Sistema de coordenadas cartesianas

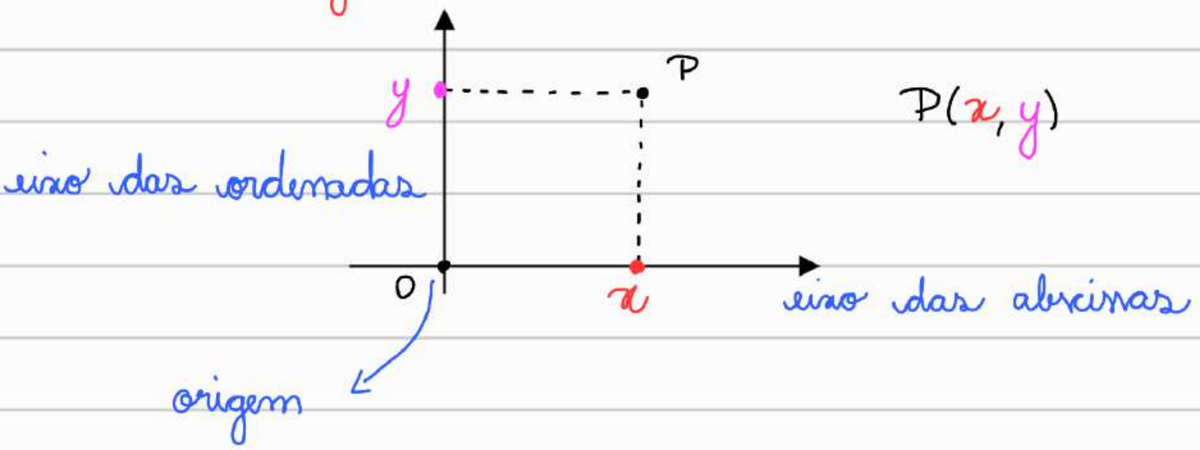
• Podemos estabelecer a localização de pontos em um espaço especificando números reais como suas coordenadas.

→ Para um caso 2D, precisamos de 2 números reais, para o caso 3D, 3 números, e assim por diante.

• O sistema de coordenadas mais utilizado é o sistema de coordenadas cartesianas.

→ Este sistema tem por base duas retas perpendiculares, onde uma reta é considerada horizontal e a outra, vertical.

→ O ponto onde estas duas retas se interseccionam é a origem do sistema



$P(x, y)$

Valor absoluto

Seja x um número real, definimos o módulo (ou valor absoluto) de x por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $|x| \geq 0$ para todo número x real.

Matrizes

Uma matriz é um conjunto de números dispostos em forma de tabela, distribuídos em m linhas e n colunas.

→ Cada número na matriz é denominado <u>elemento</u>.

• Representação

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{linha } 1 \\ \to \text{linha } 2 \\ \vdots \\ \to \text{linha } m-1 \\ \to \text{linha } m \end{array}$$

coluna n

coluna $n-1$

coluna 2

coluna 1

→ Elementos

a_{ij}

coluna

linha

→ Tipos de matrizes

1) Matriz quadrada: número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 9 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Matriz nula: todo elemento é nulo, isto é $a_{ij} = 0$ para todo i e j.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Matriz coluna: possui apenas uma coluna

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4) Matriz linha: possui apenas uma linha

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$$

5) Matriz diagonal: matriz quadrada onde os elementos "fora" da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$$

6) Matriz identidade: matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Matriz triangular superior: matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Matriz triangular inferior: matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

9) Matriz simétrica: matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

→ Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ apenas se: $a = x$, $b = y$, $c = z$ e $d = w$

→ Operações com matrizes

• Adição: a soma de duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ é uma matriz, também $m \times n$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de A e B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{pmatrix}$$

→ Propriedades

1) Comutatividade: $A + B = B + A$
2) Associatividade: $(A+B) + C = A + (B+C)$
3) Matriz nula: $A + 0 = A$, com 0 sendo uma matriz nula da mesma ordem de A.

• Multiplicação por escalar: dado um número real K e uma matriz A, o produto de K por A é uma matriz da mesma ordem de A obtida pela multiplicação de cada elemento de A por K.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & a \\ y & z & b \\ 0 & w & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 0 & 3a \\ 3y & 3z & 3b \\ 0 & 3w & 3d \end{pmatrix}$$

→ Propriedades

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e os números reais K, K_1 e K_2, temos as seguintes propriedades

1) $K(A+B) = KA + KB$

2) $(K_1 + K_2)A = K_1A + K_2A$

3) $0 \cdot A = 0$: se multiplicarmos uma matriz pelo número 0, o resultado é a matriz nula.

4) $K_1(K_2A) = (K_1K_2)A$

• Transposição: dada uma matriz A, de ordem $m \times n$, podemos obter uma outra matriz, A' ou A^T, de ordem $n \times m$, cujas linhas são as colunas de A. A' é denominada matriz transposta de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

• Multiplicação de matrizes: o produto das matrizes A (de ordem $m \times p$) e B (de ordem $p \times n$) é a matriz C, de ordem $m \times n$, em que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \\ ex + fz & ey + fw \end{pmatrix}$$

• Só podemos efetuar o produto de duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

→ Propriedades

1) Em geral $AB \neq BA$
2) É possível que $AB = 0$ sem que $A = 0$ ou $B = 0$
3) $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade
4) $A(B+C) = AB + AC$
5) $(A+B)C = AC + BC$
6) $(AB)' = B'A'$
7) $A.0 = 0$, $0.A = 0$

→ Determinantes

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada A representado por $\det A$ ou $|A|$.

• Determinante de 1ª ordem: seja uma matriz $A = (a_{11})$, seu determinante é o número real a_{11}.

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}$$

NÃO É MÓDULO

• Determinante de 2ª ordem: seja a matriz de segunda ordem

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

seu determinante é

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

• <u>Determinante de 3ª ordem</u>: seja a matriz de terceira ordem

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

seu determinante é calculado pela regra de Sarrus.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right. = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$