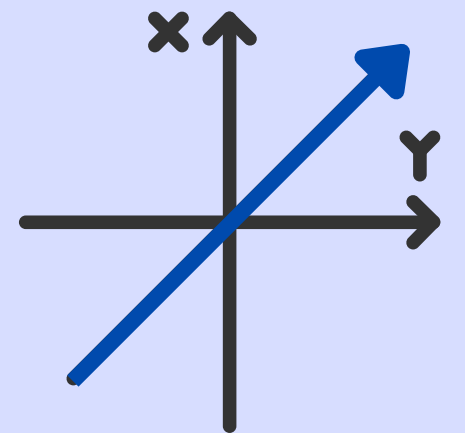


Vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

<https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/GA>

- STEINBRUCH , Alfredo and WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. McGRAW-HILL, 2a edição, 1987.



Decomposição de um vetor no plano

Dado dois vetores **não colineares**, um terceiro vetor, coplanar, pode ser decomposto segundo as direções dos dois primeiros vetores, isto é

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

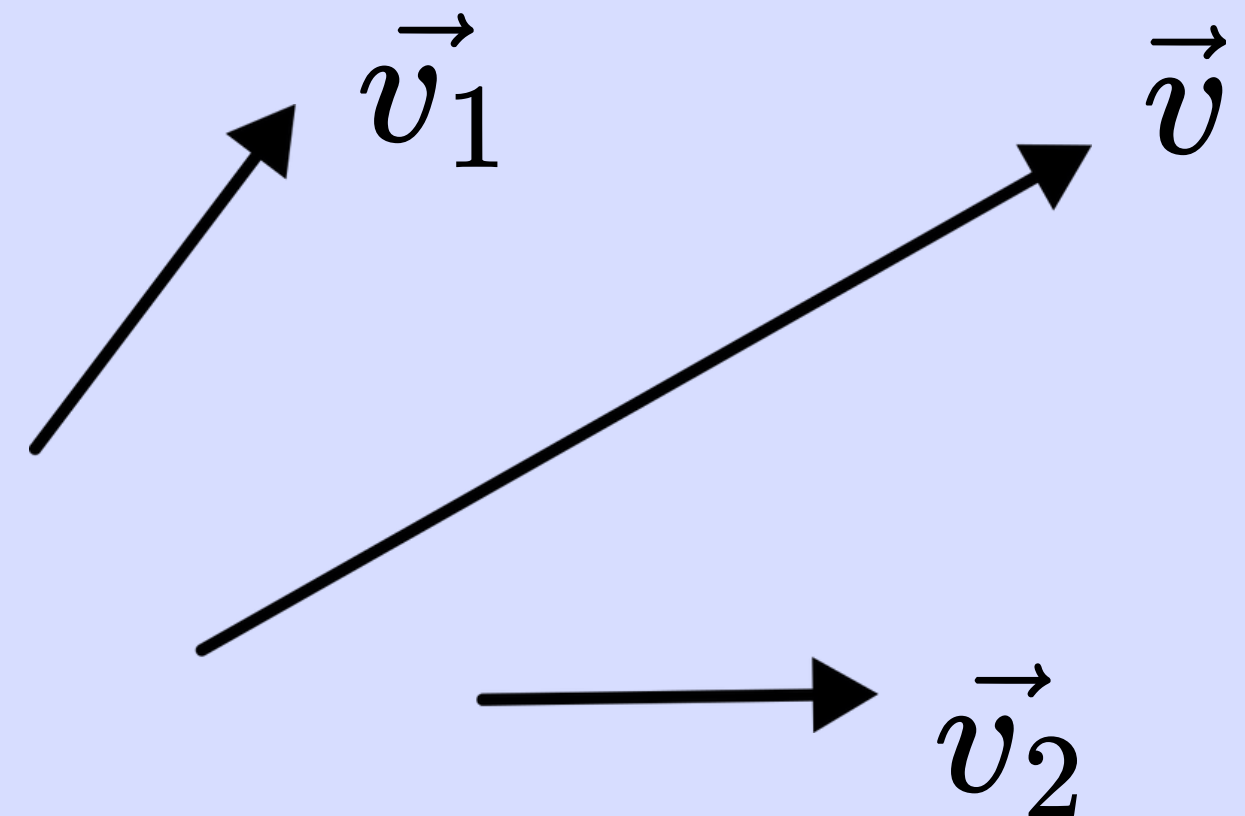
$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Decomposição de um vetor no plano

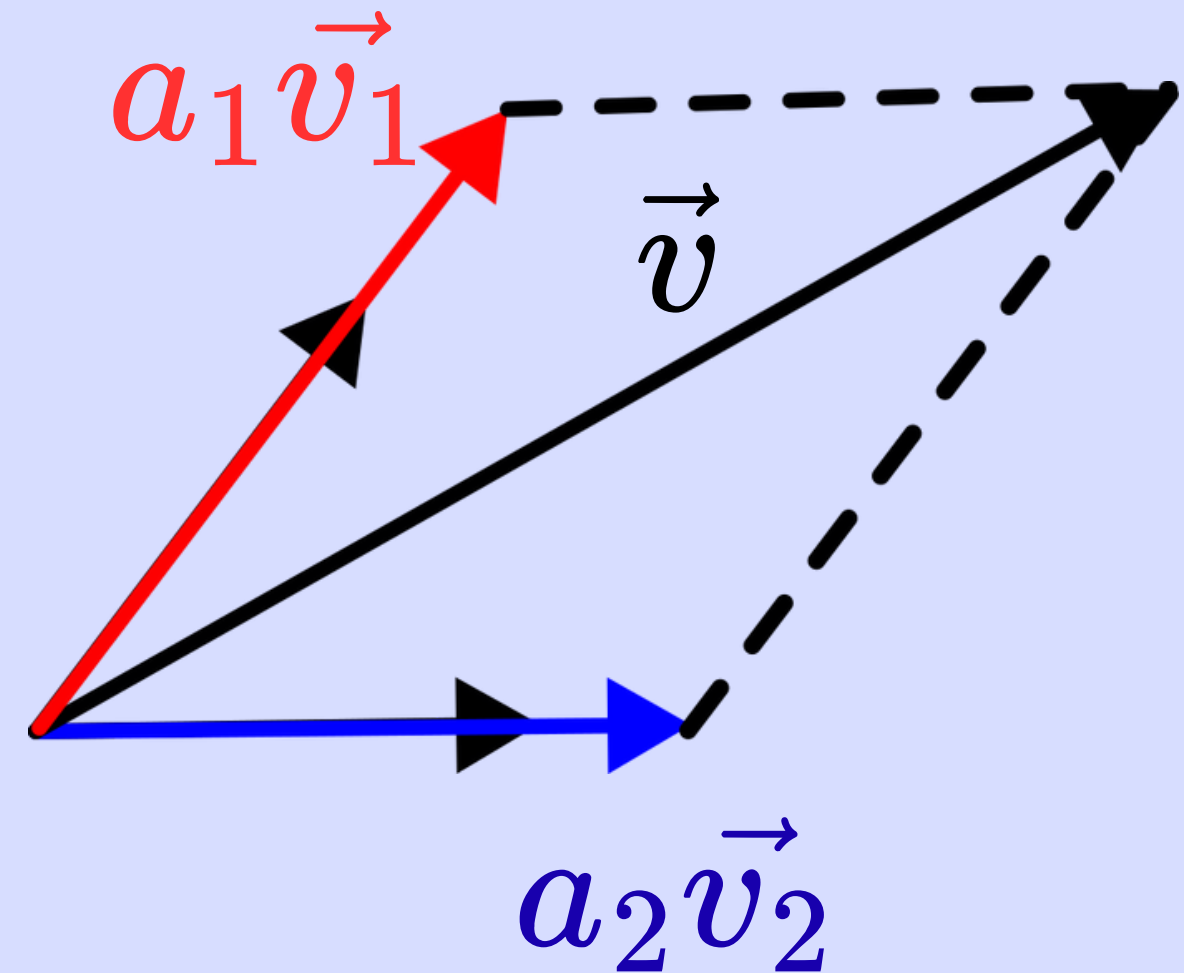
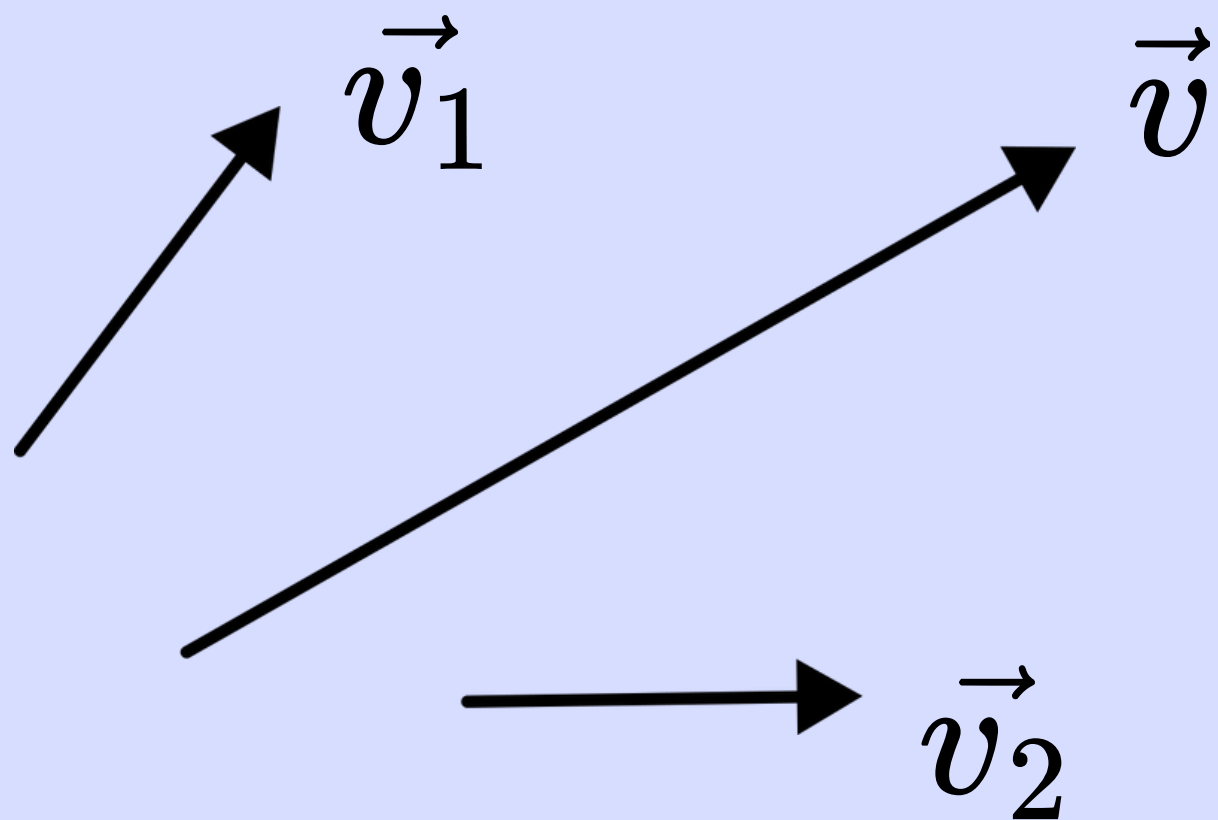
Dado dois vetores **não colineares**, um terceiro vetor, coplanar, pode ser decomposto segundo as direções dos dois primeiros vetores, isto é

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

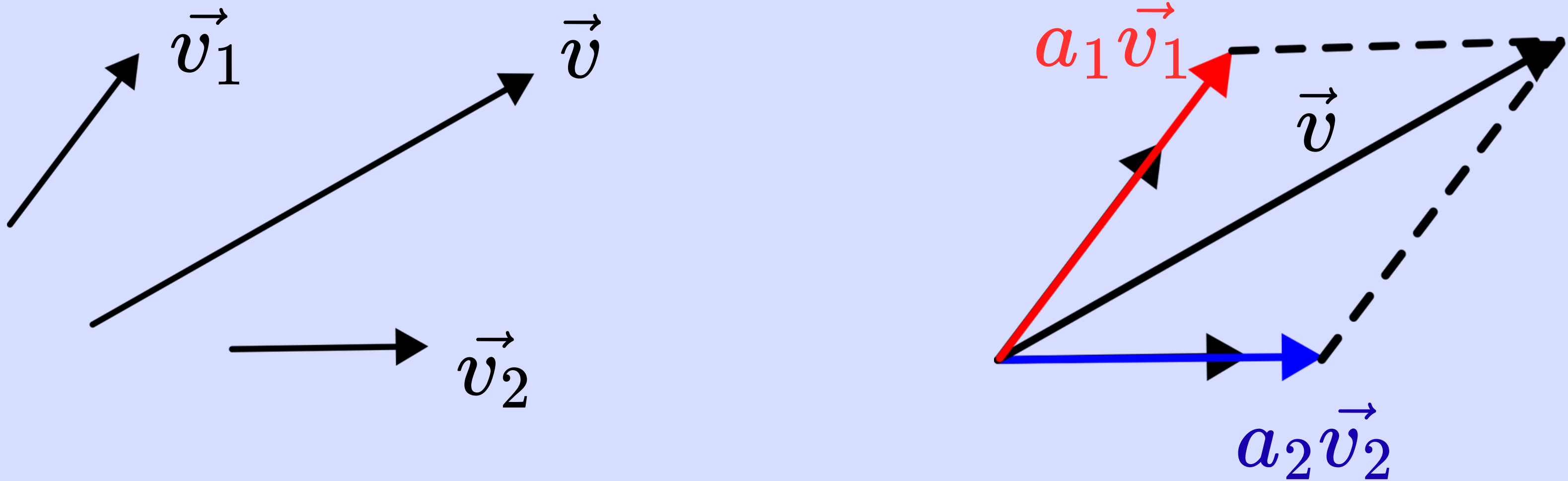
$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$



Decomposição de um vetor no plano

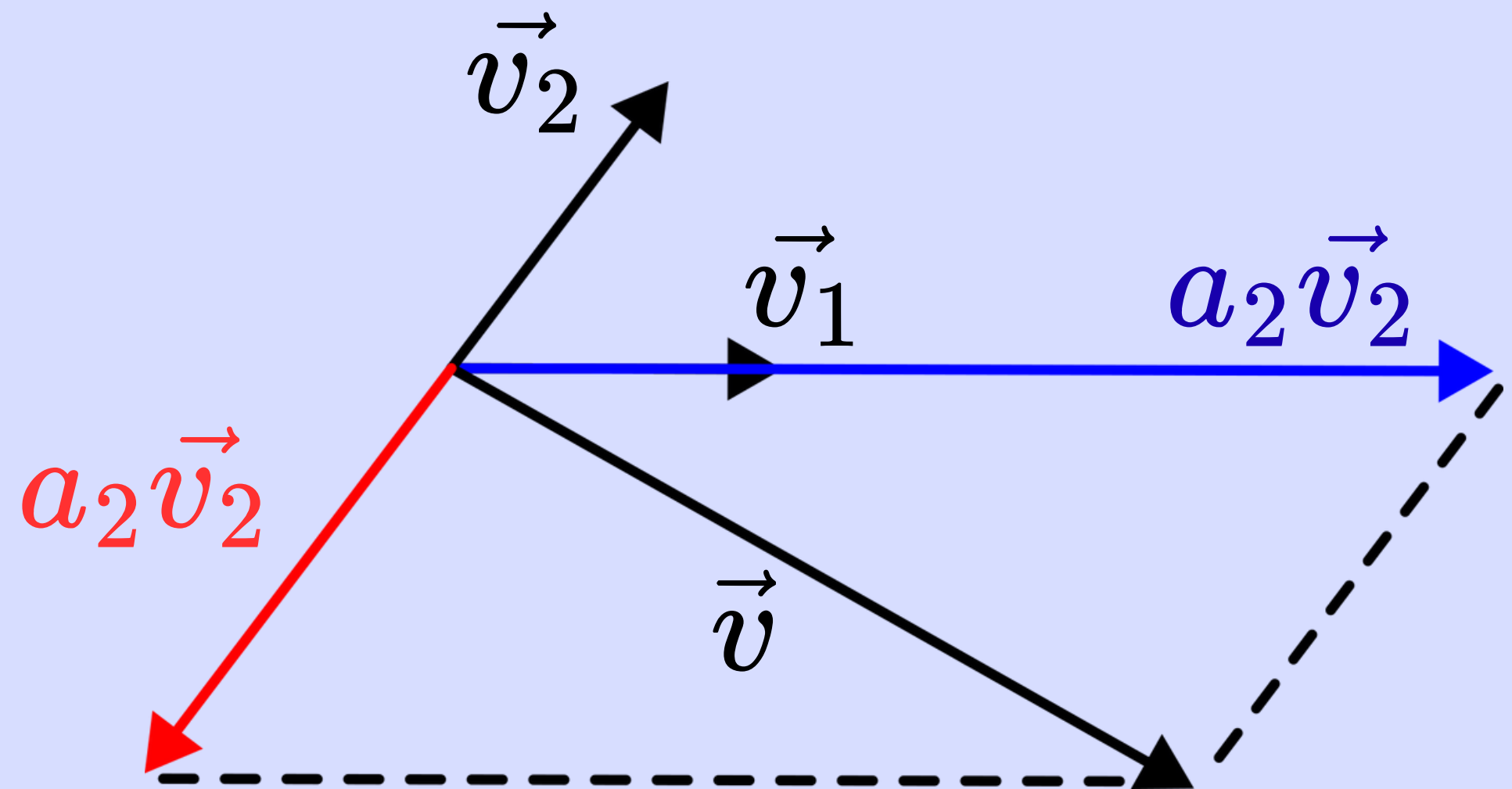
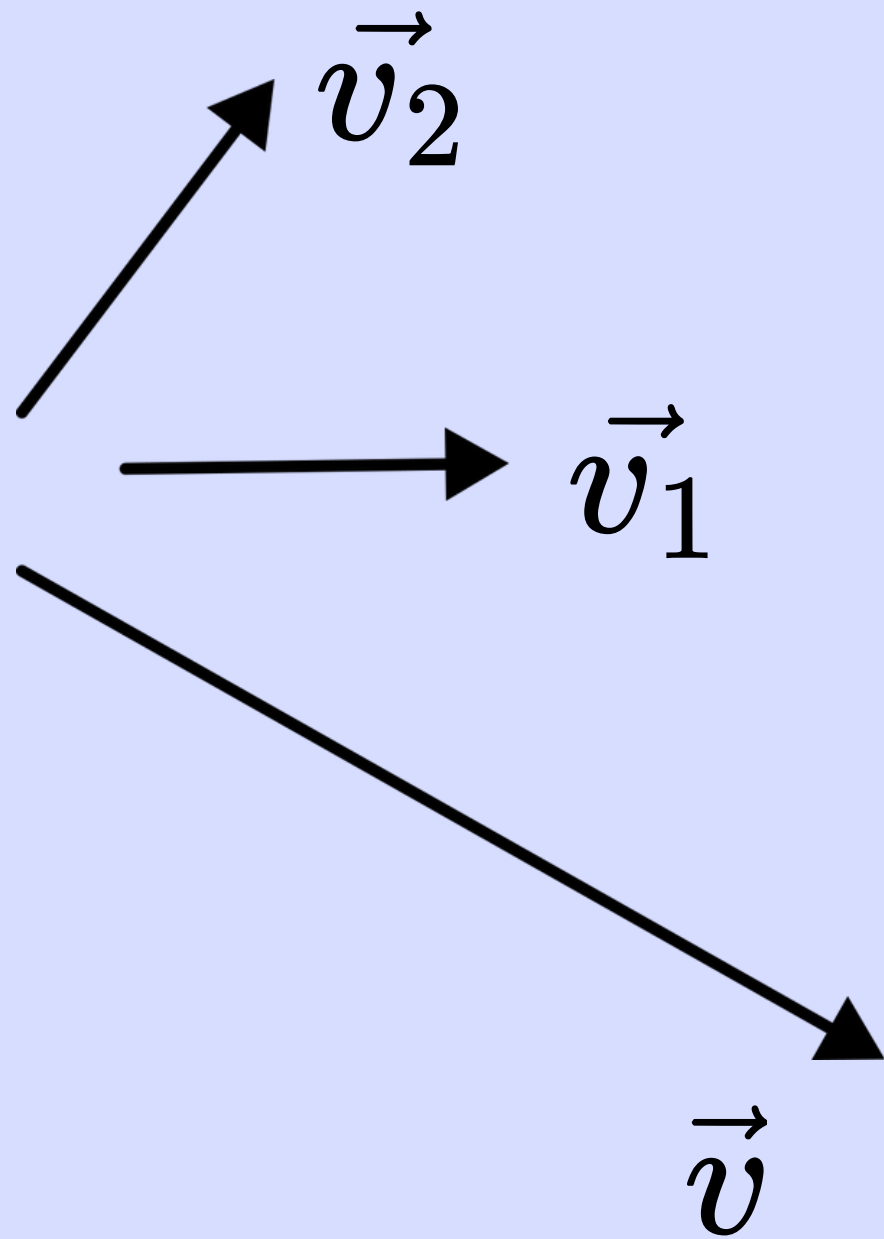


Decomposição de um vetor no plano

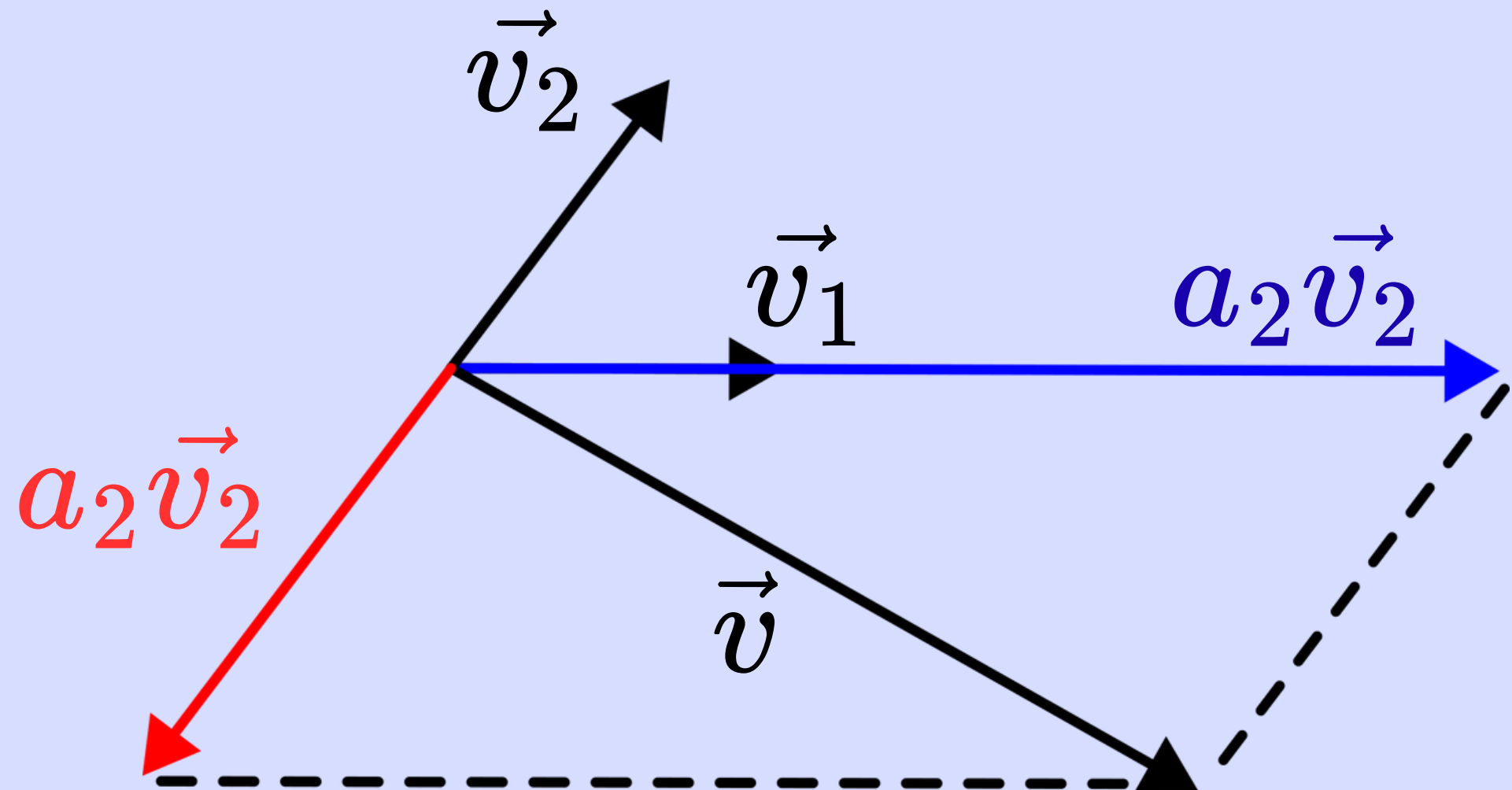
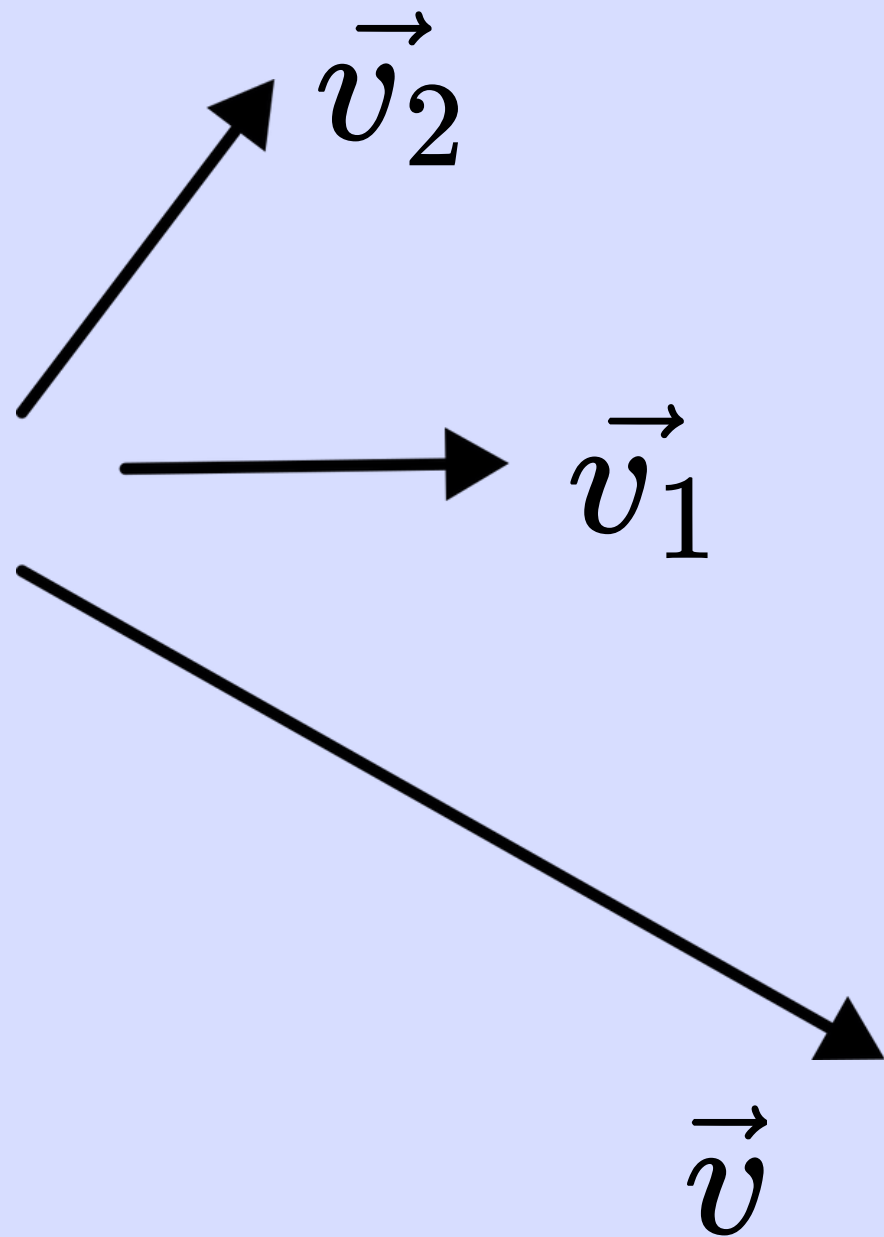


$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

Decomposição de um vetor no plano



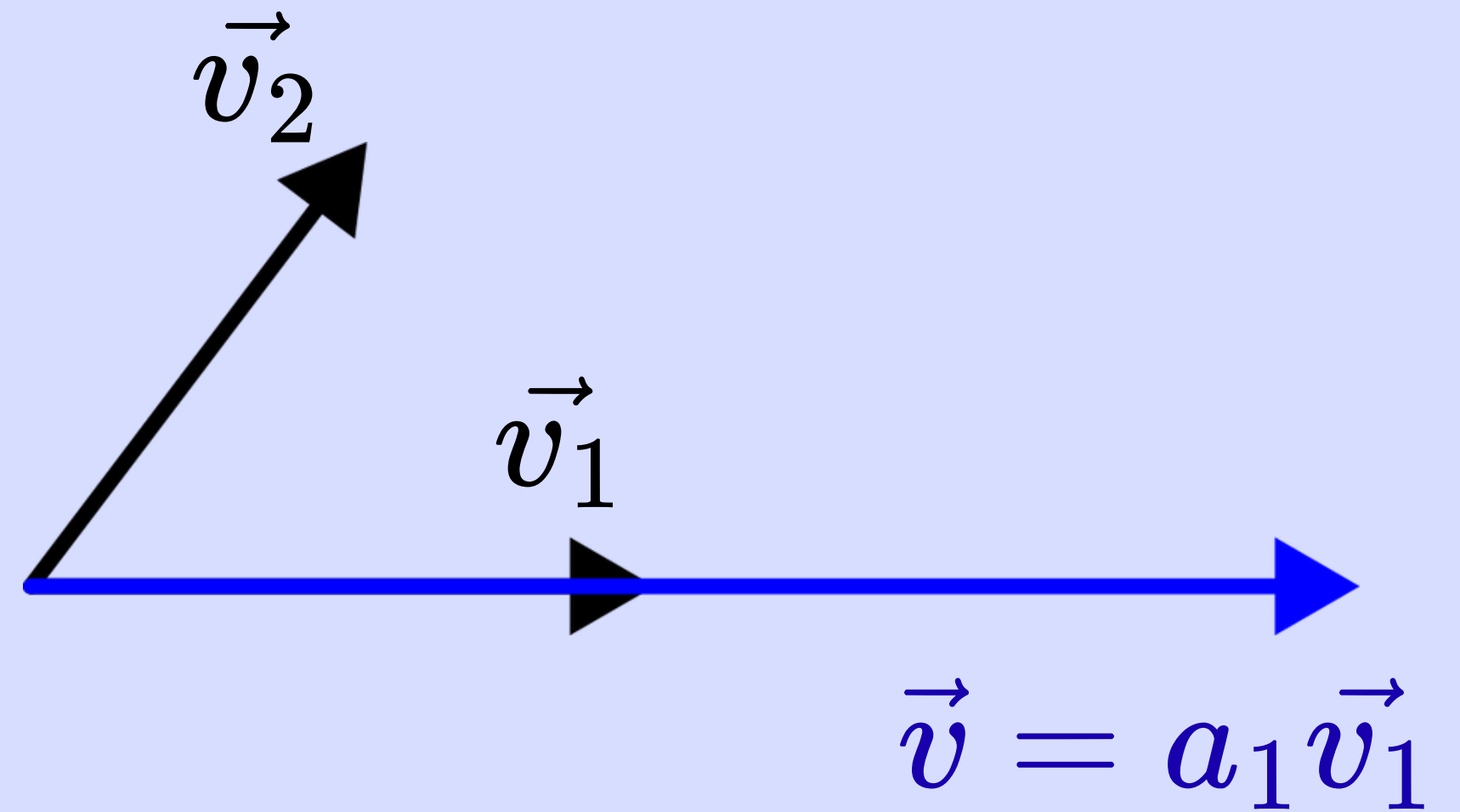
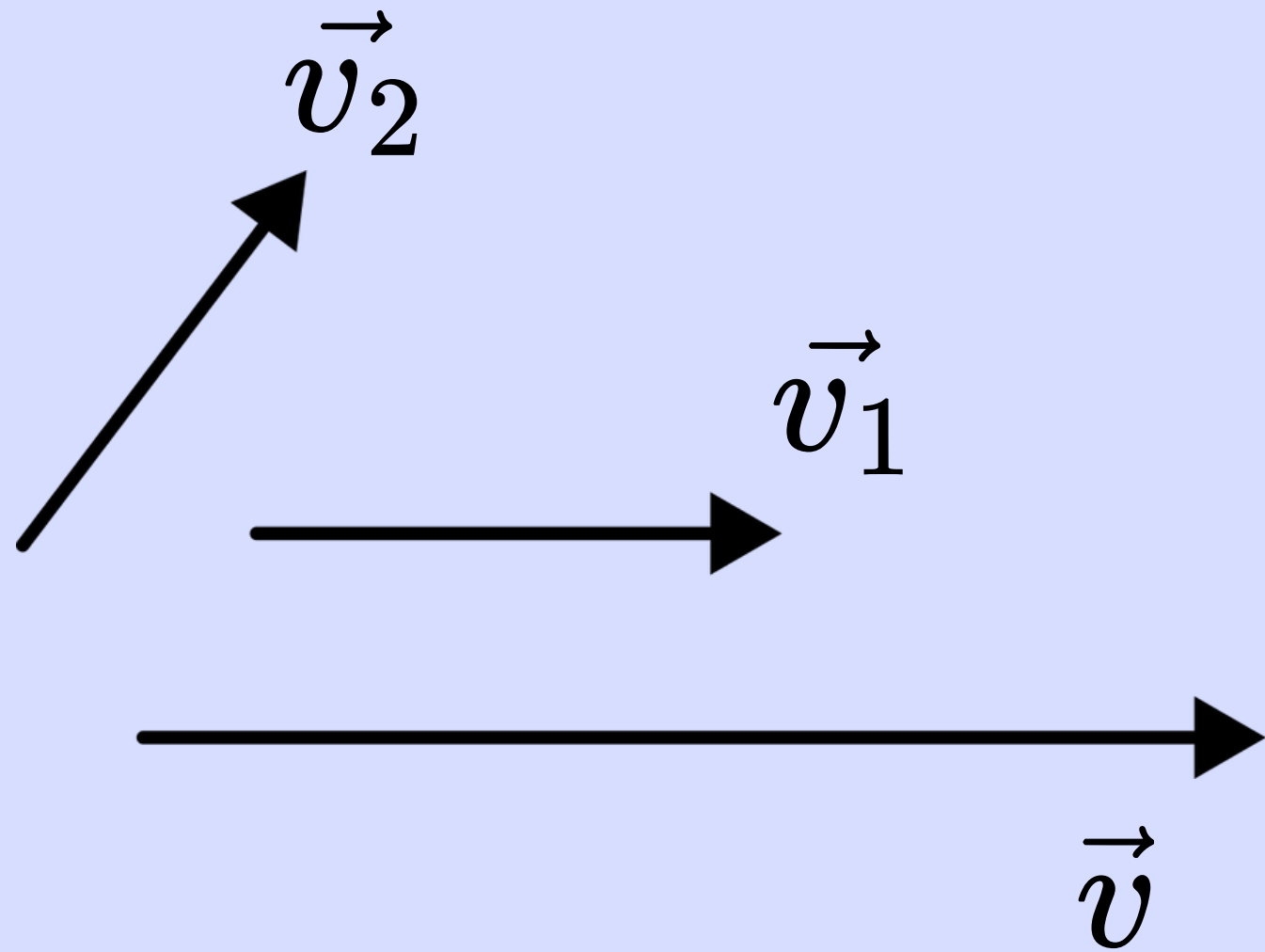
Decomposição de um vetor no plano



$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

$$a_2 < 0$$

Decomposição de um vetor no plano



$$a_2 = 0$$

Decomposição de um vetor no plano

Quando o vetor é representado por

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

dizemos que ele é uma **combinação linear**.

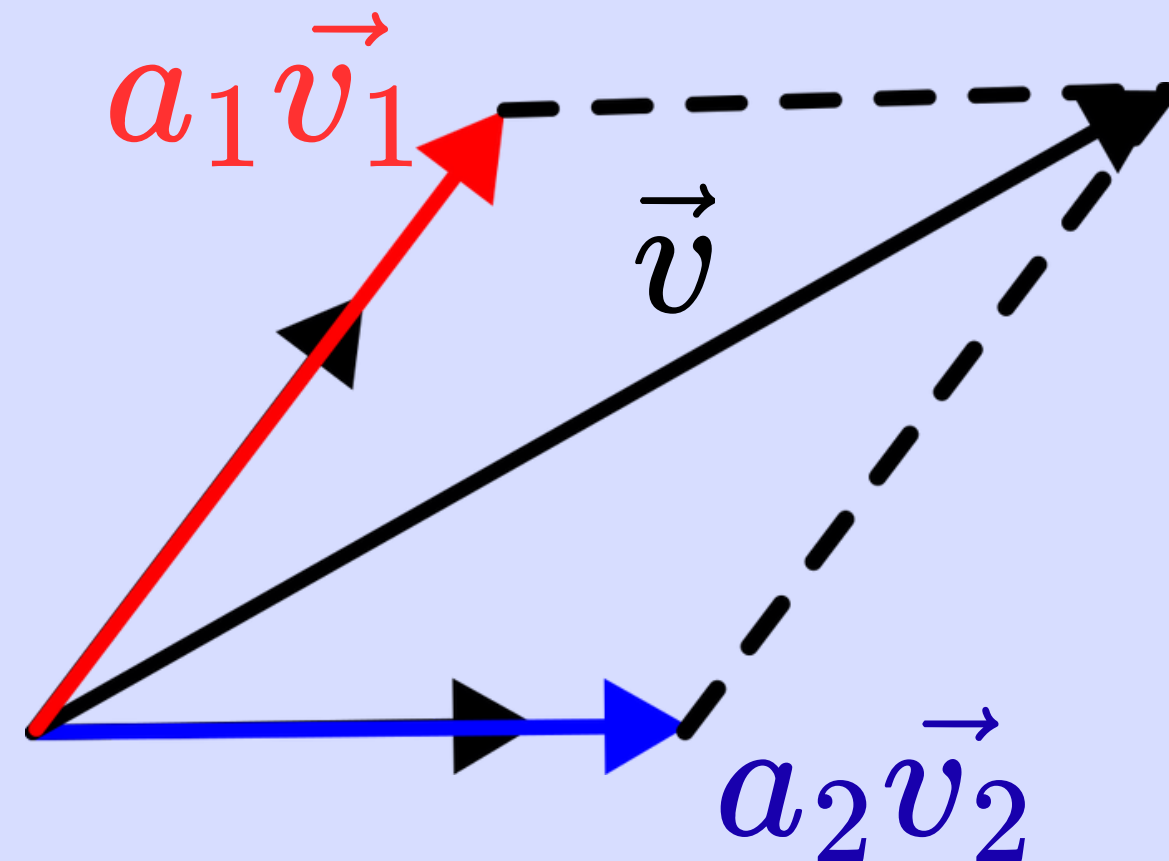
- O par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares é chamado de **base**.
 - No plano, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base.

Decomposição de um vetor no plano

Na combinação linear

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

temos que a_1 e a_2 são **componentes** ou **coordenadas** do vetor $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$



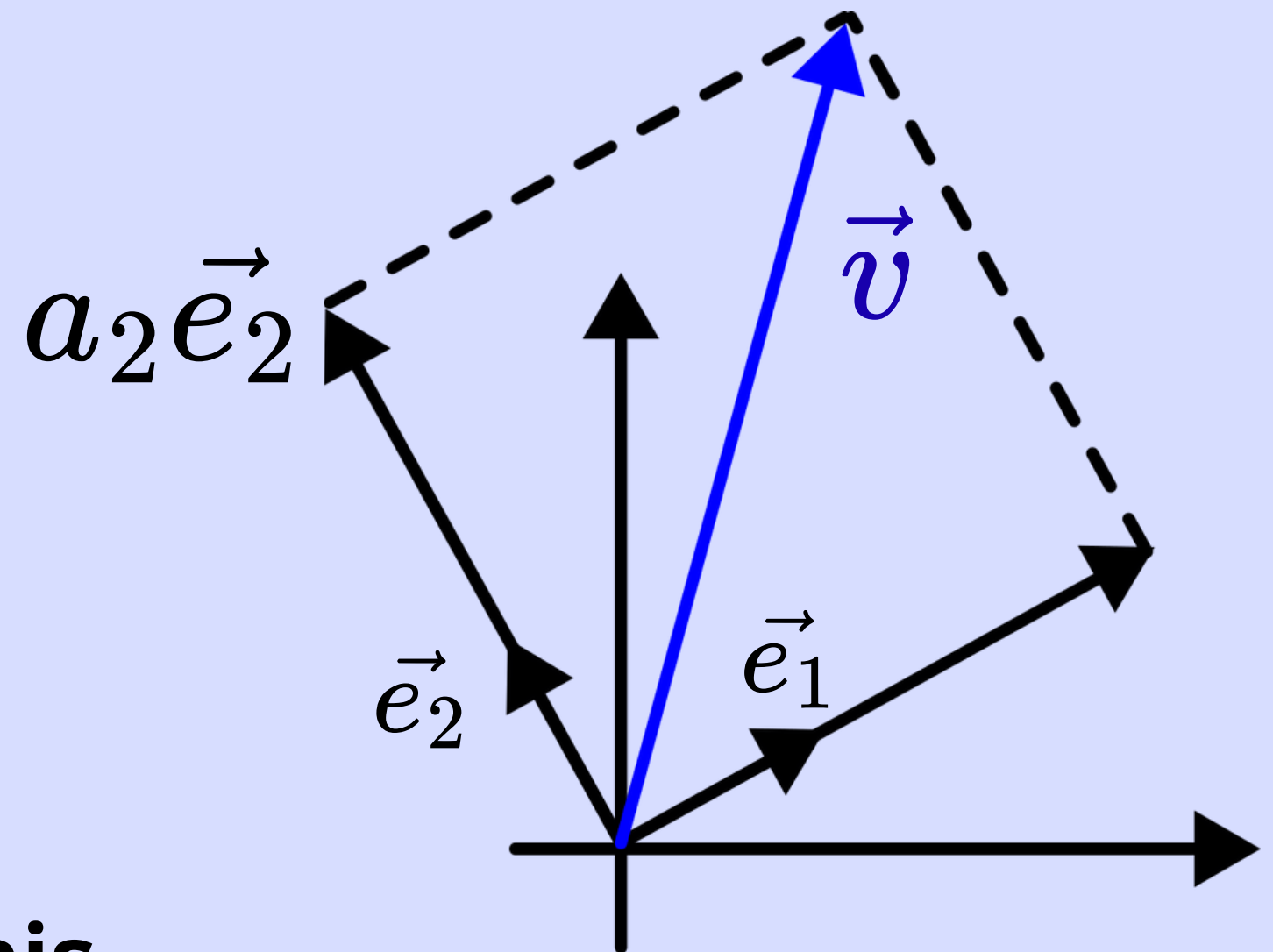
Decomposição de um vetor no plano

Na prática, as bases mais utilizadas são as bases **ortonormais**, isto é, os vetores que formam a base são **ortogonais** e **unitários**.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é ortonormal se

- $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$
- $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

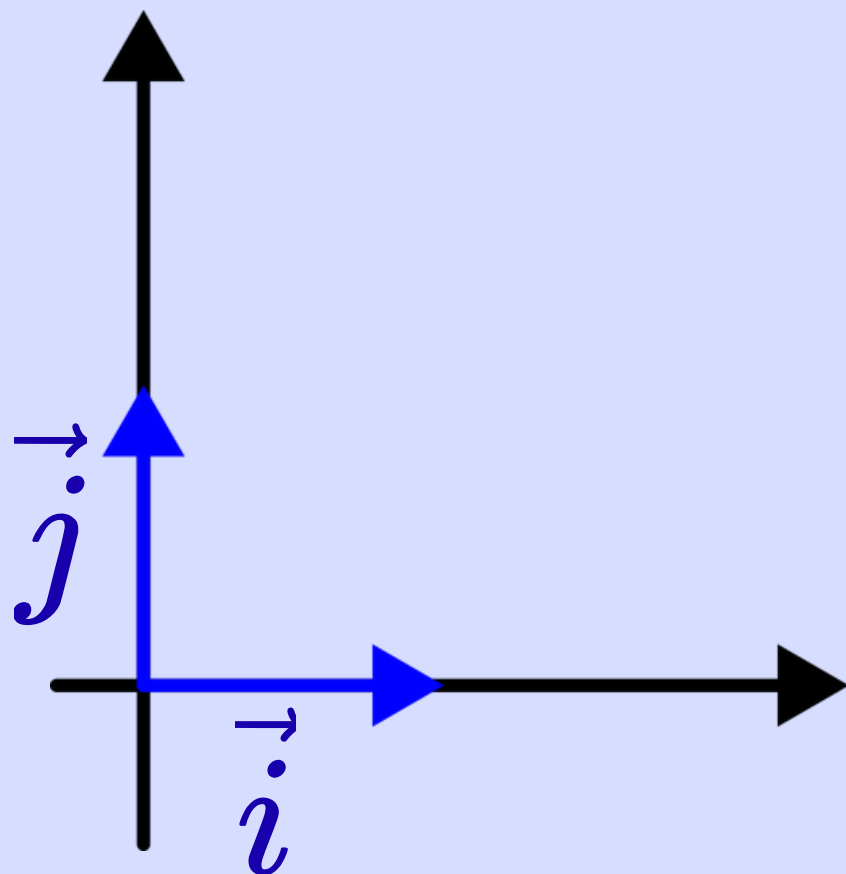
$a_1\vec{e}_1$ e $a_2\vec{e}_2$ são **projeções ortogonais**



Decomposição de um vetor no plano

Existem infinitas bases ortonormais no plano.

- Uma particularmente importante e mais utilizada é a **base canônica**: $(1,0)$ e $(0,1)$



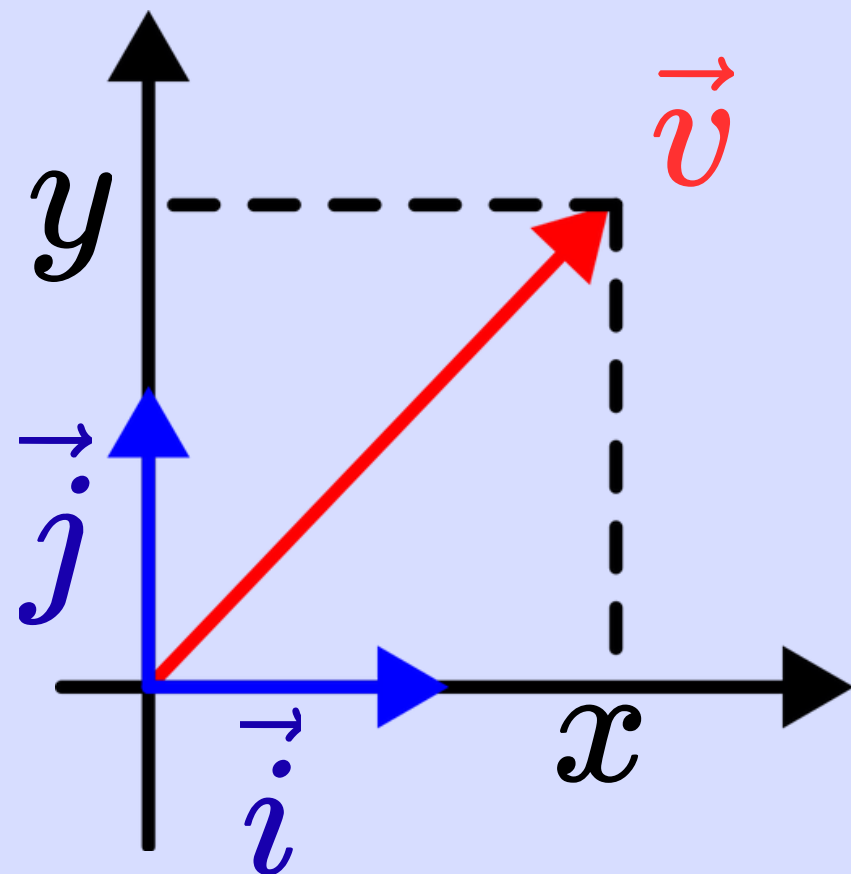
$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

Decomposição de um vetor no plano

Existem infinitas bases ortonormais no plano.

- Uma particularmente importante e mais utilizada é a **base canônica**: $(1,0)$ e $(0,1)$



$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Expressão analítica

Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados dos números reais

Definição: o vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais e se representa por

$$\vec{v} = (x, y)$$

que é a **expressão analítica** do vetor $\vec{v}$

Expressão analítica - Exemplos

$$1) \quad \vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j} \longrightarrow \vec{v} = (3, -5)$$

$$2) \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \longrightarrow \vec{v} = (1, -1)$$

$$3) \quad \vec{v} = 3\vec{j} \longrightarrow \vec{v} = (0, 3)$$

$$4) \quad \vec{v} = -10\vec{i} \longrightarrow \vec{v} = (-10, 0)$$

Igualdade e operações

- **Igualdade:** dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$$\begin{array}{l} \vec{u} = (x_1, y_1) \\ \vec{v} = (x_2, y_2) \end{array} \quad \boxed{\vec{u} = \vec{v}} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Igualdade e operações

- **Igualdade:** dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

Exemplo: Seja $\vec{u} = (x + 1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y - 6)$. Quando eles serão iguais?

Igualdade e operações

- **Igualdade:** dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

Exemplo: Seja $\vec{u} = (x + 1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y - 6)$. Quando eles serão iguais?

$$x = 4$$

$$y = 5$$

Igualdade e operações

- **Operações:** sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, e o escalar $a \in \mathbb{R}$. Define-se
 - $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 - $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$

Igualdade e operações

- **Exemplo:** sejam os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$ temos,

- $\vec{u} + \vec{v} =$

- $2\vec{u} =$

Igualdade e operações

- **Exemplo:** sejam os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$ temos,
 - $\vec{u} + \vec{v} = (6, 7)$
 - $2\vec{u} = (8, 2)$

Igualdade e operações

- **Propriedades:** para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, temos
 - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
 - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
 - $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
 - $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Igualdade e operações

- **Propriedades:** para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos
 - $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
 - $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
 - $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
 - $1\vec{v} = \vec{v}$

Igualdade e operações

- **Exemplo:** Determinar o vetor $\vec{w}$ na igualdade

$$3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

com $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$

Igualdade e operações

- **Exemplo:** Determinar o vetor $\vec{w}$ na igualdade

$$3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

com $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$

$$\vec{w} = \left(-\frac{7}{2}, 2\right)$$

Igualdade e operações

- **Exemplo:** Encontrar a_1 e a_2 , tais que

$$\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$$

com $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (-1, 8)$.

Igualdade e operações

- **Exemplo:** Encontrar a_1 e a_2 , tais que

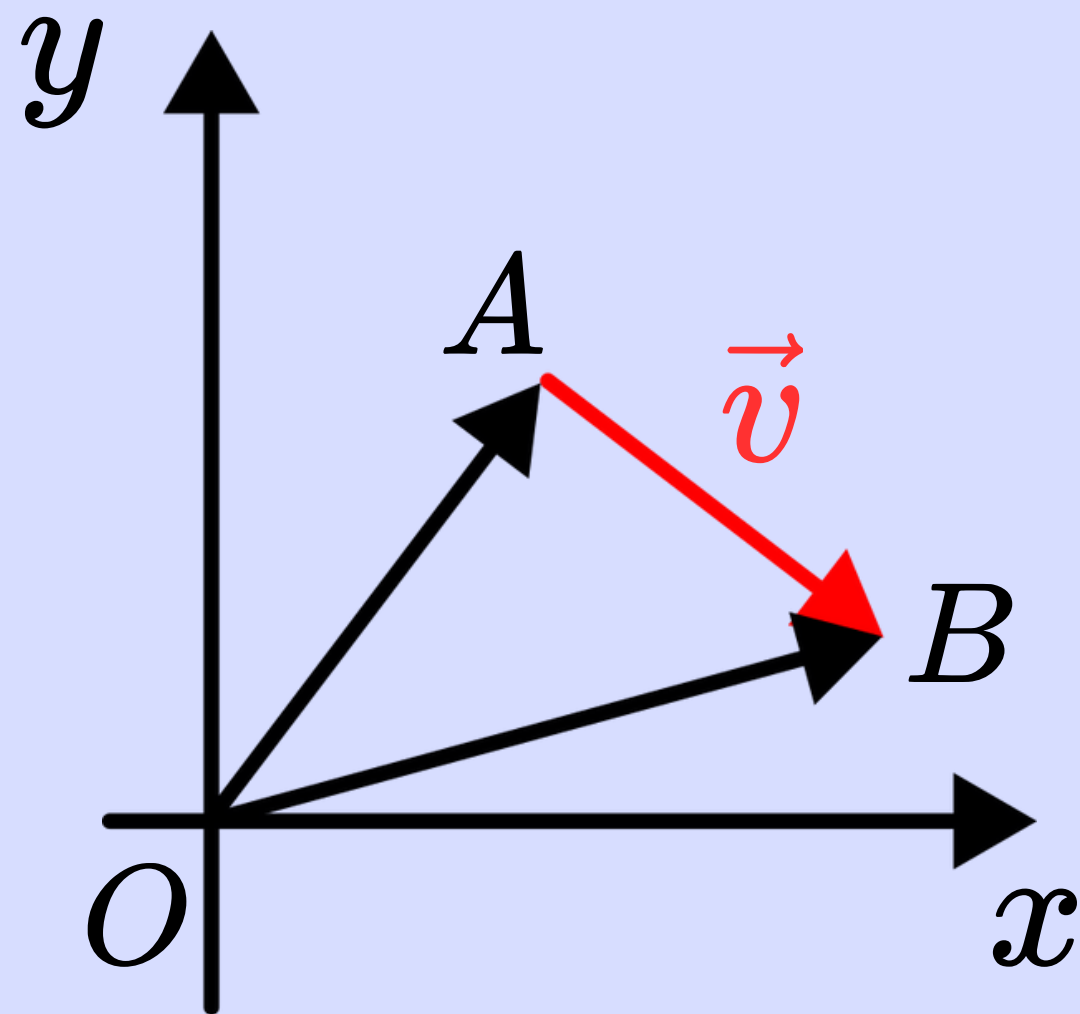
$$\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$$

com $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (-1, 8)$.

$$a_1 = 3, a_2 = -1$$

Vetor definido por dois pontos

- Seja um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. Dessa forma, temos as expressões analíticas

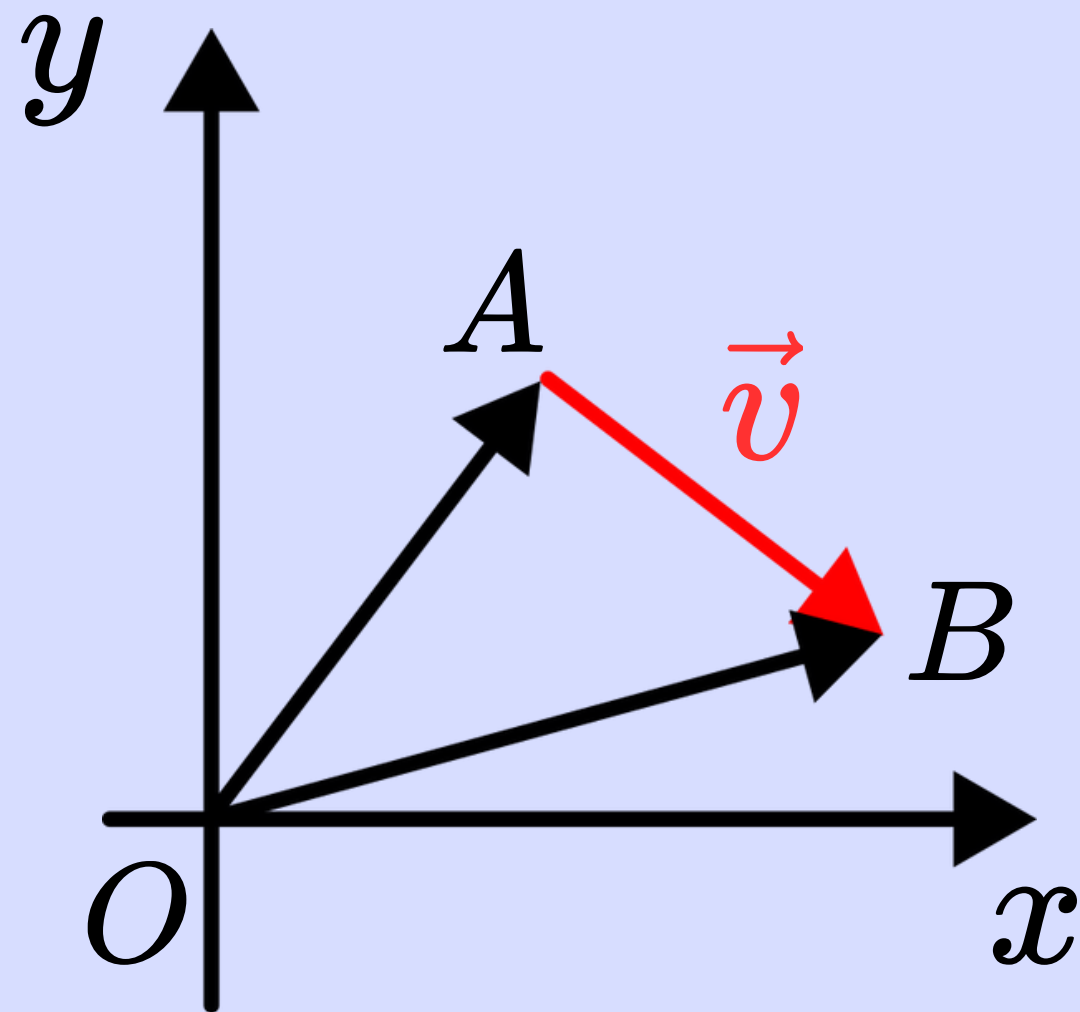


$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$$

Vetor definido por dois pontos

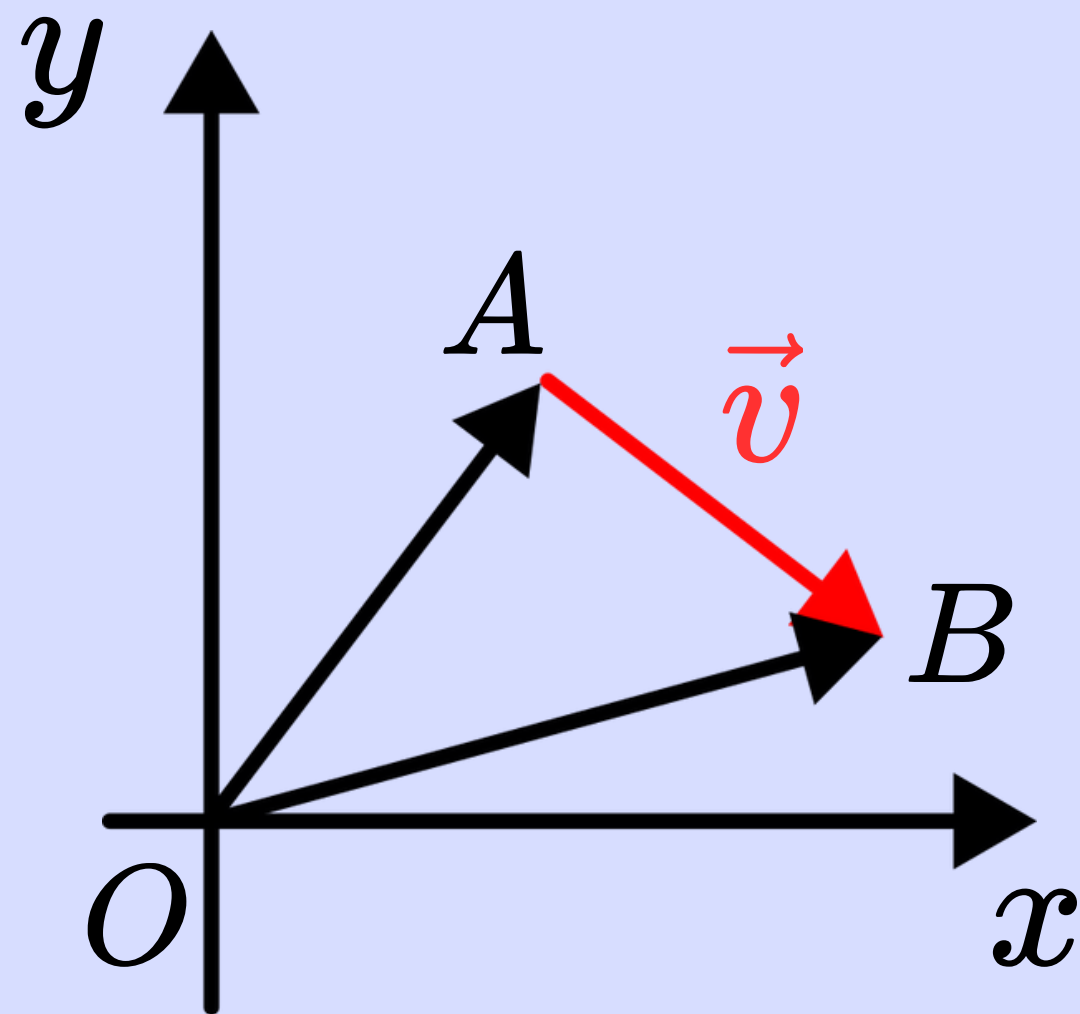
- Seja um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. Dessa forma, temos as expressões analíticas



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Vetor definido por dois pontos

- Seja um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. Dessa forma, temos as expressões analíticas

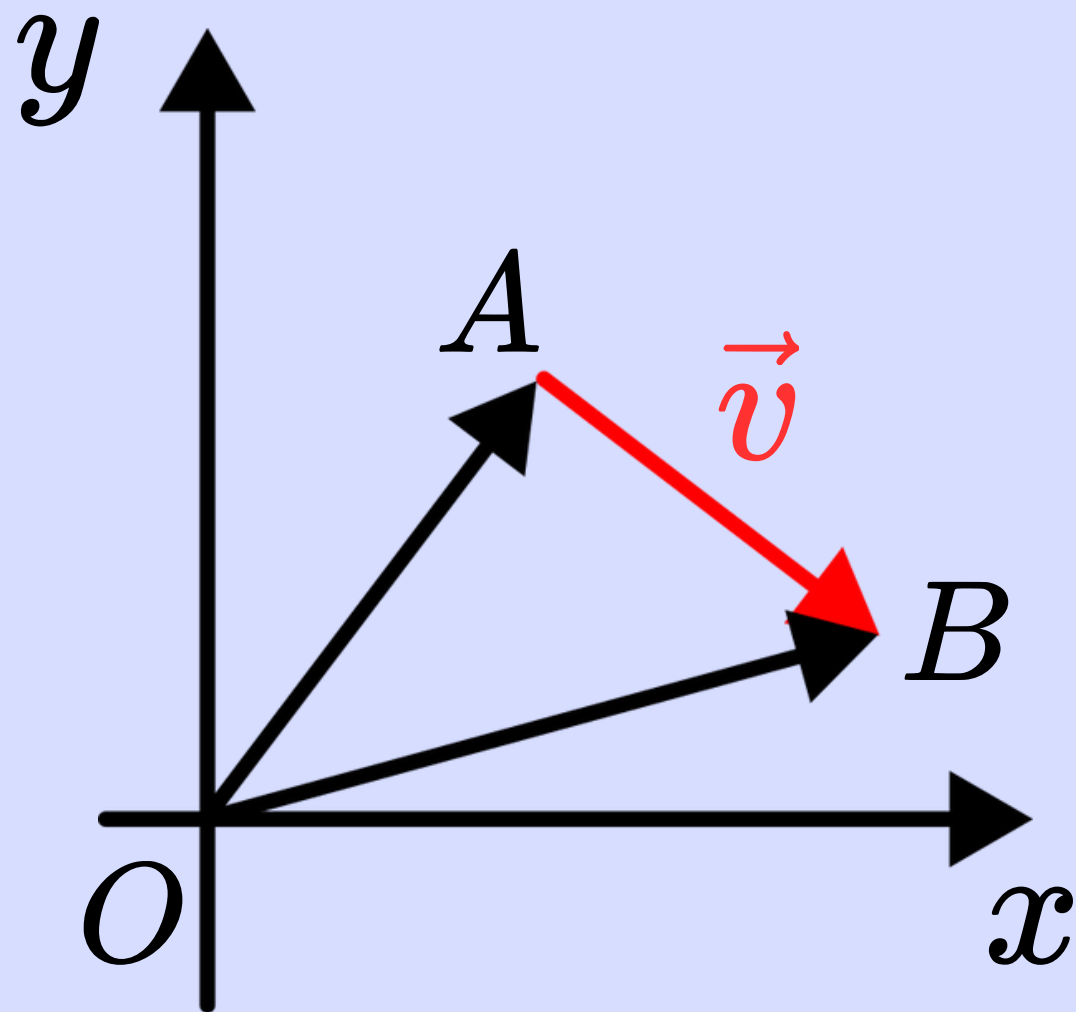


$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Vetor definido por dois pontos

- Seja um vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$. Dessa forma, temos as expressões analíticas



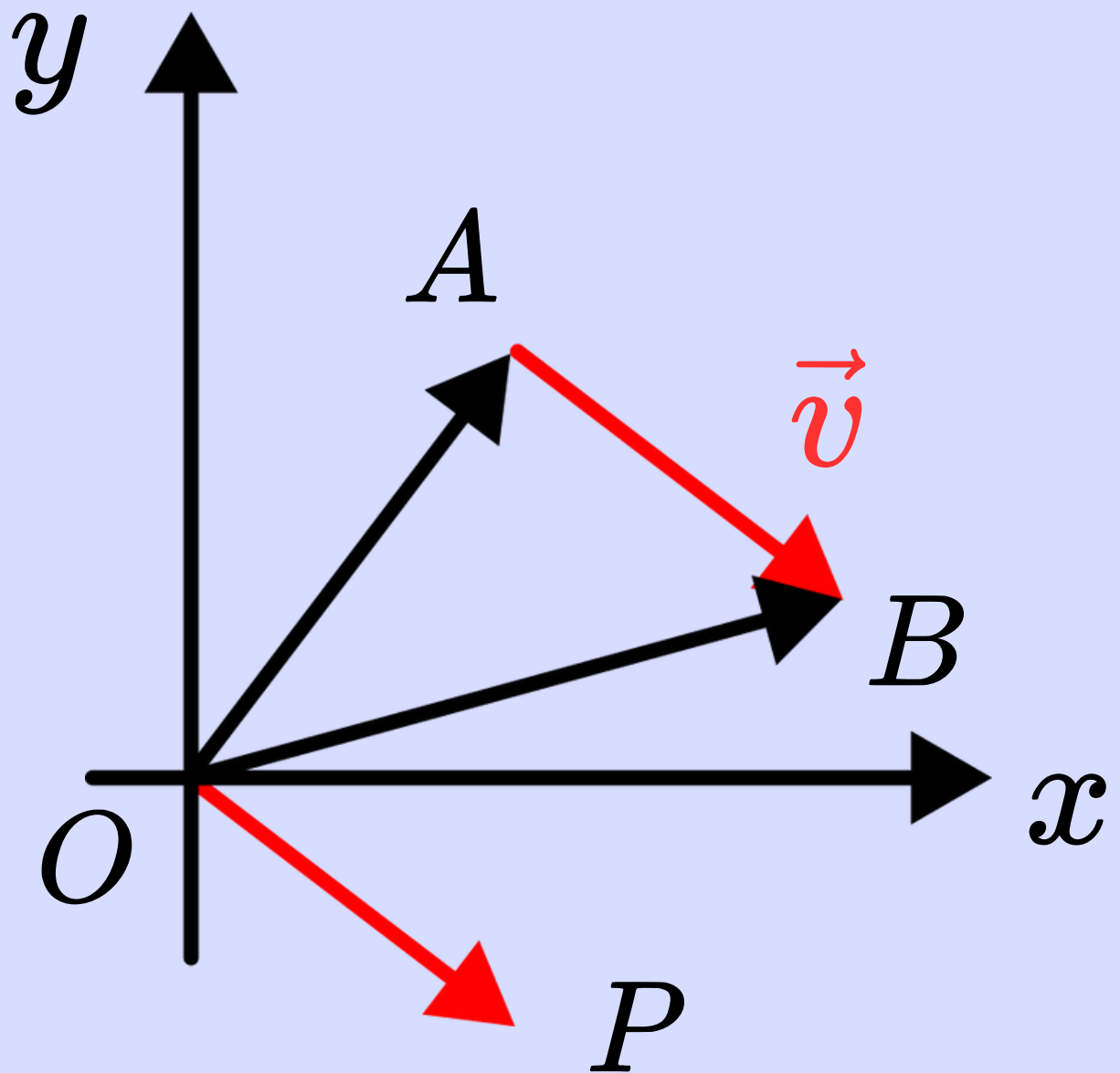
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Vetor definido por dois pontos

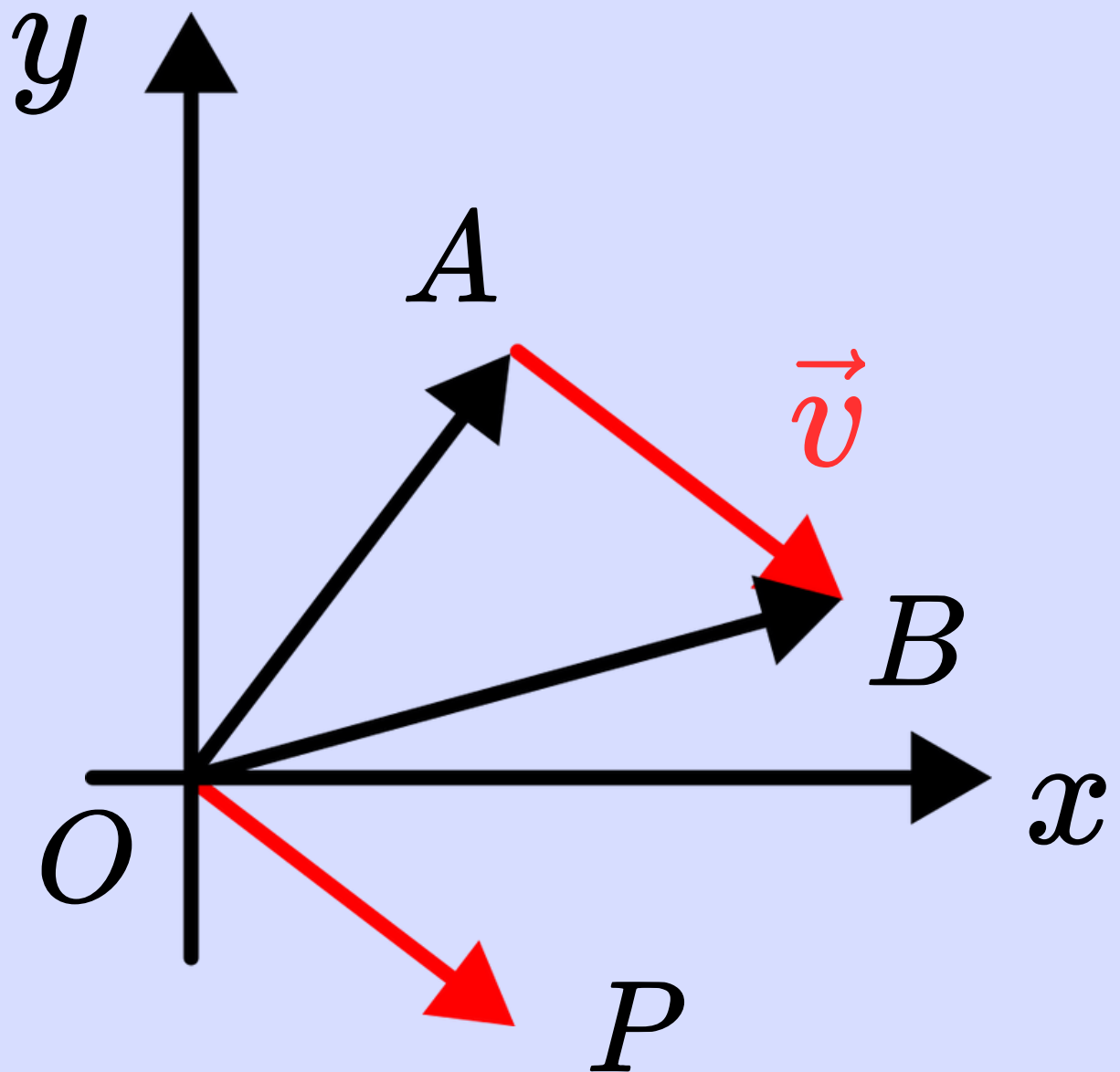
- As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ calculadas pela diferença $B - A$ são sempre equivalentes às componentes do representante OP com início na origem



Vetor definido por dois pontos

- As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ calculadas pela diferença $B - A$ são sempre equivalentes às componentes do representante OP com início na origem

Os segmentos AB e OP são **equipolentes**



Vetor definido por dois pontos

- **Exemplo:** Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determinar $D(x,y)$ de modo que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

Vetor definido por dois pontos

- **Exemplo:** Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determinar $D(x,y)$ de modo que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$D \left(0, \frac{5}{2} \right)$$

Decomposição no espaço

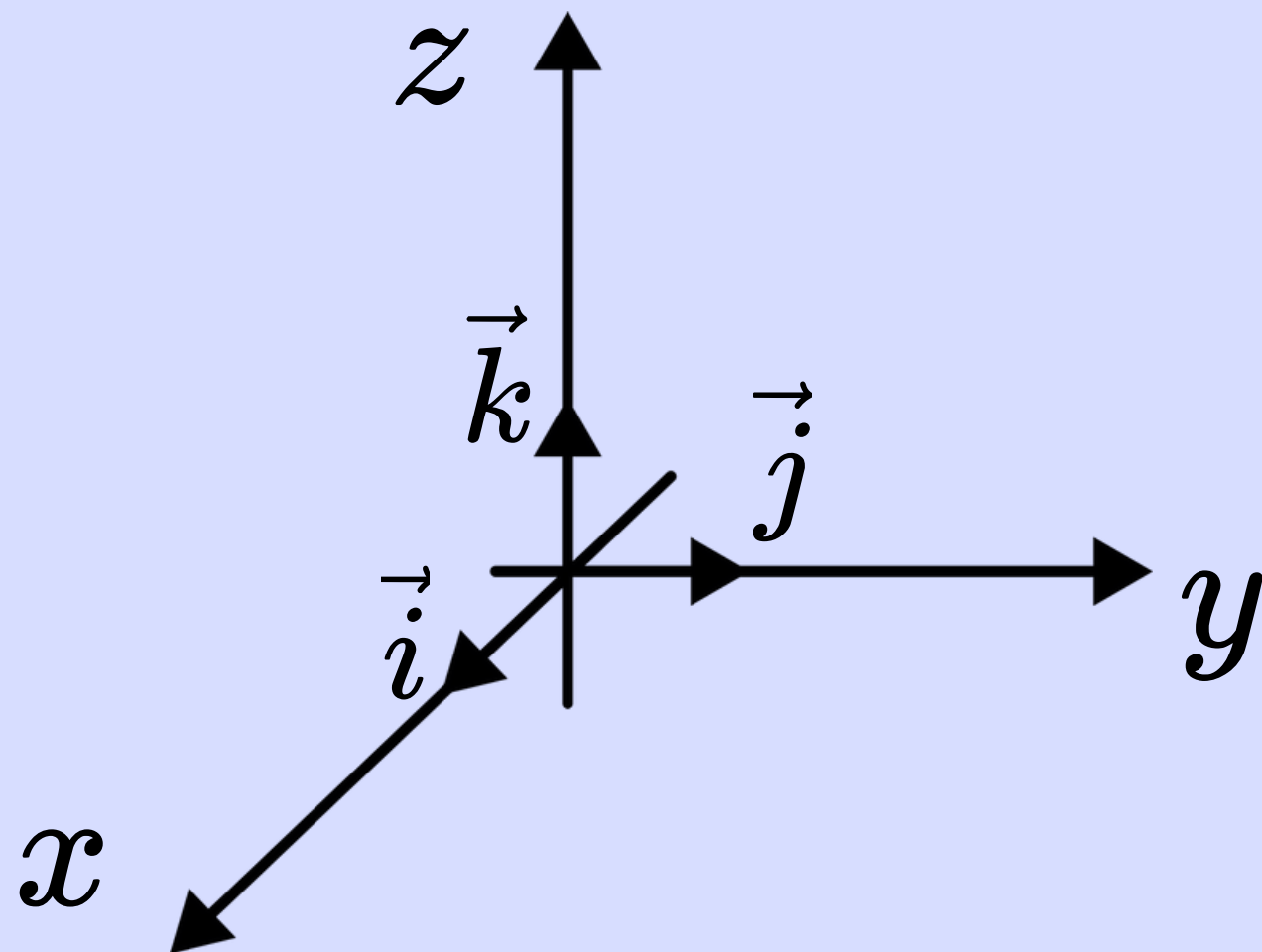
- No **espaço**, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de três vetores **não coplanares** pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de base, isto é,

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$$

com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sendo as componentes do vetor em relação à base considerada.

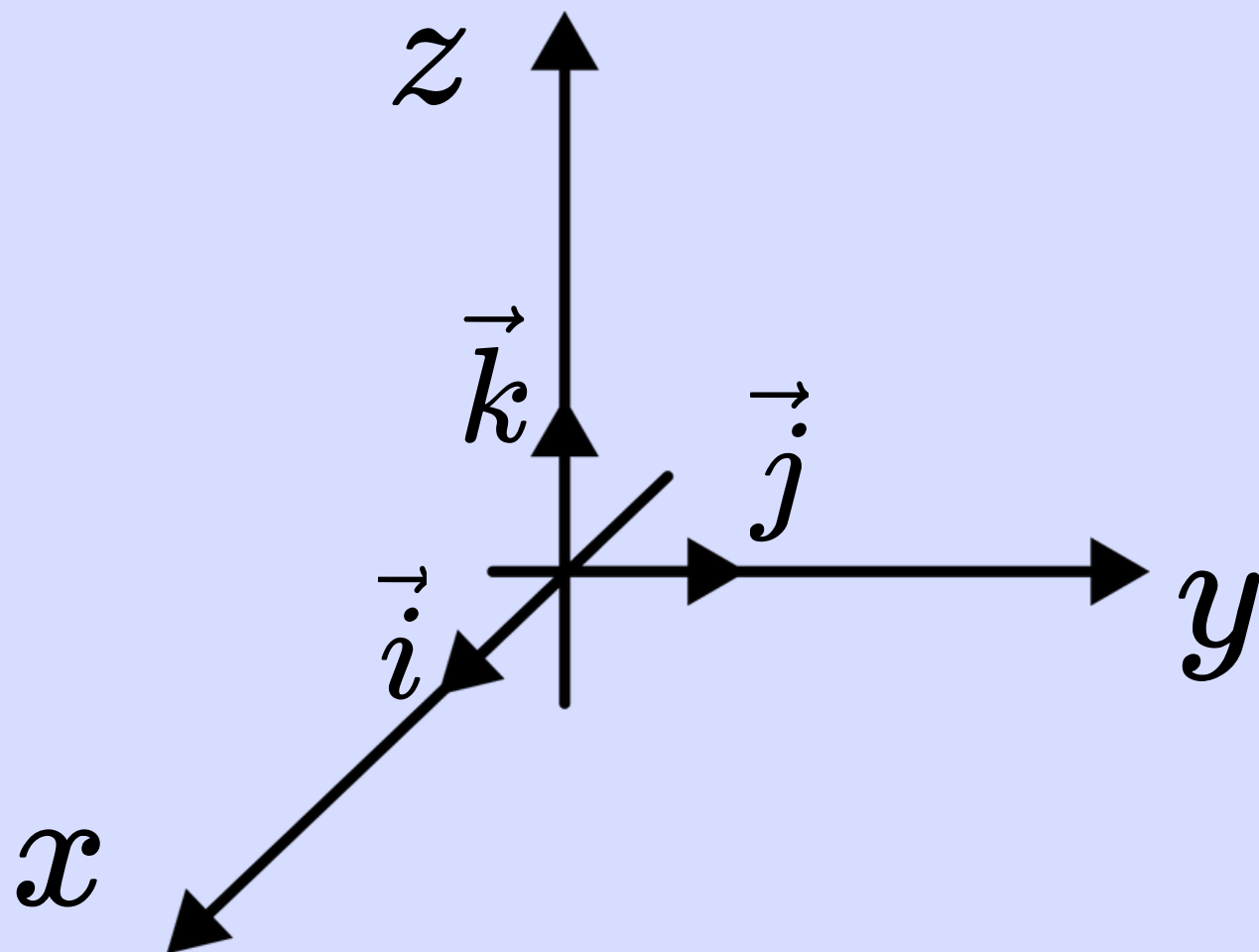
Decomposição no espaço

- Uma base no espaço é **ortonormal** se os três vetores forem unitários e ortogonais dois a dois.
 - Dentre as infinitas bases ortonormais existentes, vamos utilizar a **base canônica**, representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



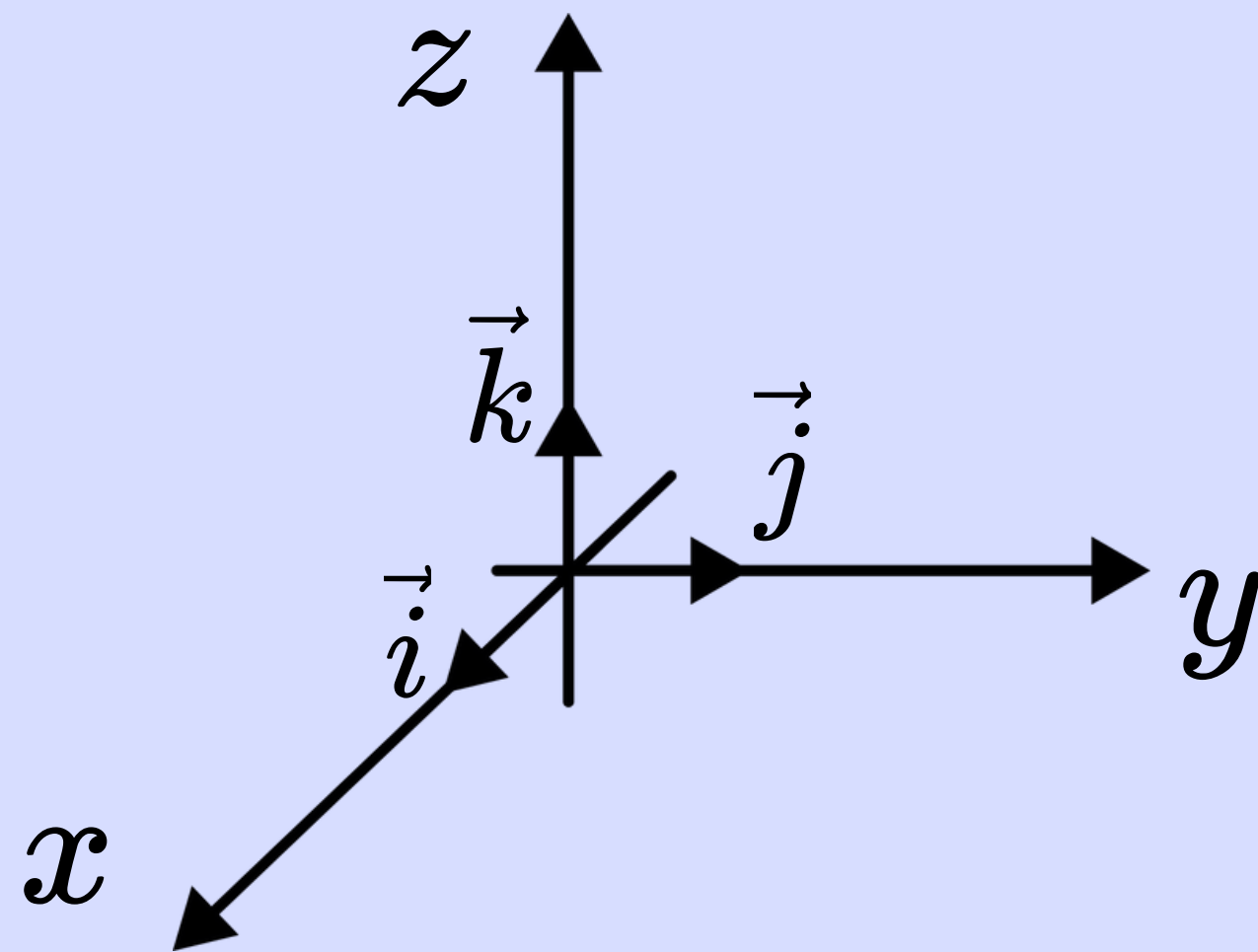
Decomposição no espaço

- Uma base no espaço é **ortonormal** se os três vetores forem unitários e ortogonais dois a dois.
 - Dentre as infinitas bases ortonormais existentes, vamos utilizar a **base canônica**, representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



Os eixos são chamados de **eixos coordenados**

Decomposição no espaço



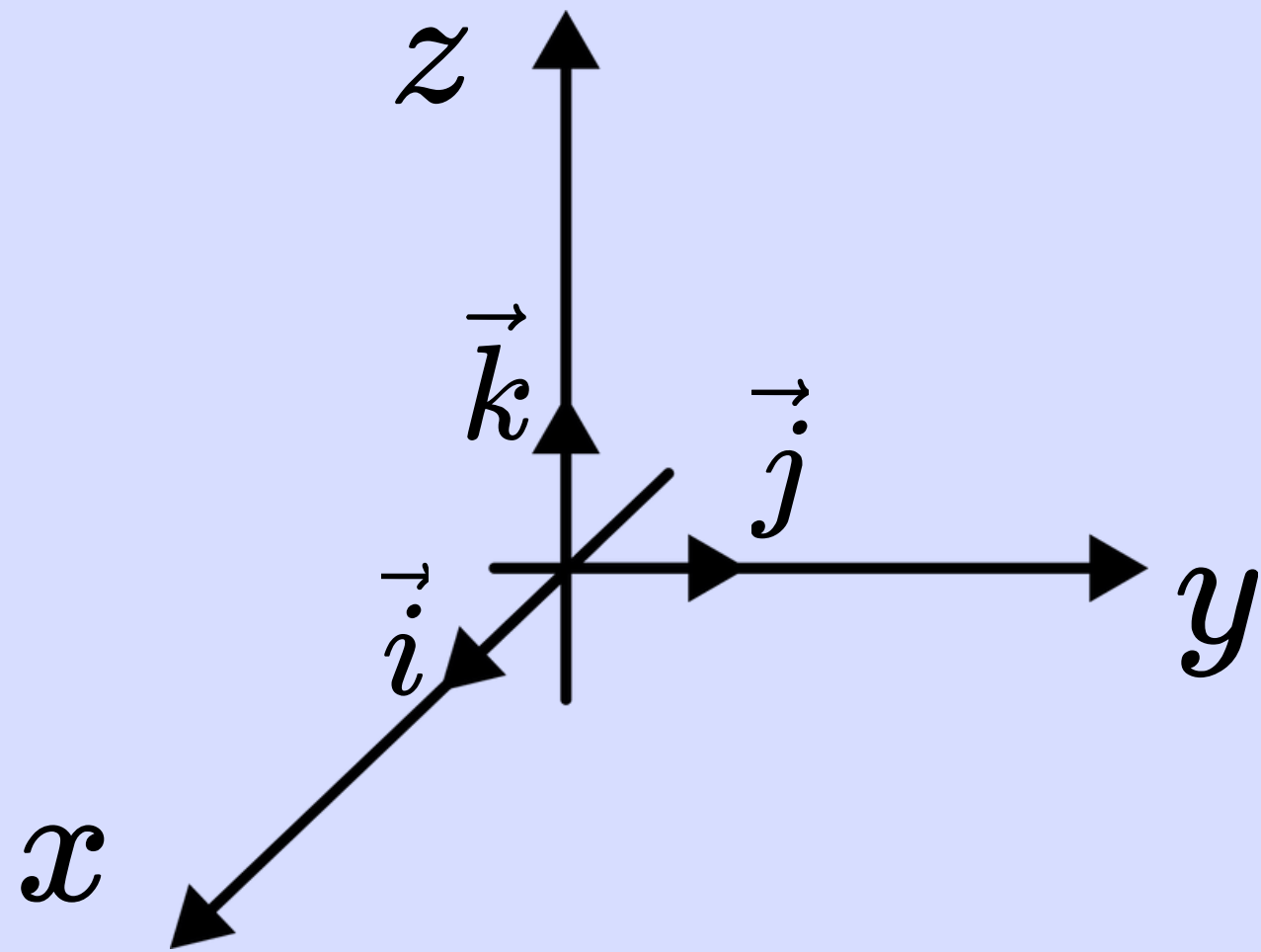
- Cada dupla de eixos determina um plano coordenado

- Há três planos:

$$\begin{cases} xOy \\ xOz \\ yOz \end{cases}$$

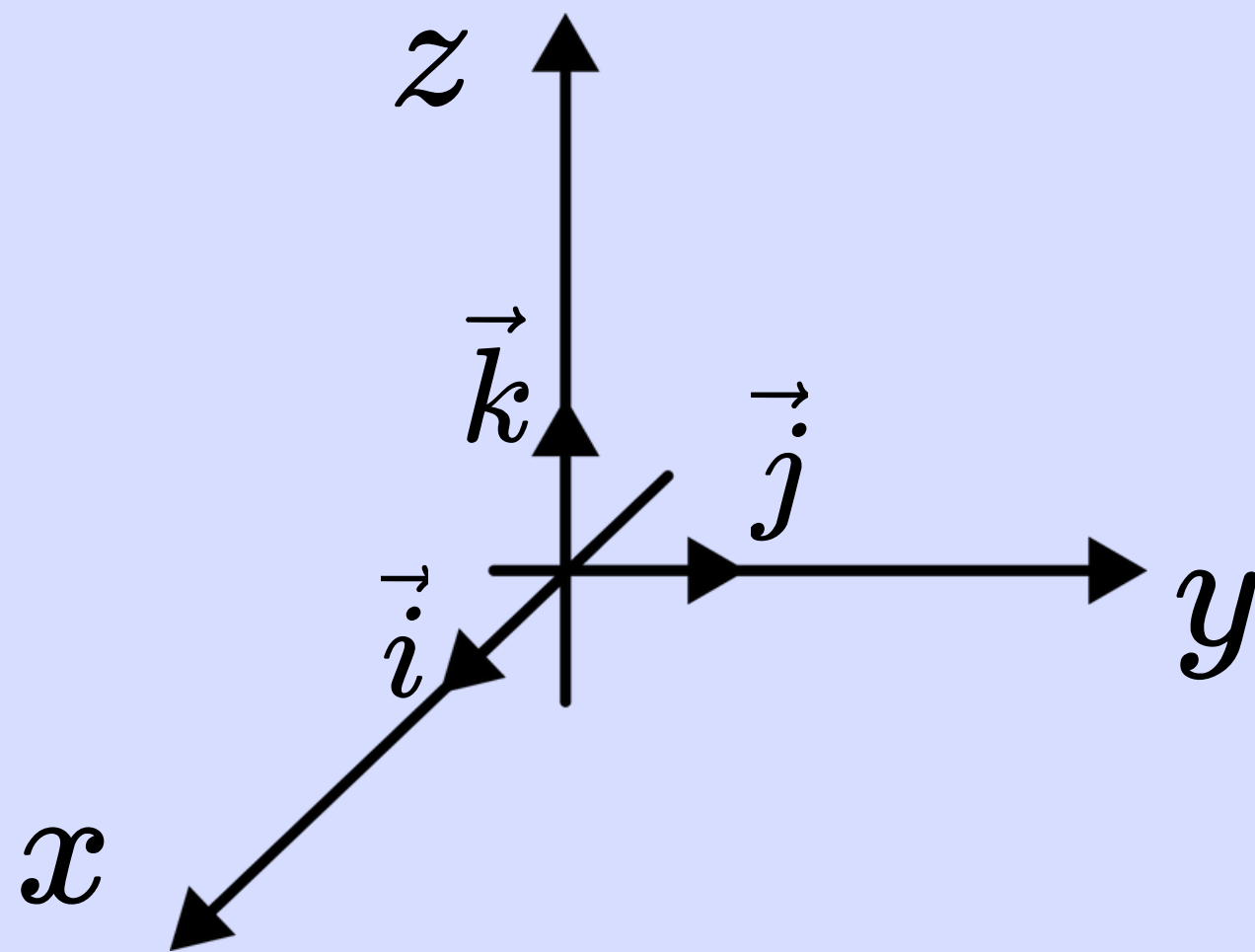
Esses três planos se interceptam segundo os três eixos dividindo o espaço em oito regiões, os **octantes**.

Decomposição no espaço



- Cada ponto P do espaço vai corresponder a uma terna (a,b,c) de números reais. Esta terna é denominada **coordenadas** de P .

Decomposição no espaço



- Na base canônica, um vetor no espaço é escrito por

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Assim como vimos para o plano, isto é equivalente a escrever

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

Decomposição no espaço

- Exemplos

- $\vec{i} =$

- $\vec{j} =$

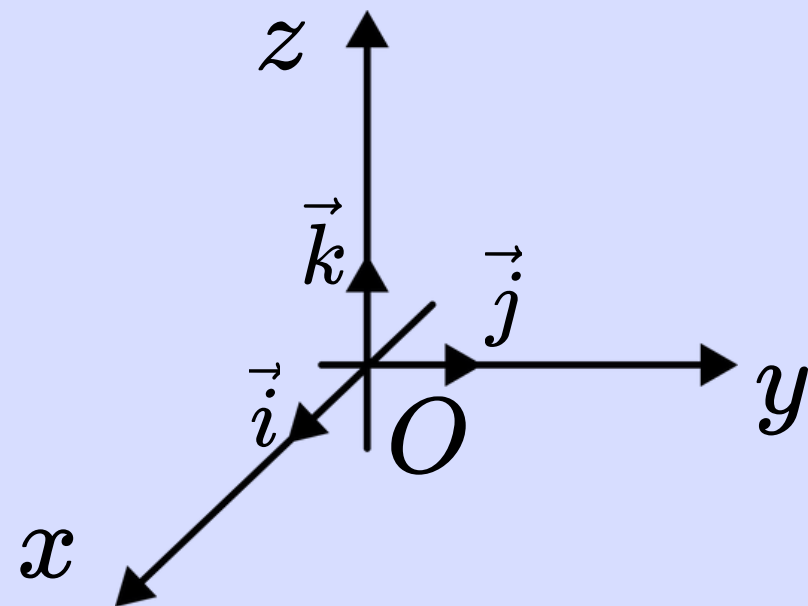
- $\vec{k} =$

- $2\vec{j} - \vec{k} =$

- $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} =$

Decomposição no espaço

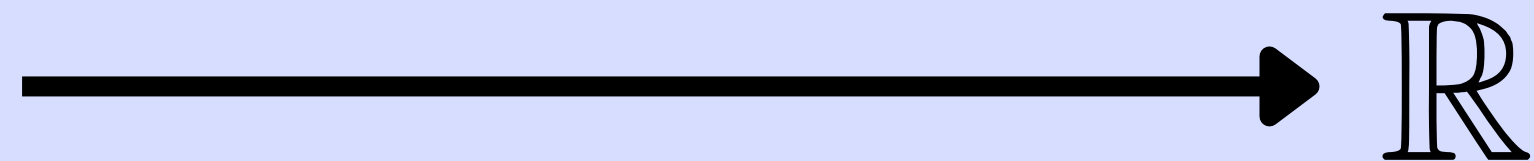
- O conjunto formado por um ponto e uma base constitui um **sistema referencial**.
 - Em nosso caso, temos o conjunto formado pelo ponto O e pela base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e ele é denominado **referencial ortonormal de origem O** ou **sistema cartesiano ortonormal $Oxyz$** . Este sistema é representado por



$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Decomposição no espaço

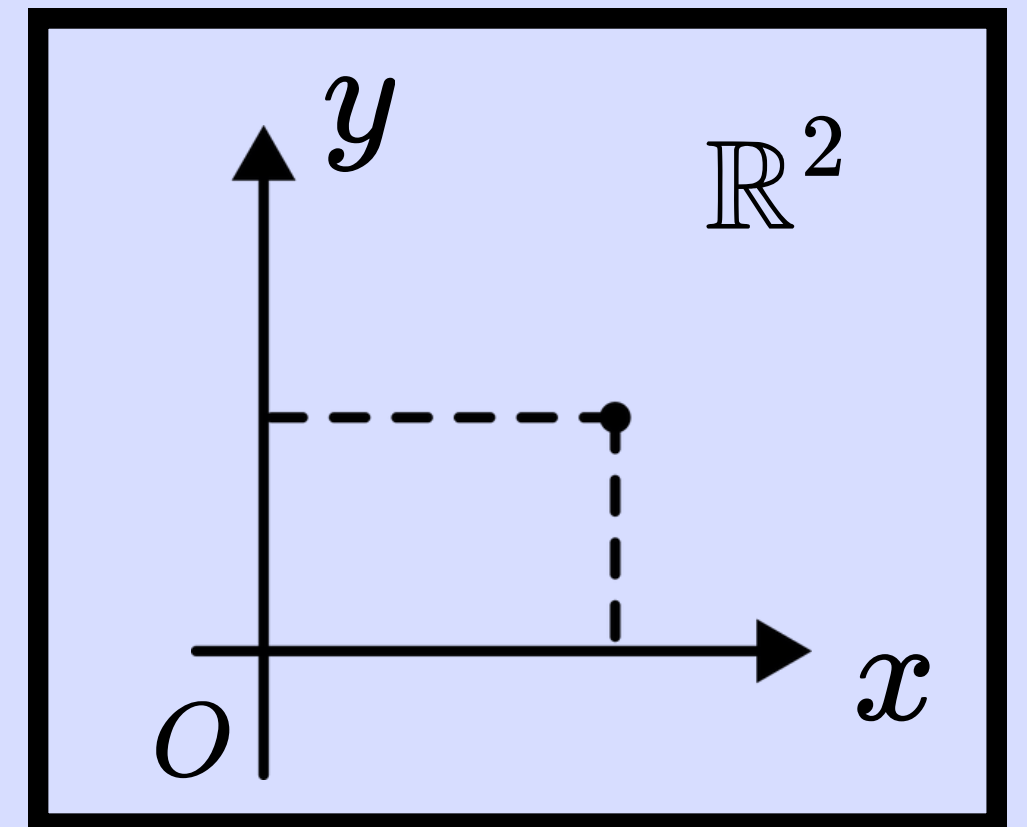
- A representação geométrica do conjunto dos reais é uma **reta**



- O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, é o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

e sua representação é o **plano cartesiano**.

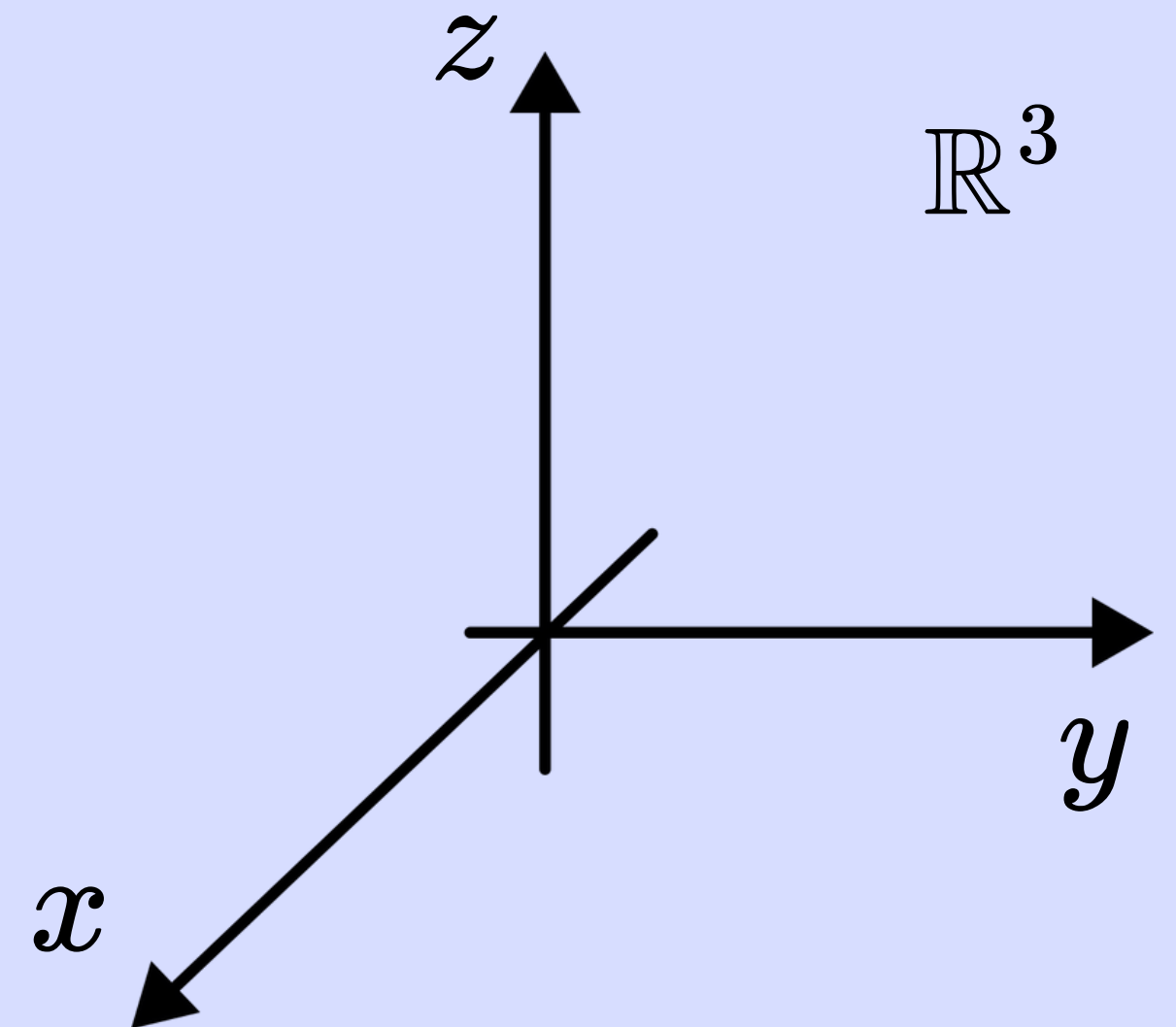


Decomposição no espaço

- O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, é o conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e sua representação é o **espaço cartesiano**.



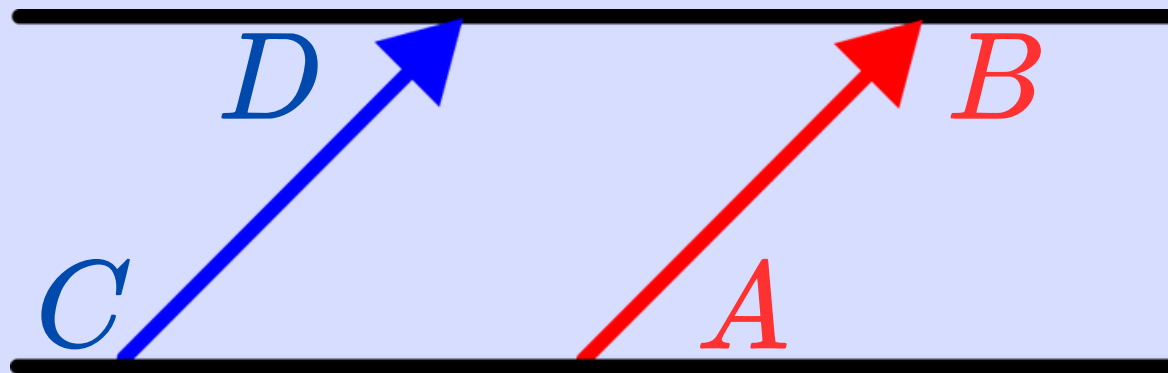
Igualdade

- Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se e somente se

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

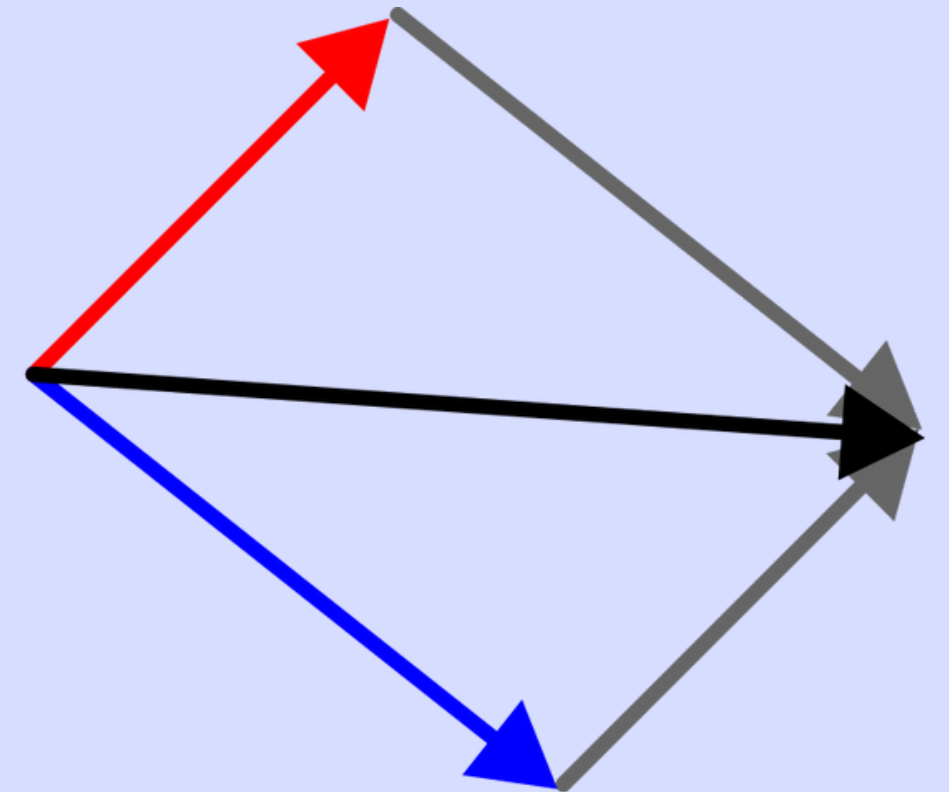


Operações

- Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$ define-se

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

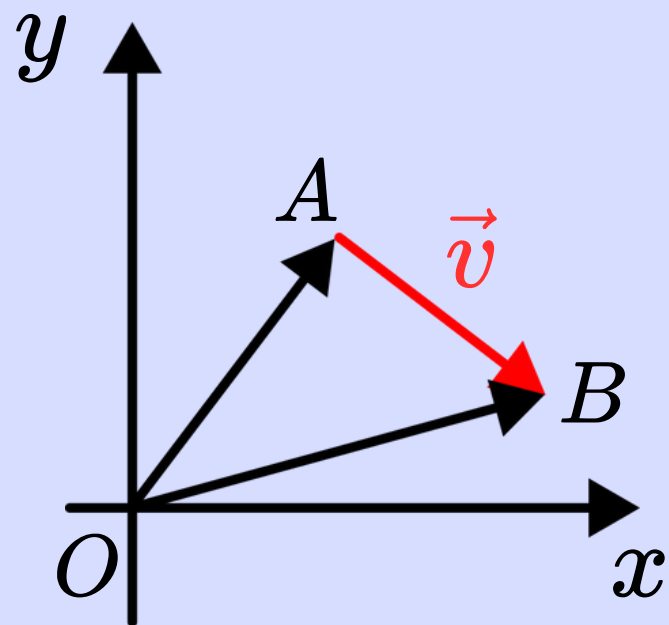
- $a\vec{u} = (ax_1, ay_1, az_1)$



Vetor definido por dois pontos

- Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Condição de paralelismo de dois vetores

- Vimos que se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou **paralelos**), existe um número k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$ o que leva a condição de paralelismo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Mostrar que $\vec{u} = (-2, -3, -4)$ e $\vec{v} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$ são paralelos.

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dados os pontos $A(0, 1, -1)$ e $B(1, 2, -1)$, e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem números reais a_1, a_2, a_3 tal que

$$\vec{w} = a_1 \overrightarrow{AB} + a_2 \vec{u} + a_3 \vec{v}$$

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dados os pontos $A(0, 1, -1)$ e $B(1, 2, -1)$, e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem números reais a_1, a_2, a_3 tal que

$$\vec{w} = a_1 \overrightarrow{AB} + a_2 \vec{u} + a_3 \vec{v}$$

$$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = -1$$

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dados os pontos $P(1, 2, 4)$, $Q(2, 3, 2)$ e $R(2, 1, -1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P , Q , R e S sejam vértices de um paralelogramo.

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dados os pontos $P(1, 2, 4)$, $Q(2, 3, 2)$ e $R(2, 1, -1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P , Q , R e S sejam vértices de um paralelogramo.

$$S(1, 0, 1)$$

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores

$$\vec{u} = (m + 1, 3, 1)$$

$$\vec{v} = (4, 2, 2n - 1)$$

sejam paralelos.

Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores

$$\vec{u} = (m + 1, 3, 1)$$

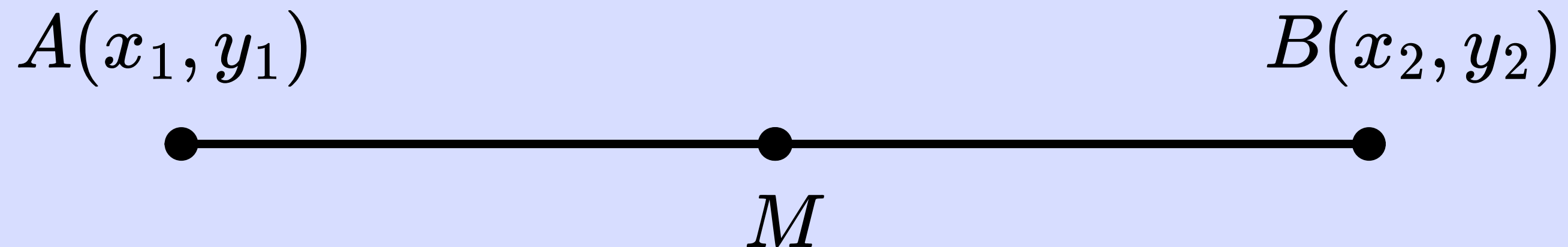
$$\vec{v} = (4, 2, 2n - 1)$$

sejam paralelos.

$$m = 5, n = \frac{5}{6}$$

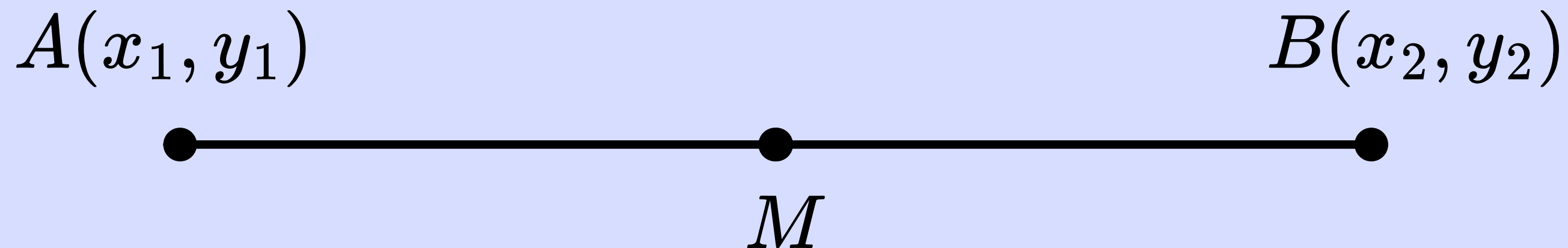
Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dar as expressões das coordenadas do ponto médio do segmento de reta de extremidades



Condição de paralelismo de dois vetores

- **Exemplo:** Dar as expressões das coordenadas do ponto médio do segmento de reta de extremidades



$$M \left(\frac{x_1 + x_1}{2}, \frac{y_1 + y_1}{2} \right)$$