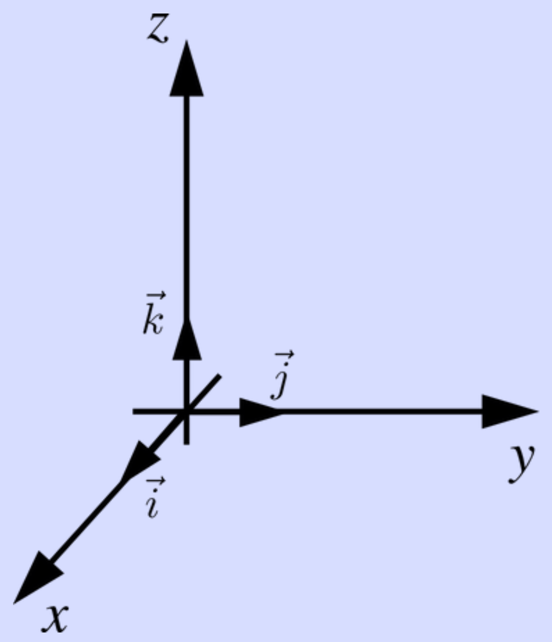
Dependência linear

https://mmugnaine.github.io/eel/teaching/GA



- CAMARGO, Ivan ; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

Dependência linear

- Sejam $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ vetores no espaço euclidiano, com $n \geq 1$, e os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Chama-se **combinação linear** dos vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \ldots + \alpha_n \vec{v_n}$$

Dependência linear

- Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vetores no espaço euclidiano, com $n \geq 1$, e os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Chama-se **combinação linear** dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Também podemos dizer que $\vec{u}$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Dependência linear

- A partir da definição, temos que o **vetor nulo** é gerado por $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ quaisquer que sejam estes vetores. De fato,

$$\vec{0} = 0\vec{v_1} + 0\vec{v_2} + \ldots + 0\vec{v_n}$$

Dependência linear

- **Proposição 1:** Uma sequência $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, com $n \geq 2$, é **linearmente dependente (LD)** se e somente se algum vetor da sequência for gerado pelos demais

- **Corolário 1:** a sequência $(\vec{u}, \vec{v})$ é **LD** se, e somente se, existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou existe β real tal que $\vec{v} = \beta\vec{u}$.
Além disso, se $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$, existe $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ tal que $\alpha = 1/\beta$

Dependência linear

- **Proposição 2:** Uma sequência $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, de vetores é **linearmente independente** se e somente se a equação

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \ldots + x_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **apenas** admite a solução trivial, isto é,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Dependência linear

- **Corolário 2:** Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é **LI** e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **LD**, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

- **Corolário 3:** Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é **LI**, então todo vetor no espaço é gerado por uma combinação linear destes vetores, isto é

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

Dependência linear

- **Exemplo:** As bases canônicas são **LI.**

- **Exemplo:** Os vetores abaixo são linearmente dependentes?

$$\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

Base

- **Definição:** Chama-se **base** de um espaço tridimensional qualquer tripla ordenada de vetores deste espaço linearmente independentes.

  - Em outras palavras, um conjunto $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de vetores de um espaço será base desse espaço se
    - $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é linearmente independente
    - Todo vetor no espaço é uma combinação linear dos vetores da base

Base

- Sendo assim, temos que para todo vetor pertencente ao espaço, existem escalares a_1, a_2, a_3 , tais que

$$\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$$

Base

- Conjunto de vetores **LD não** formam base
  - Para identificar se vetores são **LD** ou **LI**, usamos as seguintes proposições

Proposição 1: Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são **LD** se e somente se as componentes x_1, y_1, z_1 são proporcionais a x_2, y_2, z_2

Base

Proposição 2: Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ são **LI** se e somente se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemplos

Exemplo 1: Verificar se os vetores são **LI** ou **LD**

- $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$
- $\vec{u} = (1, 7, 1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $\vec{u} = (1, -1, 2),\ \vec{v} = (0, 1, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 11)$

Exemplos

Exemplo 2: Seja uma base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, mostrar que os vetores

$$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$$

$$\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

formam uma base.

Exemplos

Exemplo 3: Calcular as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)$, na base

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

Exemplos

Exemplo 3: Calcular as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)$, na base

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{f}_1 - \frac{5}{4}\vec{f}_2 + \frac{7}{4}\vec{f}_3$$

Exemplos

Exemplo 4: Quais são as coordenadas de $\vec{v} = (1, 0, 0)$ em relação a base formada pelos vetores

$$\vec{\beta}_1 = (1, 1, 1)$$

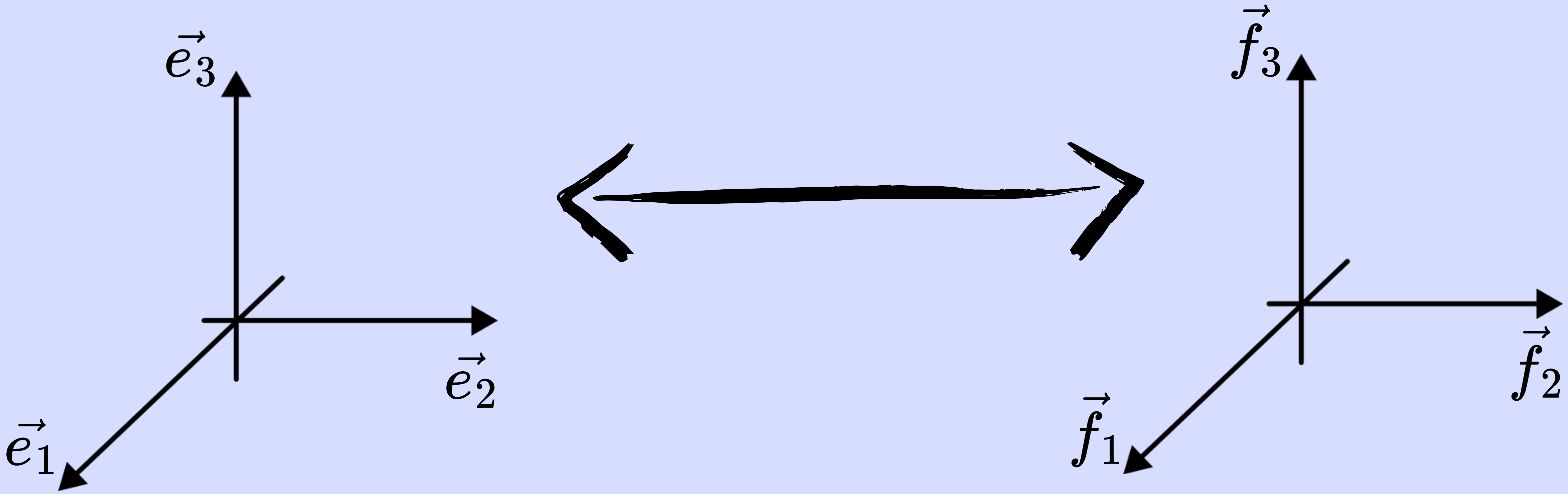
$$\vec{\beta}_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{\beta}_3 = (1, 0, -1)$$

Cada vetor é combinação linear
da base canônica

Mudança de base

- A escolha de uma **base conveniente** ajuda a resolver um problema, simplificando-o.
  - Pode ocorrer de termos um vetor definido em uma base diferente da base conveniente.
    - Precisamos saber uma relação entre as duas bases



Mudança de base

Definição: Dadas as bases $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, podemos escrever

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + a_{31}\vec{e_3}$$

$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + a_{32}\vec{e_3}$$

$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e_1} + a_{23}\vec{e_2} + a_{33}\vec{e_3}$$

Temos que a matriz mudança de base de E para F é

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Mudança de base

Exemplo: Sendo E e F bases do espaço, com

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{f}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

encontrar a matriz mudança de base de E para F.

Mudança de base

Exemplo: Sendo E e F bases do espaço, com

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{f}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

encontrar a matriz mudança de base de E para F.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mudança de base

Exemplo: A matriz de mudança de base da base E para a base F é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quais os elementos de F em termo da base E?

Mudança de base

Exemplo: A matriz de mudança de base da base E para a base F é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quais os elementos de F em termo da base E?

$$\vec{f}_1 = \vec{e_1} + \vec{e_3}, \qquad \vec{f}_2 = \vec{e_2}, \qquad \vec{f}_3 = \vec{e_1} - \vec{e_3}$$

Mudança de base

Proposição: Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ e $G = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$. Então,

$$E \xrightarrow{M} F \qquad\qquad F \xrightarrow{N} G$$

$$E \xrightarrow{MN} G$$

Mudança de base e matriz inversa

Proposição: Se $E \xrightarrow{M} F$, então $F \xrightarrow{M^{-1}} E$.