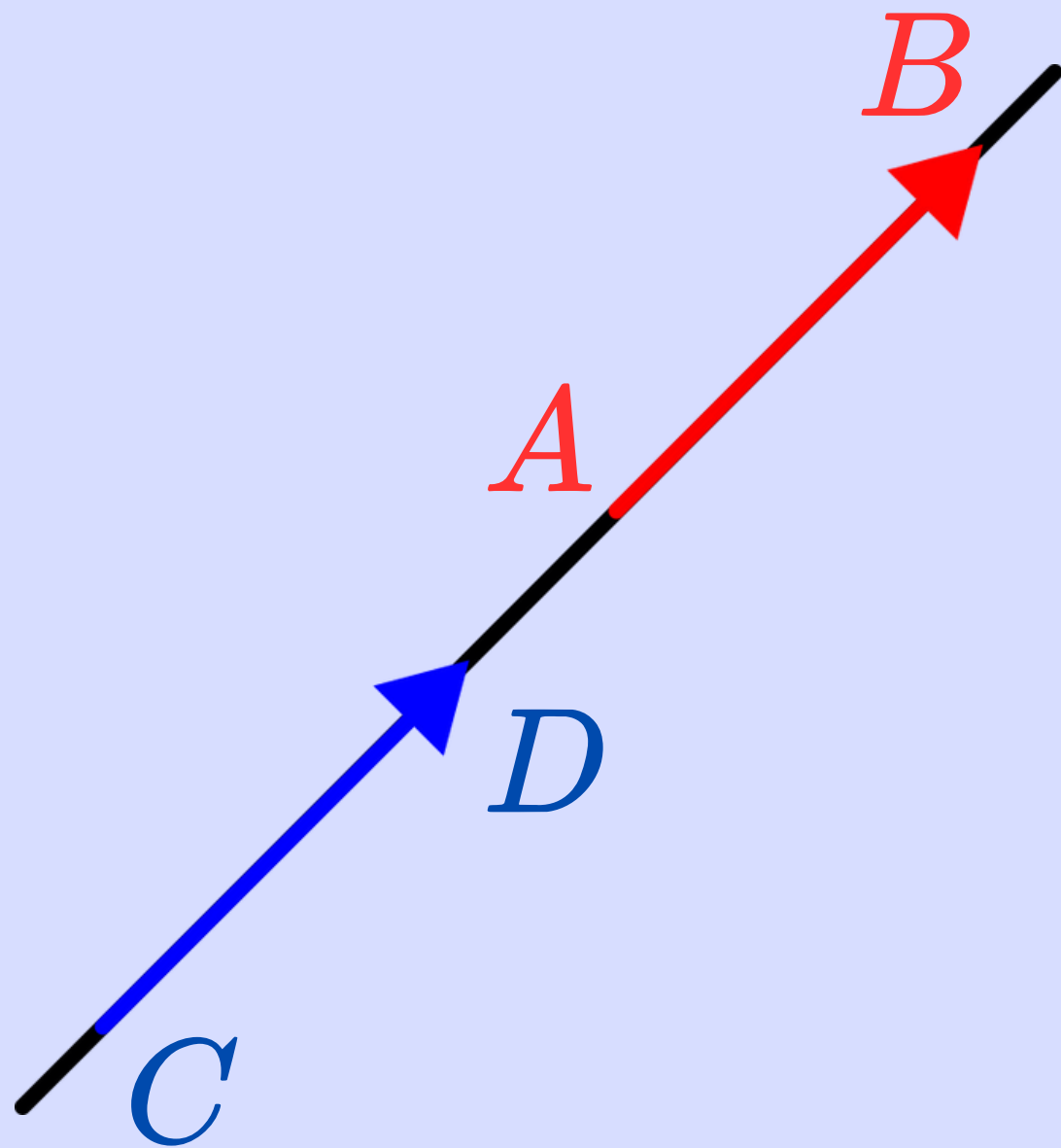
- **Direção e sentido:** a direção de um segmento é definida pela sua reta suporte
 - Dois segmentos orientados não nulos têm a mesma direção se suas retas suportes são **paralelas**

Dois segmentos orientados **opostos** têm a **mesma direção e sentidos contrários**



Segmentos equipolentes

- Dois segmentos orientados são **equipolentes** quando têm a **mesma direção**, o **mesmo sentido** e o **mesmo comprimento**.



$$AB \parallel CD \text{ e } \overline{AB} = \overline{CD}$$

Segmentos equipolentes

- Dois segmentos orientados são **equipolentes** quando têm a **mesma direção**, o **mesmo sentido** e o **mesmo comprimento**.
 - Dois segmentos **nulos** são sempre equipolentes
 - A equipolência dos segmentos é representada por

$$AB \sim CD$$

Segmentos equipolentes

- **Propriedades**

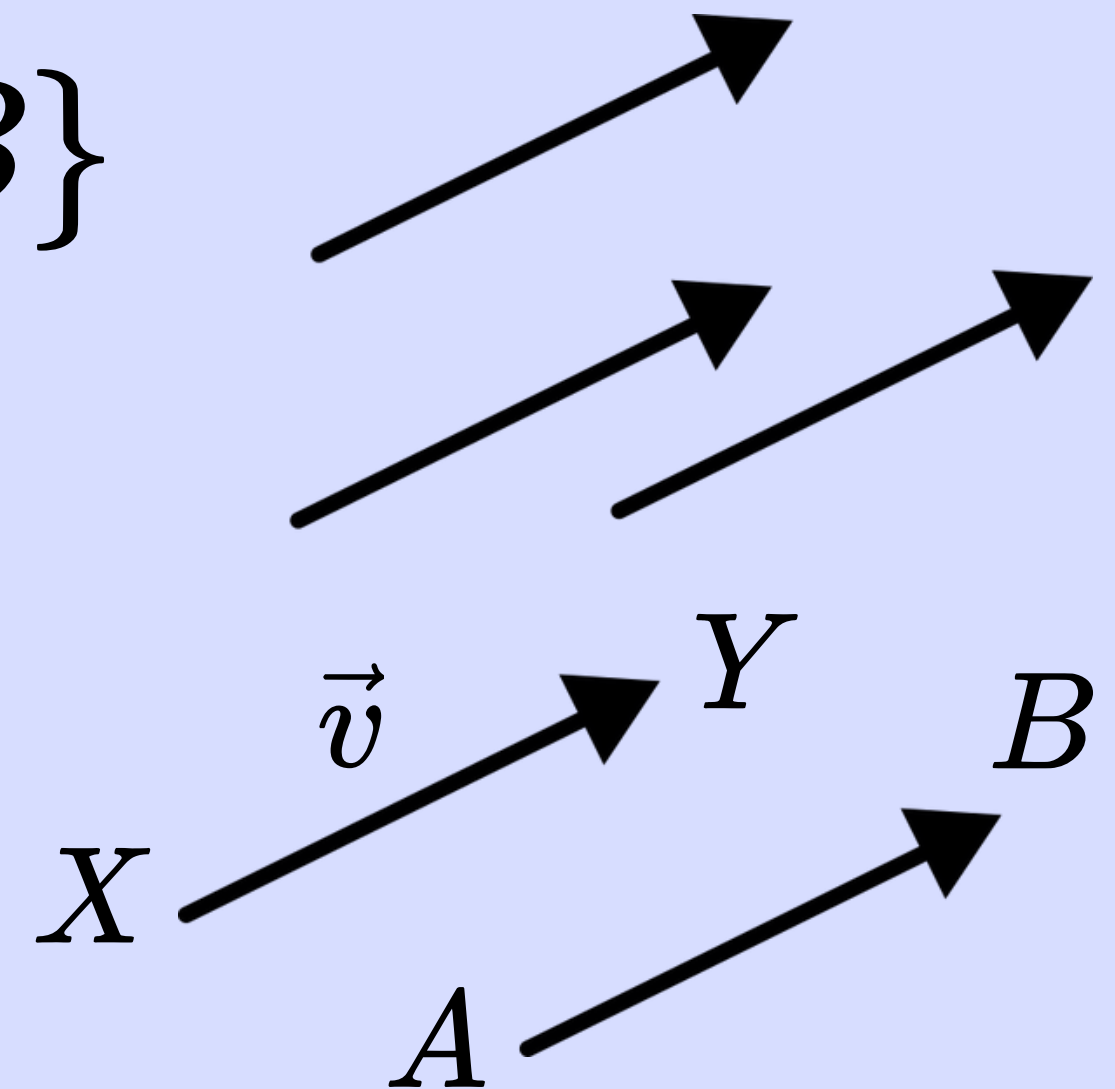
- Simétrica: $AB \sim CD \longrightarrow CD \sim AB$
- Transitiva: $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \longrightarrow AB \sim EF$
- Dado um segmento orientado AB e um ponto C , existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$

Vetor

- **Definição:** O conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado é denominado **vetor**.
 - Este conjunto é indicado por $\vec{v}$ e definido por:

$$\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$$

onde AB é um segmento qualquer do conjunto



Vetor

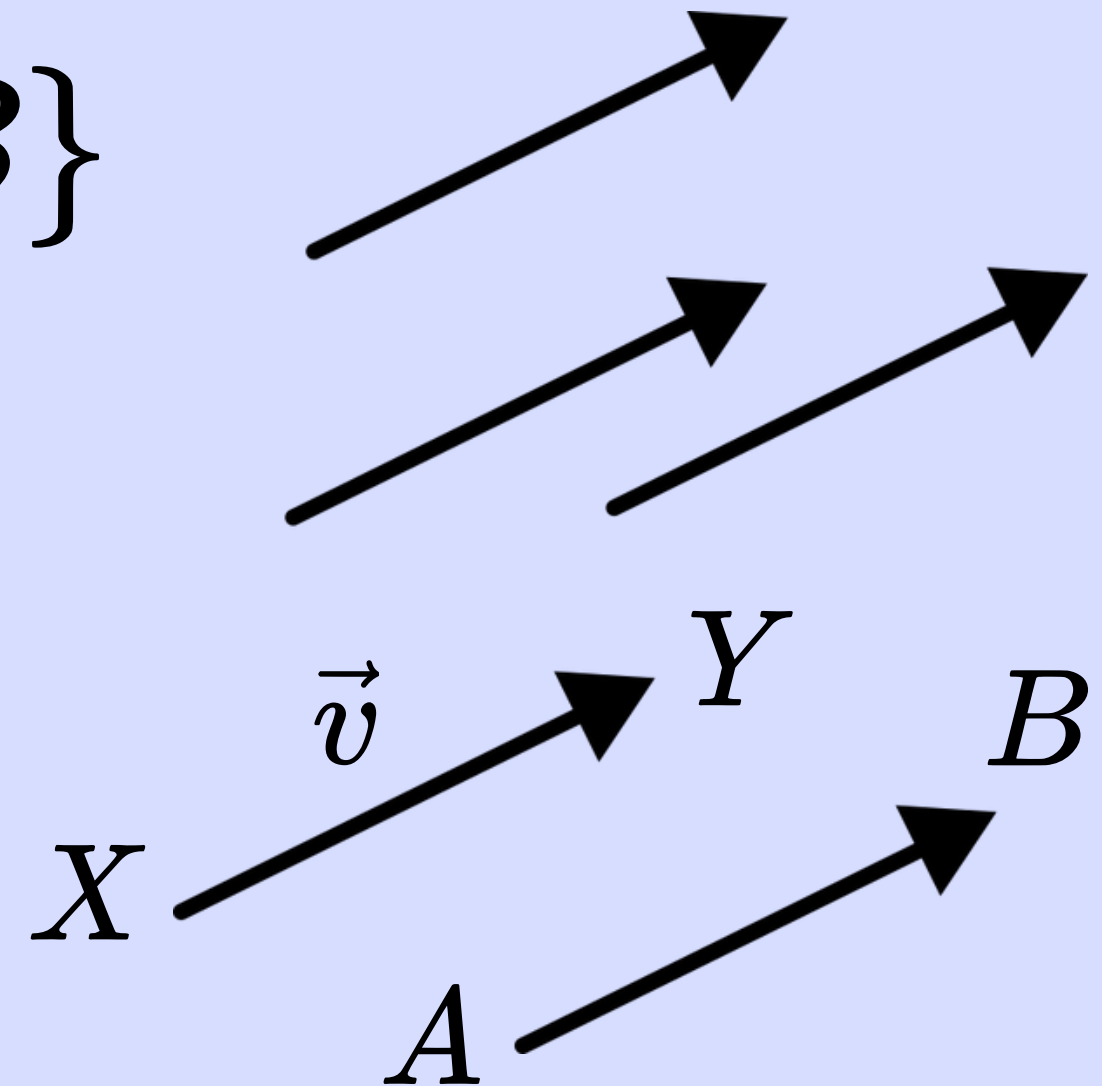
- **Definição:** O conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado é denominado **vetor**.
 - Este conjunto é indicado por $\vec{v}$ e definido por:

$$\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$$

onde AB é um segmento qualquer do conjunto

O vetor determinado por AB é indicado por:

$$\overrightarrow{AB}, \quad B - A, \quad \vec{v}$$



Vetor

- Um mesmo vetor é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, os representantes desse vetor, e todos são equipolentes entre si.
- As características de um vetor (módulo, direção e sentido) são as mesmas de qualquer um de seus representantes.
 - Módulo do vetor: $|\vec{v}|$

Vetor

- **Vetores iguais:** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais se, e somente se,

$$\vec{u} \sim \vec{v}$$

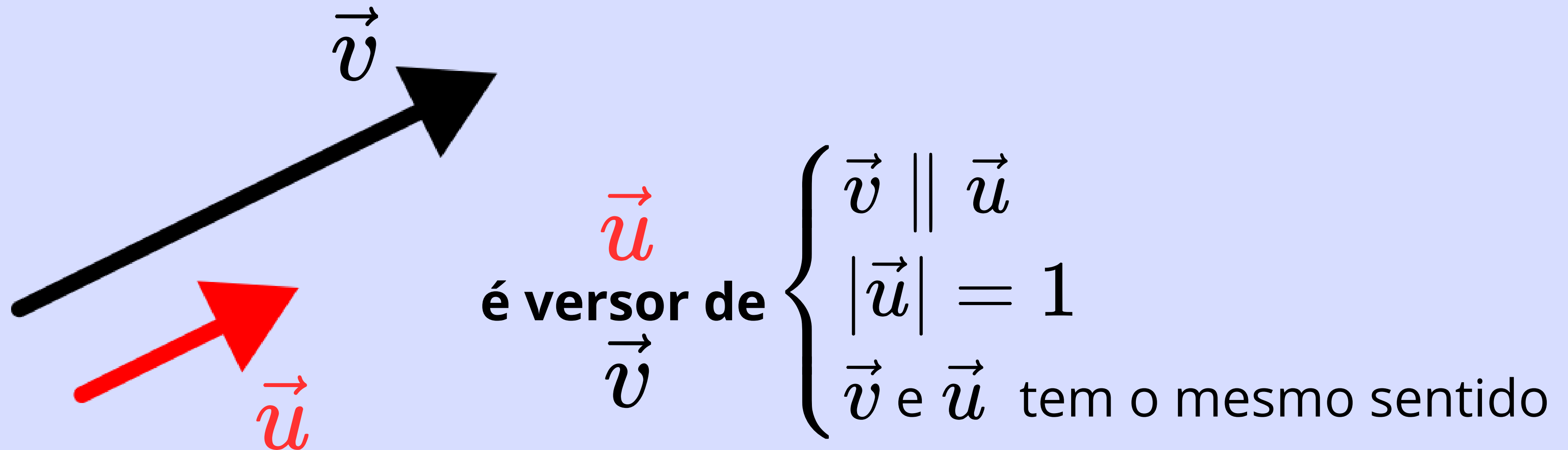
- **Vetor nulo:** os segmentos nulos são todos equipolentes entre si, logo, determinam um **único** vetor, o vetor nulo $\vec{0}$

- **Vetores opostos:** $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \longrightarrow -\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

- **Vetor unitário** $|\vec{u}| = 1$

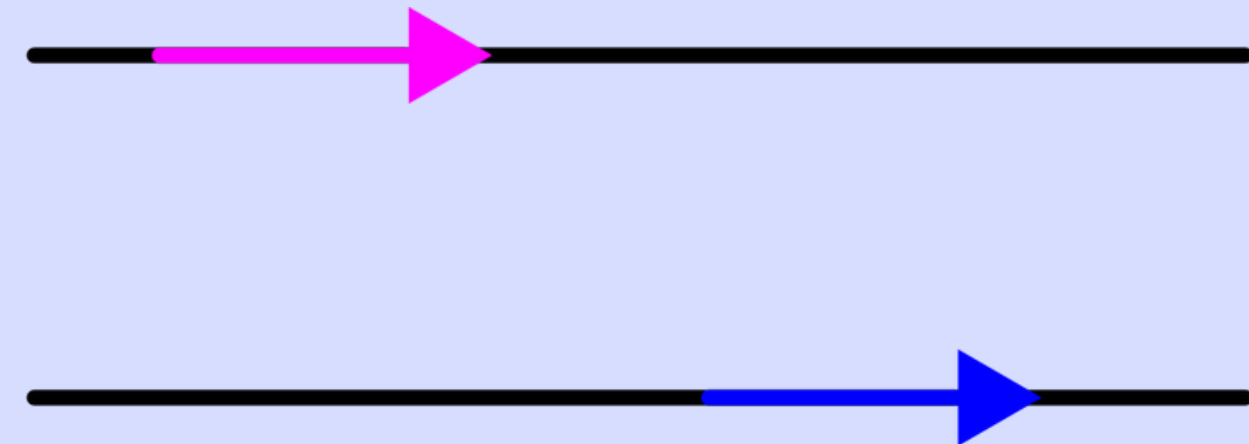
Vetor

- **Versor:** o versor de um vetor não nulo é o vetor **unitário** de **mesma direção e mesmo sentido** do vetor.



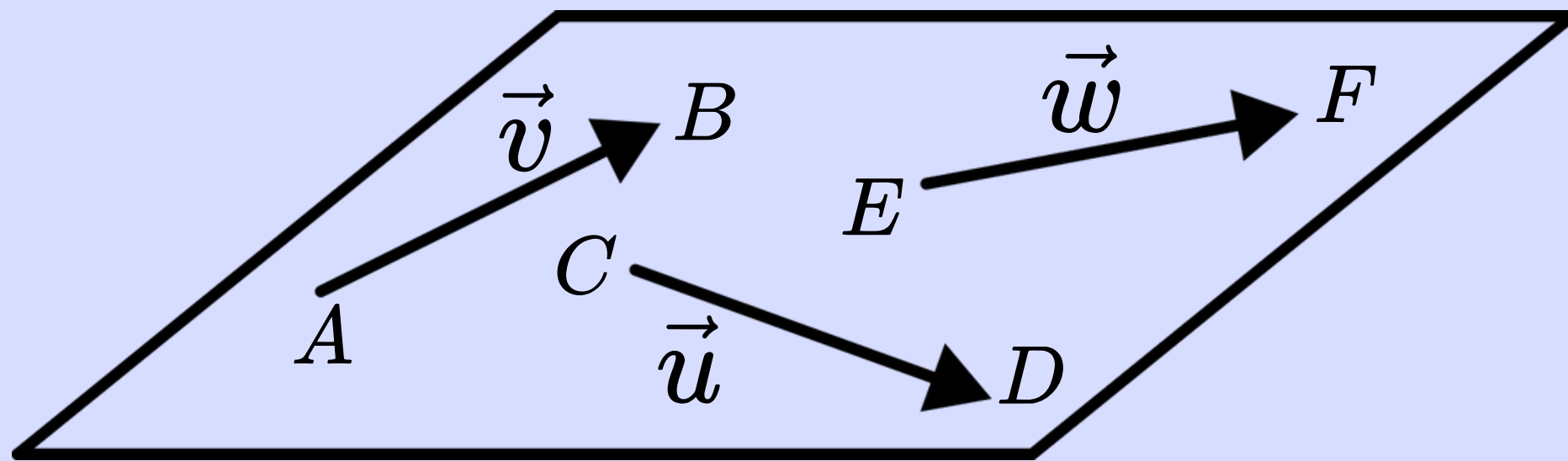
Vetor

- **Vetores colineares:** dois vetores são **colineares** se tiverem a **mesma direção** (retas suporte paralelas)



Vetor

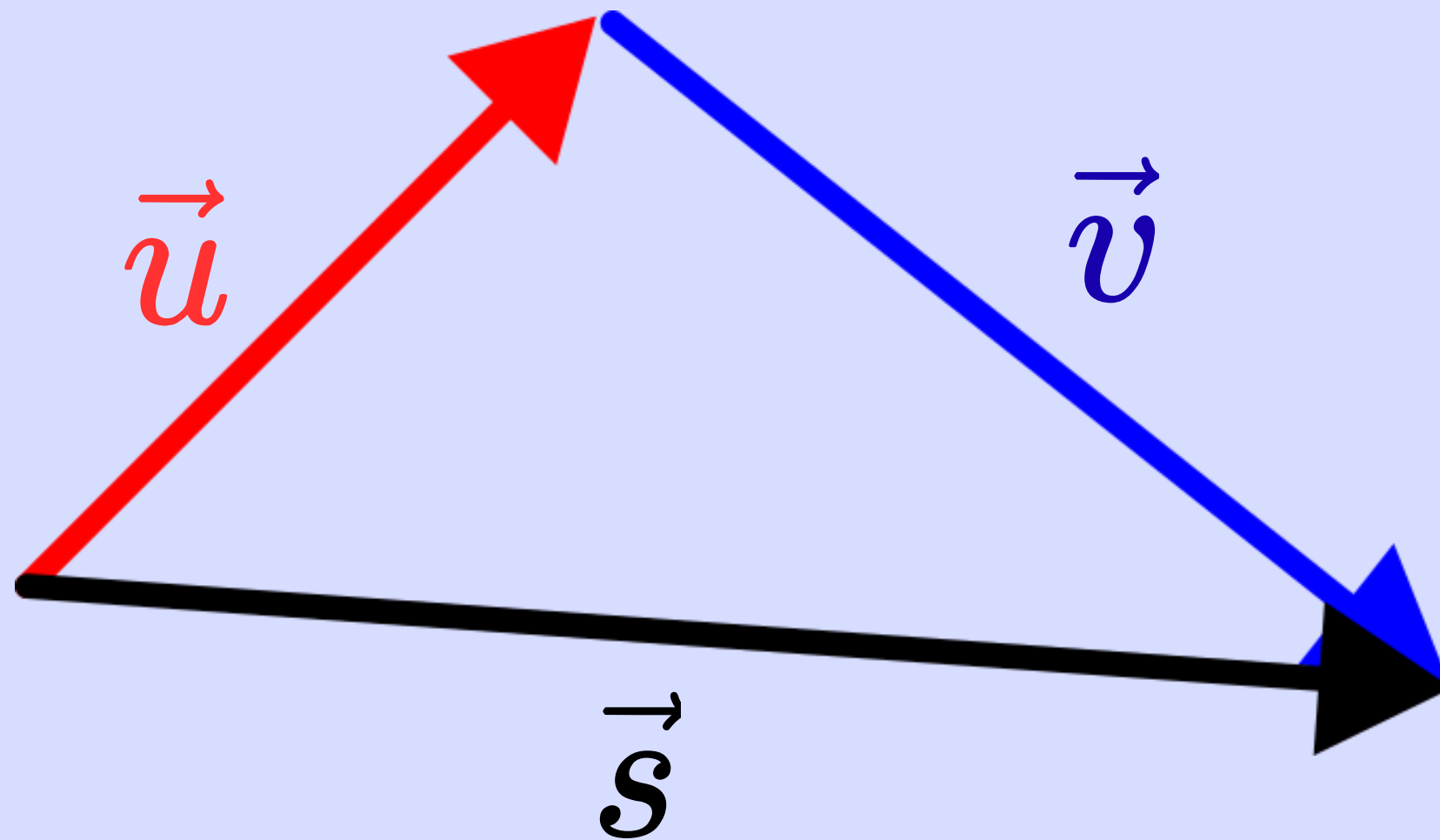
- **Vetores coplanares:** três vetores distintos são **coplanares** se todos possuem representantes pertencentes ao mesmo plano.



Dois vetores quaisquer
são sempre coplanares

Operação com vetores

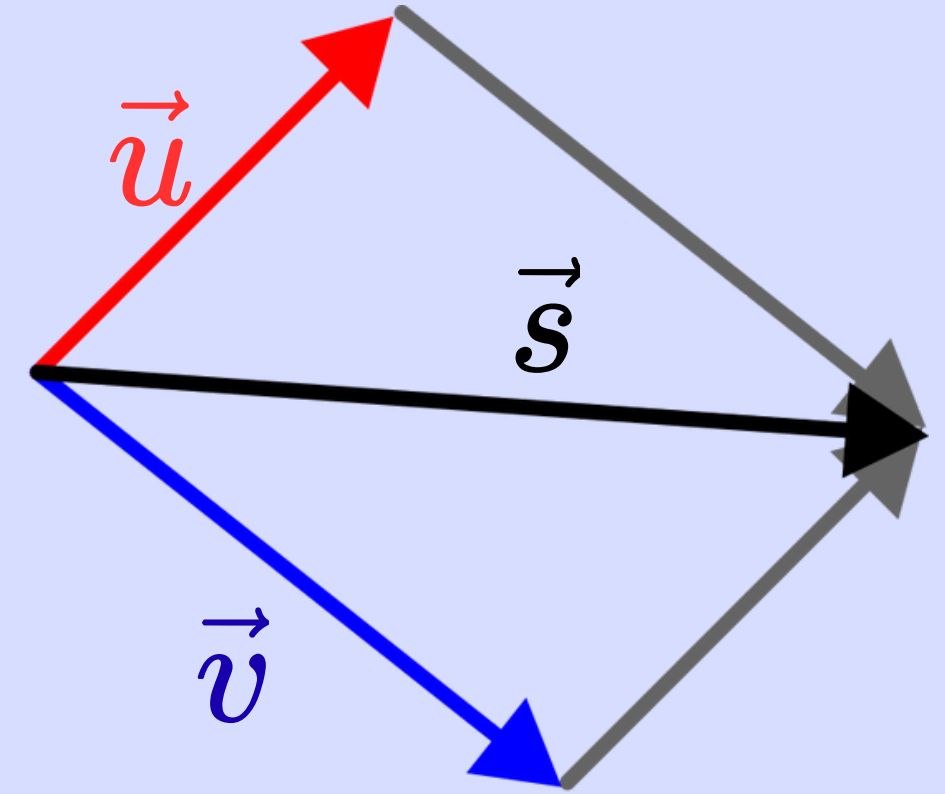
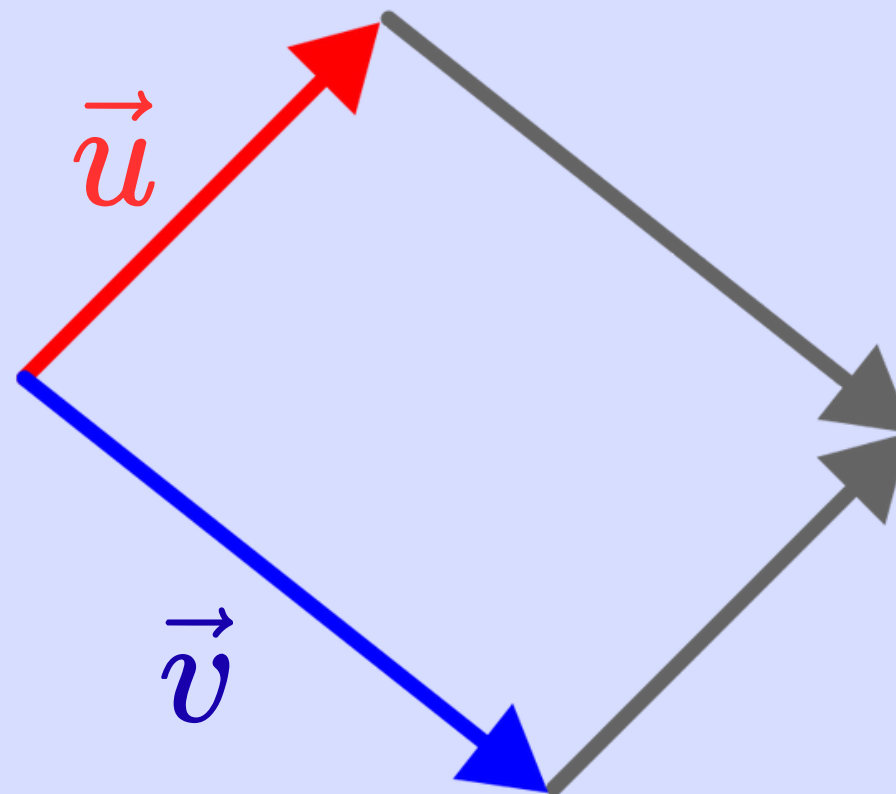
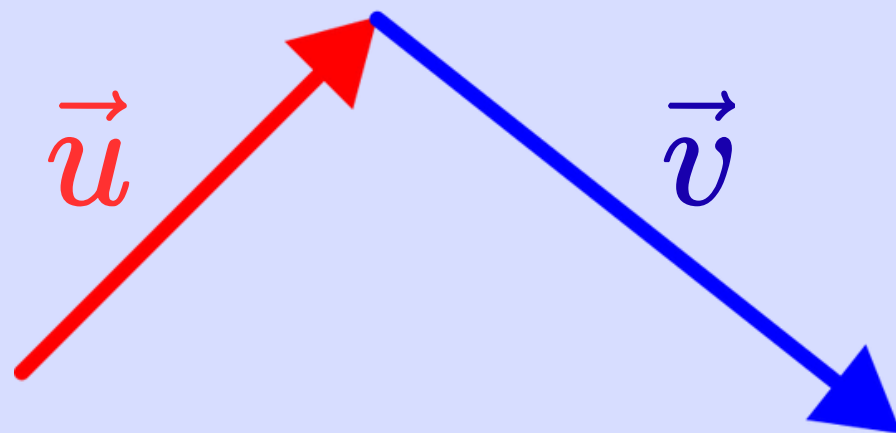
- **Adição de vetores:** dois vetores representados pelos segmentos AB e BC têm sua soma representada pelo segmento definido pelos pontos A e C



$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

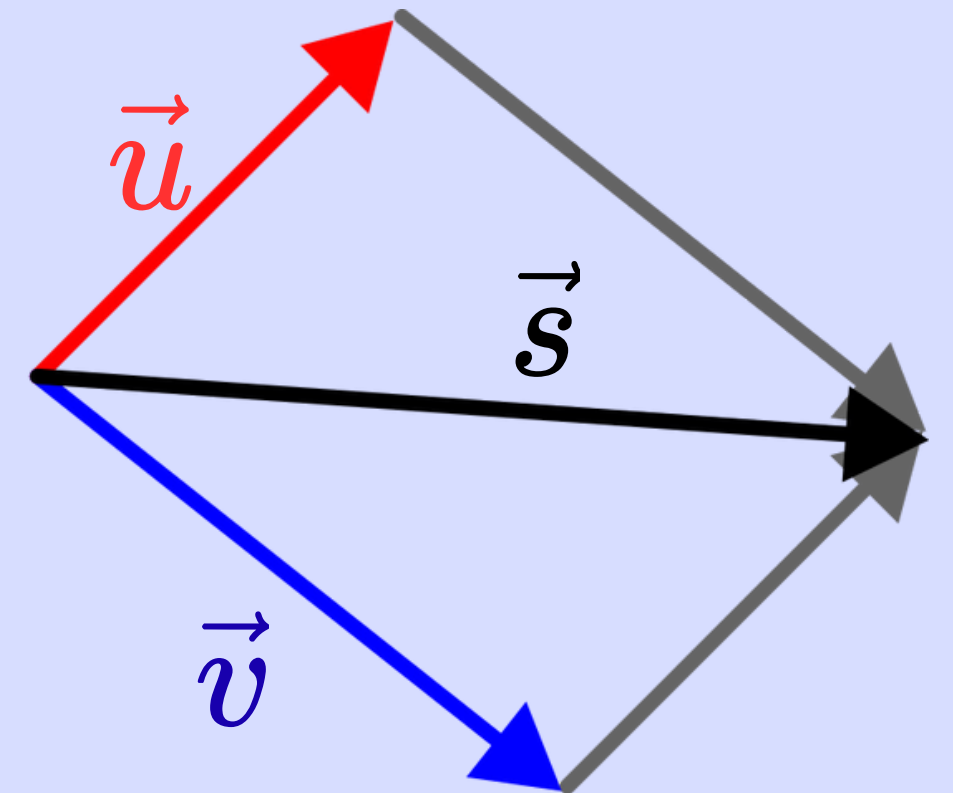
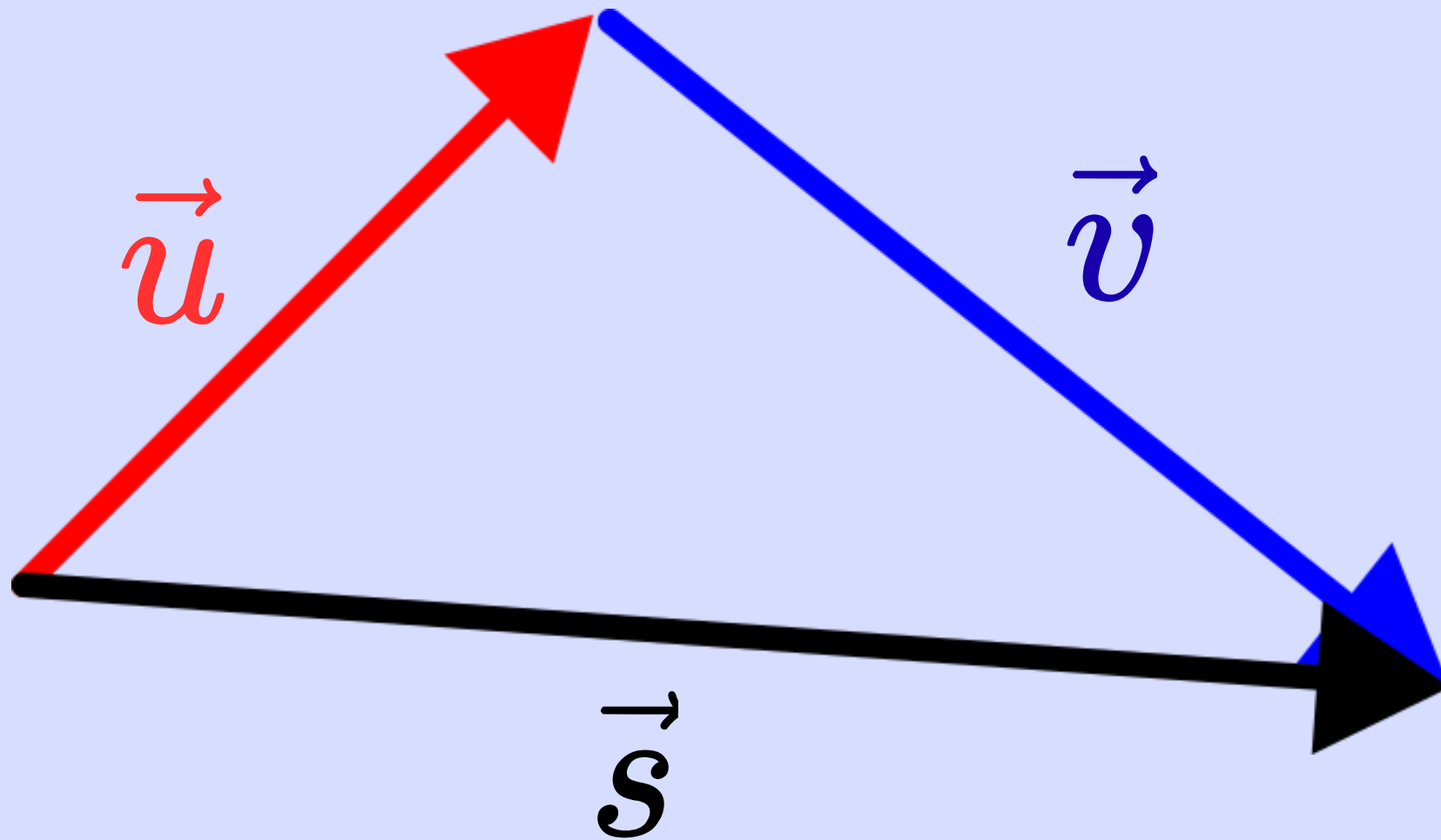
Operação com vetores

- **Adição de vetores:** de forma prática, colocamos os vetores na mesma origem e utilizamos o método do paralelogramo



Operação com vetores

- **Adição de vetores:** de forma prática, colocamos os vetores na mesma origem e utilizamos o método do paralelogramo



Operação com vetores

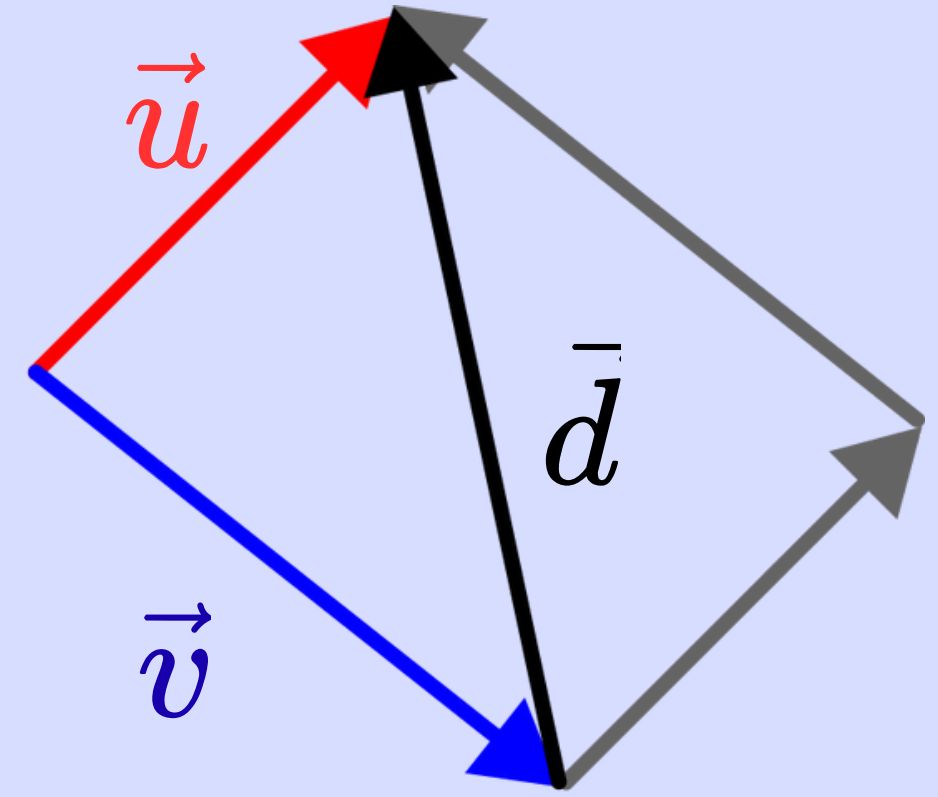
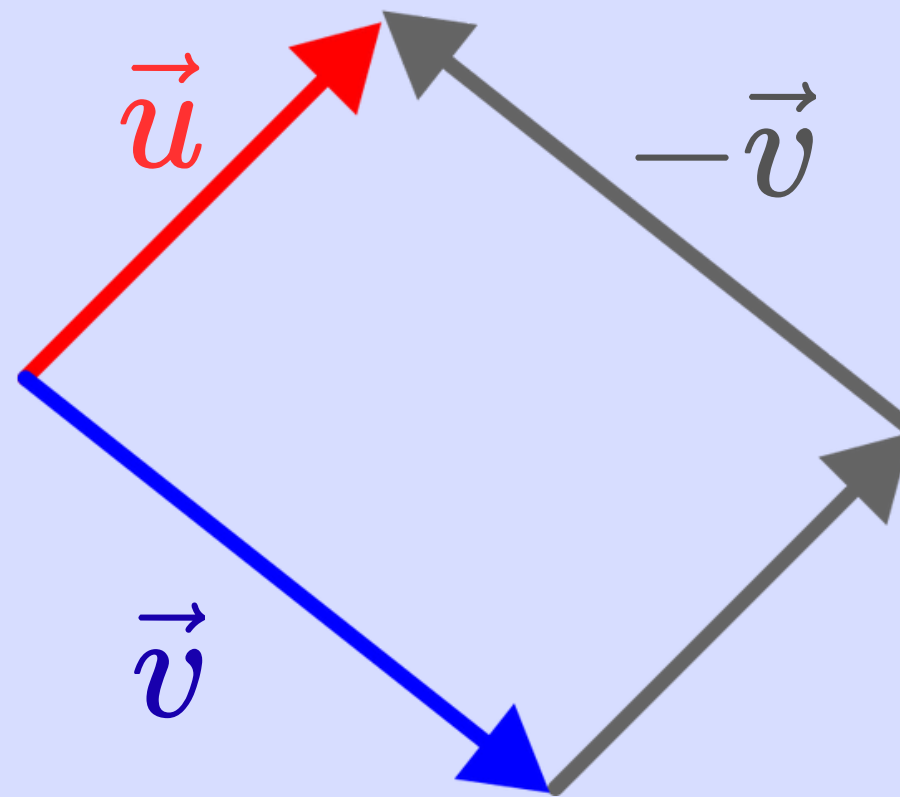
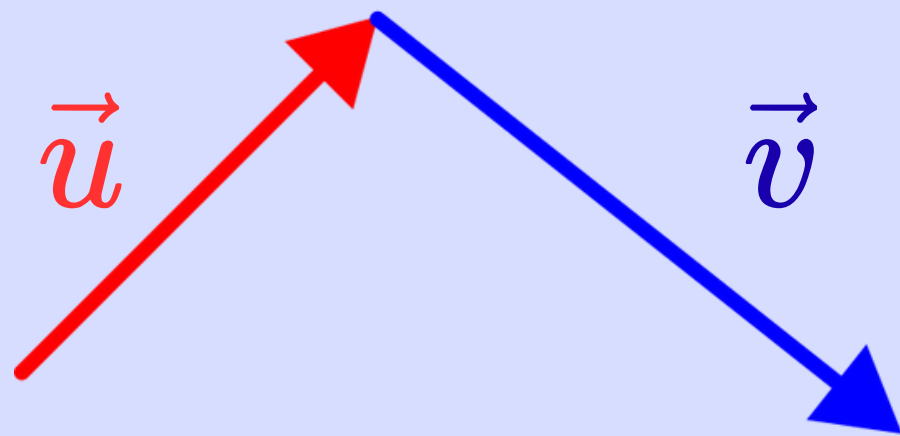
- **Adição de vetores - Propriedades**

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Vetor nulo: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
- Vetor oposto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$

Operação com vetores

- Diferença de vetores

$$\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Operação com vetores

- **Multiplicação por um número real:** dado um vetor não nulo e um número real k , também não nulo, chama-se produto do vetor pelo número real o vetor

$$\vec{p} = k\vec{v}$$

- **Módulo:** $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$
- **Direção:** não é alterada $\vec{p} \parallel \vec{v}$
- **Sentido:** o mesmo se $k > 0$, o oposto se $k < 0$

Operação com vetores

- **Multiplicação por um número real:**
 - Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, temos $k\vec{v} = \vec{0}$
 - Dados dois vetores colineares, sempre existe um número real tal que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

- O versor de um vetor não nulo é o vetor unitário

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

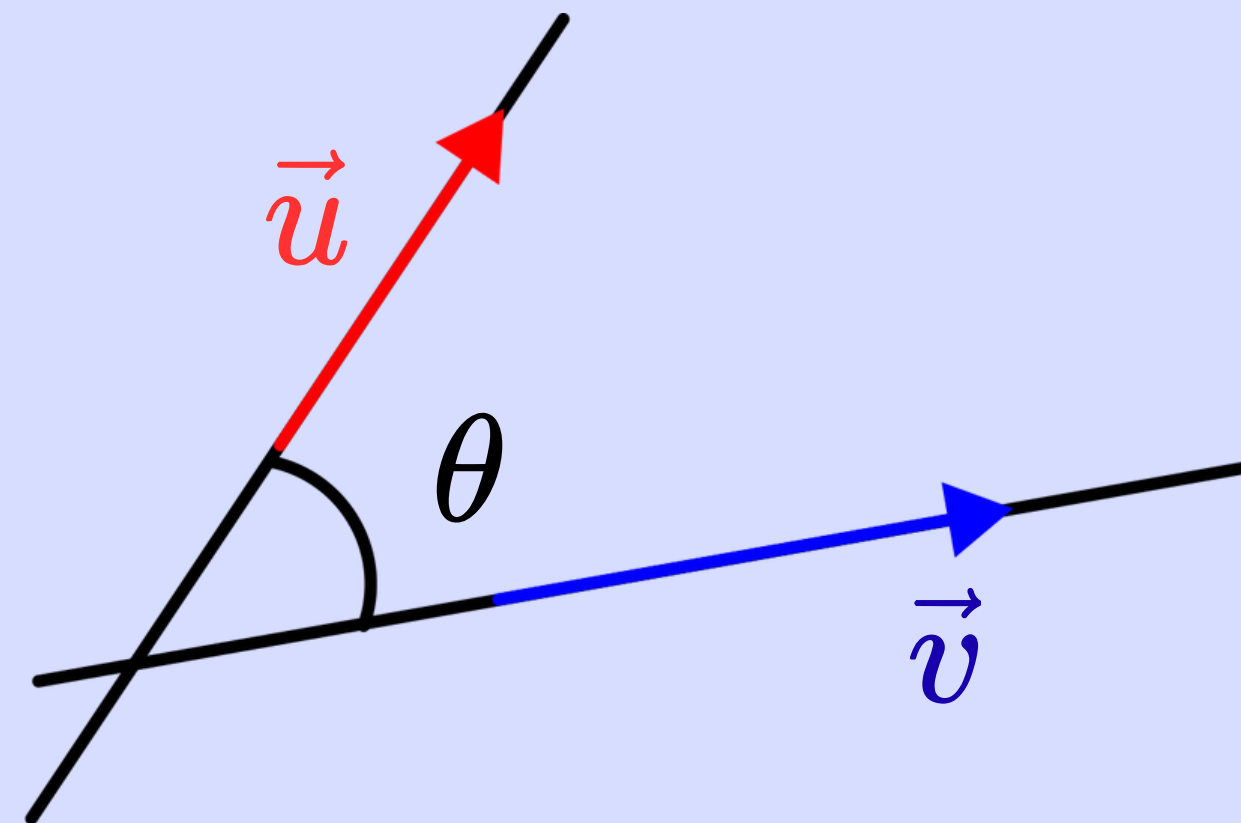
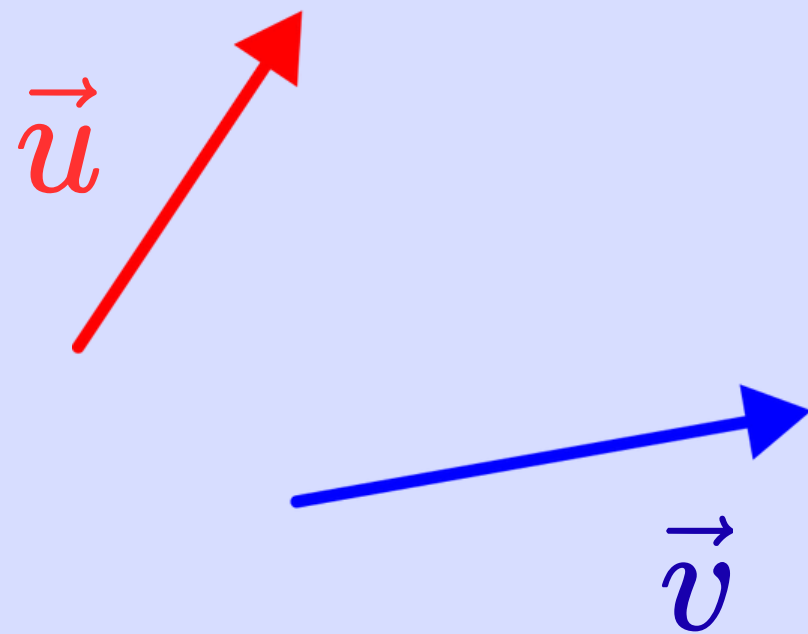
Operação com vetores

- **Multiplicação por um número real - Propriedades**

- Associativa: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
- Distributiva 1: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- Distributiva 2: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

Ângulo de dois vetores

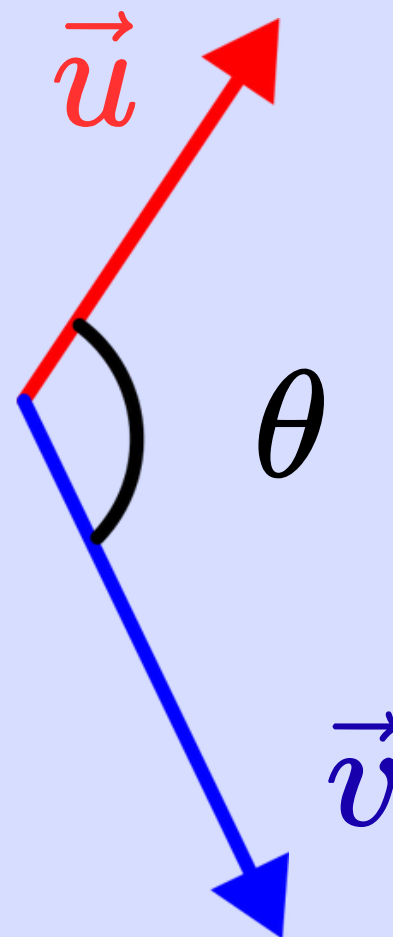
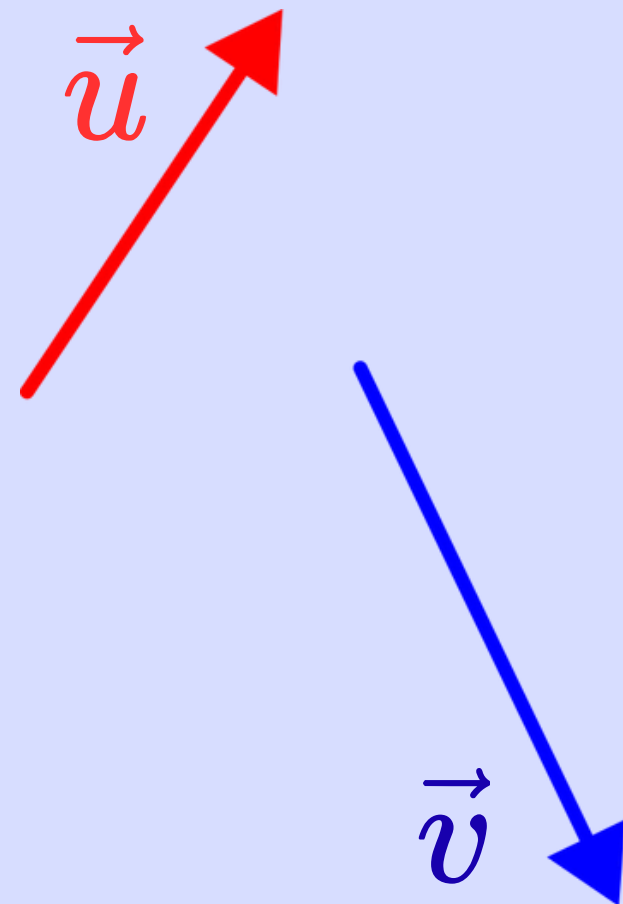
- O ângulo entre dois vetores não nulos é o ângulo formado pelas semi retas de mesma direção dos vetores



Ângulo de dois vetores

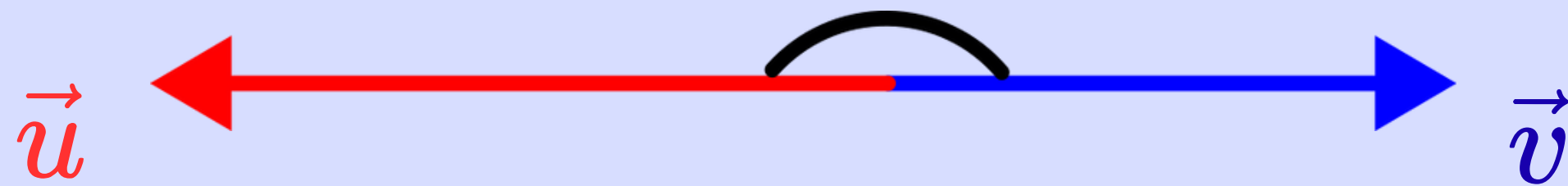
- O ângulo entre dois vetores não nulos é o ângulo formado pelas semi retas de mesma direção dos vetores

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

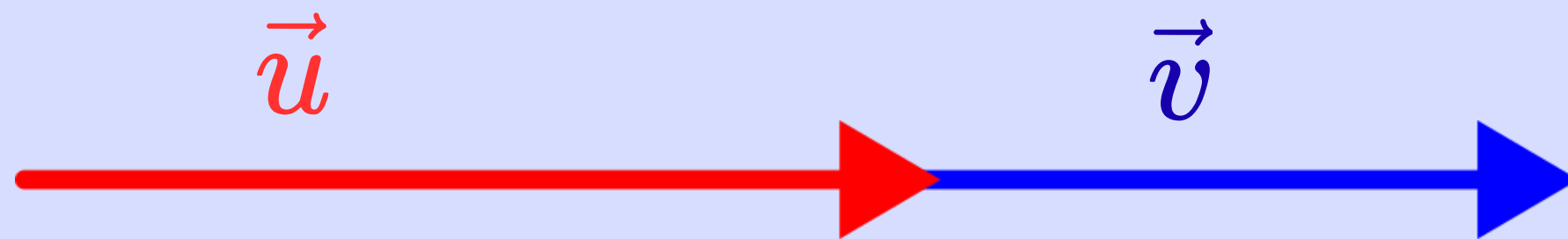


Ângulo de dois vetores

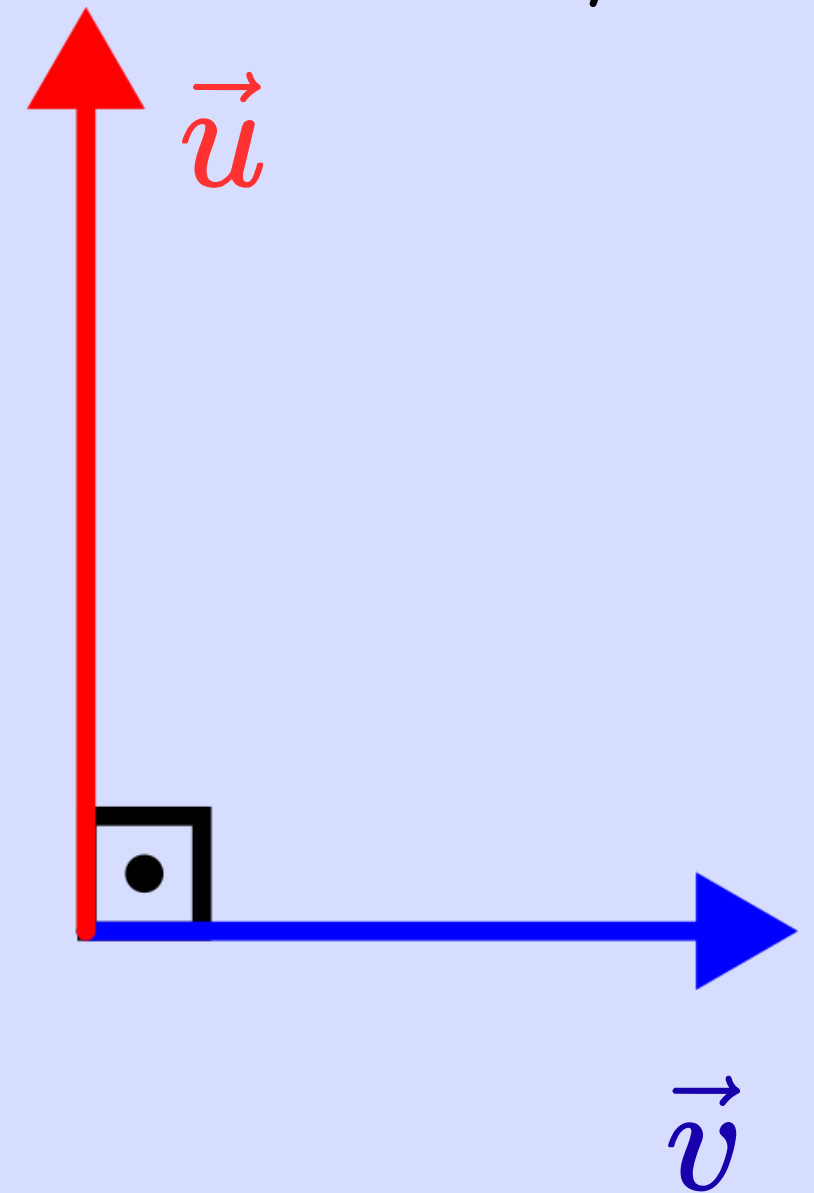
- $\theta = \pi$



- $\theta = 0$

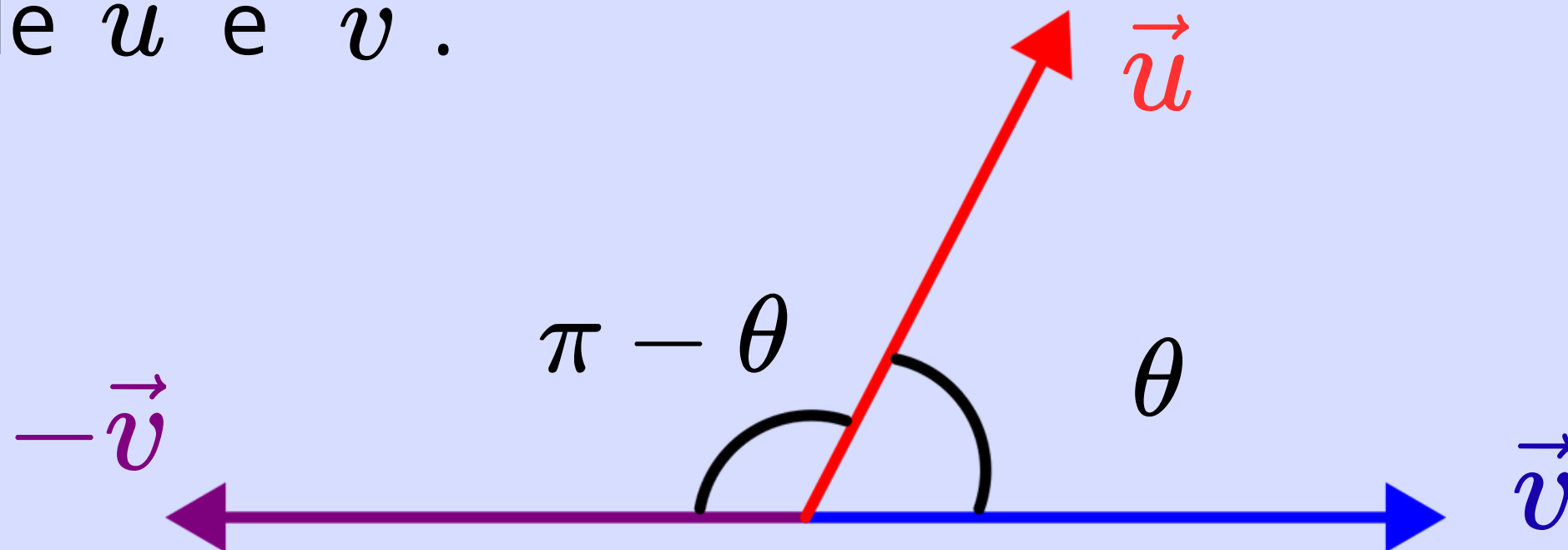


- $\theta = \pi/2$



Ângulo de dois vetores

- O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.
- Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $m \in \mathbb{R}$, então $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$
- O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Exemplo

- Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de acordo com a figura, construir o vetor

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \vec{s}$$

