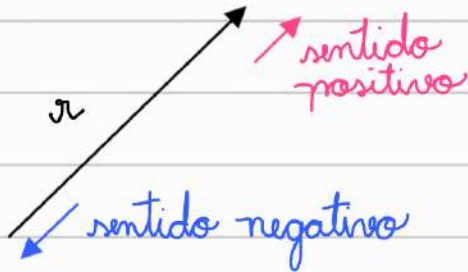


Aula 1 - Vetores

1) Reta orientada

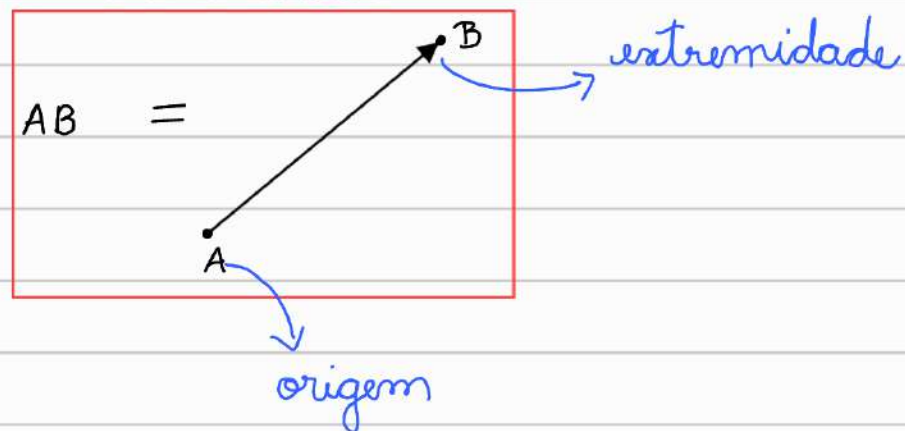
Uma reta r é orientada quando se fixa nela um sentido que é indicado por uma seta. O sentido da reta é o sentido positivo, enquanto o oposto é negativo.



Retas orientadas também são denominadas **eixos**.

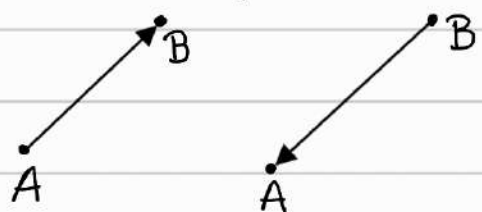
2) Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por um **par ordenado** de pontos, o primeiro chamado **origem** e o segundo chamado **extremidade**.

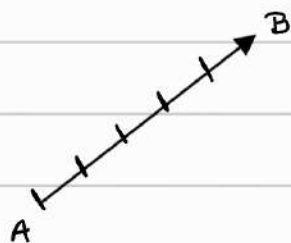


→ Segmento nulo: segmento em que a origem coincide com a extremidade

→ Segmentos opostos: se AB é um segmento orientado, o seu segmento oposto é BA



→ Medida de um segmento: definida uma unidade de comprimento, pode-se associar um número real, não negativo, a cada segmento que é a medida em relação àquela unidade. A medida do segmento também é denominada comprimento ou módulo e, referente a um segmento AB , é representada por $\overline{AB}$.

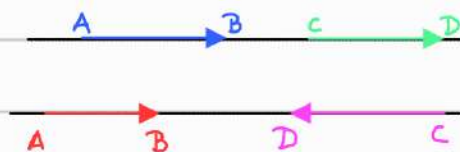
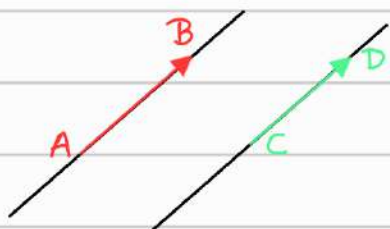


$$\overline{AB} = 5 \text{ u.c.}$$

- Segmentos nulos tem comprimento igual a zero
- $\overline{AB} = \overline{BA}$

→ Direção e sentido: a direção de um segmento é definida pela sua reta suporte.

↳ Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção se suas retas suportes são paralelas.



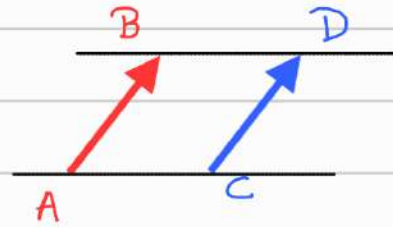
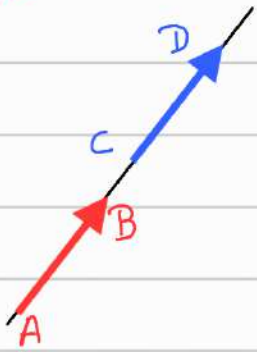
Em todos os casos, AB e CD não são paralelos.

↳ Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção

↳ Dois segmentos orientados opostos têm a mesma direção e sentidos contrários

3) Segmentos equipolentes

Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.



$$AB \parallel CD \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

- Dois segmentos nulos não sempre equipolentes.
- A equipolência dos segmentos AB e CD é representada por: $AB \sim CD$.

→ Propriedades

- Simétrica: se $AB \sim CD$, então $CD \sim AB$
- Transitiva: se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$, então $AB \sim EF$
- Dado um segmento orientado AB e um ponto C , existe um único ponto D tal que $AB \sim CD$.

4) Vetor

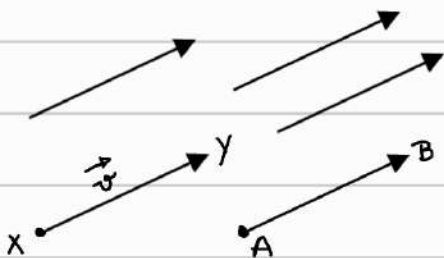
O conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado é denominado vetor.

Indicando este conjunto por $\vec{v}$, podemos definir

$$\vec{v} = \{XY \mid XY \sim AB\}$$

onde XY é um segmento qualquer do conjunto.

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$, $B-A$ ou $\vec{v}$.



• Um mesmo vetor $\vec{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes desse vetor, que não todos equipolentes entre si.

• As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é, o módulo, a direção e o sentido do vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

↳ O módulo de $\vec{v}$ é indicado por $|\vec{v}|$.

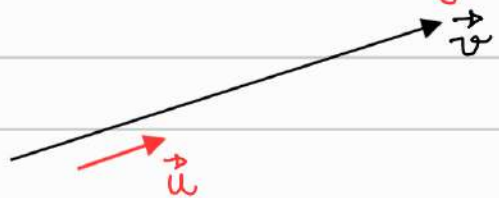
→ Vetores iguais: dois vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$

→ Vetor nulo: os segmentos nulos não todos equipolentes entre si, logo, determinam um **único** vetor, o vetor nulo indicado por $\vec{0}$.

→ Vetores opostos: dado um vetor $\vec{v} = \vec{AB}$, o vetor $\vec{BA}$ é o seu oposto, indicado por $-\vec{AB}$ ou $-\vec{v}$.

→ Vetor unitário: um vetor $\vec{v}$ é unitário se $|\vec{v}| = 1$.

→ Versor: o versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor **unitário** de **mesma direção** e **mesmo sentido** de $\vec{v}$.

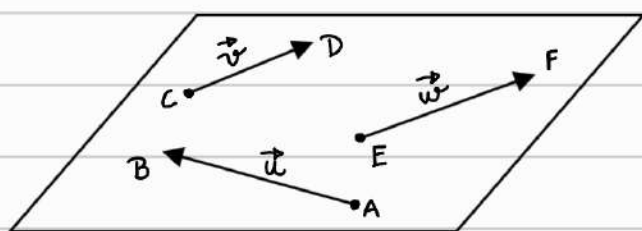


$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \parallel \vec{u} \\ |\vec{u}| = 1 \\ \vec{v} \text{ e } \vec{u} \text{ têm o mesmo sentido} \end{array} \right\} \vec{u} \text{ é versor de } \vec{v}$$

→ Vetores colineares: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se tiverem a **mesma direção** (retas suporte paralelas).



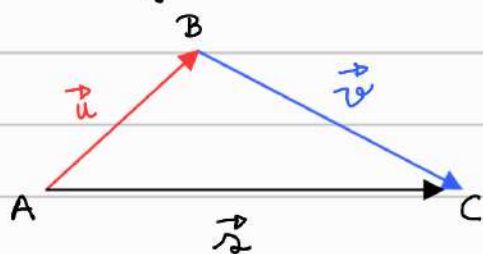
→ Vetores coplanares: os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ditos **coplanares** se todos possuem representantes AB, CD e EF pertencentes ao mesmo plano π .



• Dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sempre coplanares.

5) Operação com vetores

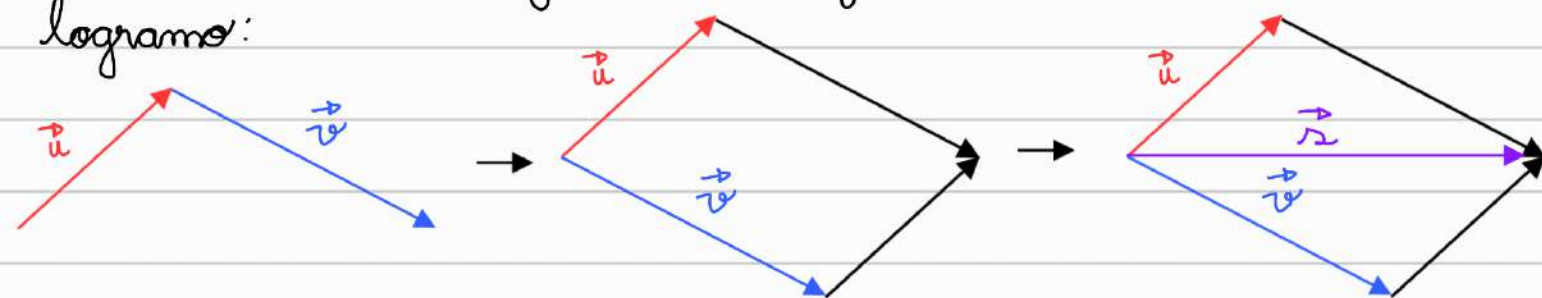
→ Adição de vetores



Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos AB e BC. Os pontos A e C determinam o vetor $\vec{s}$ que é a soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} //$$

• De forma prática, para somar vetores, colocamos eles na mesma origem e utilizamos o método do paralelogramo:



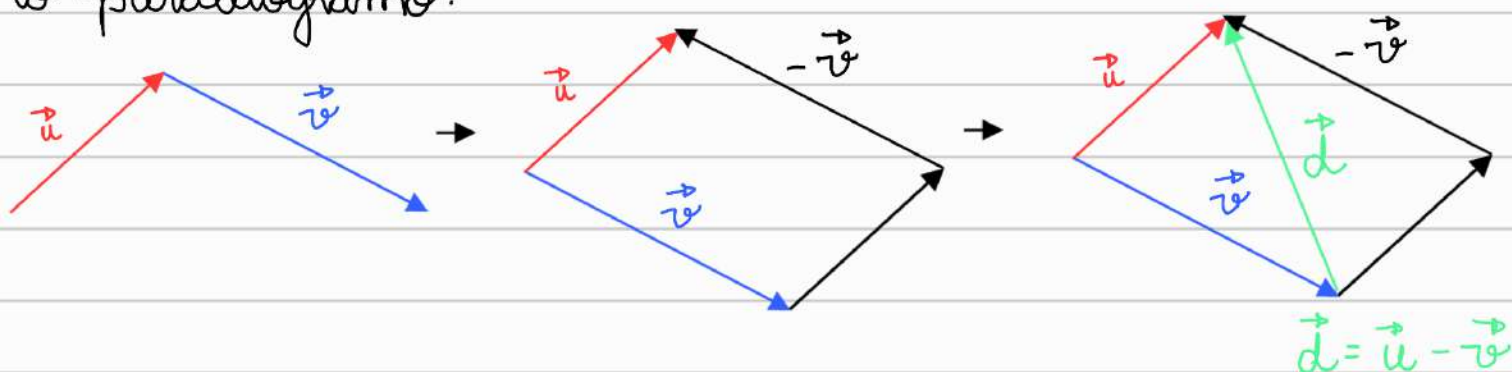
• Propriedades da adição

- 1) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- 2) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- 3) Vetor nulo: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
- 4) Vetor oposto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$

→ Diferença de vetores

A diferença entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{d}$ definido por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Para construir o vetor diferença, utilizamos novamente o paralelogramo.



→ Multiplicação por um número real

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que,

- a) módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k| |\vec{v}|$
- b) direção: não é alterada, $\vec{p} \parallel \vec{v}$
- c) sentido: o mesmo se $k > 0$, o oposto se $k < 0$

• Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $k\vec{v} = \vec{0}$

• Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares, sempre existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

- O versor de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Disto, temos que $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{u}$, isto é, o vetor $\vec{v}$ é o produto de seu módulo pelo vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

- Propriedades da multiplicação por um número real

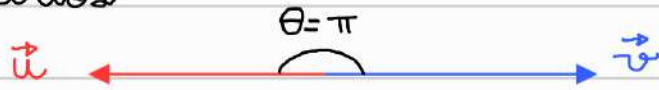
- 1) Associativa: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
- 2) Distributiva 1: $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- 3) Distributiva 2: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- 4) Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

6) Ângulo de dois vetores

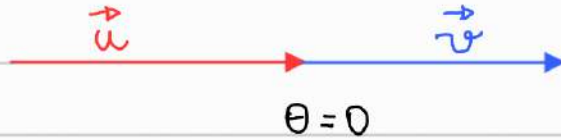
O ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$



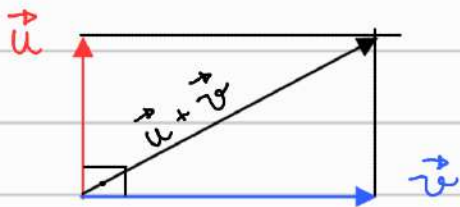
- Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos contrários



- Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e mesmo sentido

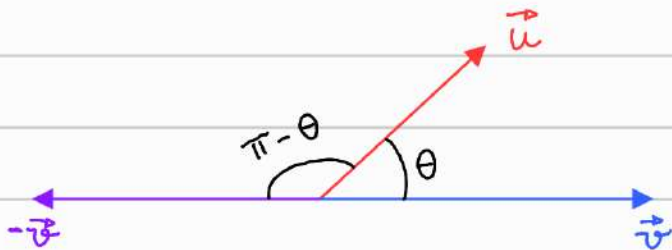


- Se $\theta = \pi/2$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

- O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor
- Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $m \in \mathbb{R}$, $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$.
- O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Anteriormente, analisamos vetores no ponto de vista geométrico onde eles eram representados por um segmento de reta orientado. Agora, vamos relacionar os vetores a eixos cartesianos do plano e do espaço.

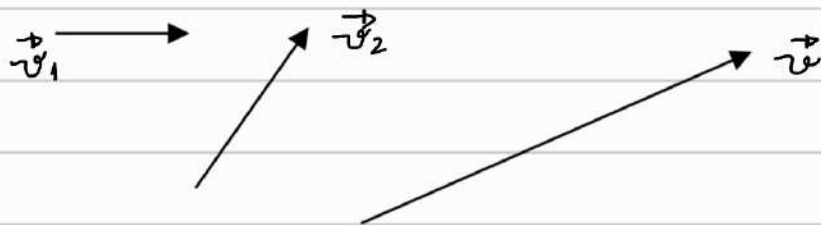
→ Decomposição de um vetor no plano

Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, **não colineares**, qualquer vetor $\vec{v}$, coplano com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Em outras palavras

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

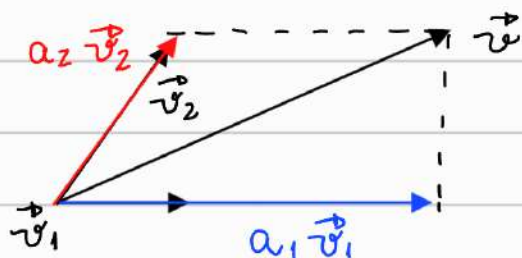
com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

• Exemplo 1: dados os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares e um vetor arbitrário $\vec{v}$, temos o seguinte:



Sendo assim, é possível colocar $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}$ com a mesma origem e formar um paralelogramo em que os lados são determinados pelos vetores

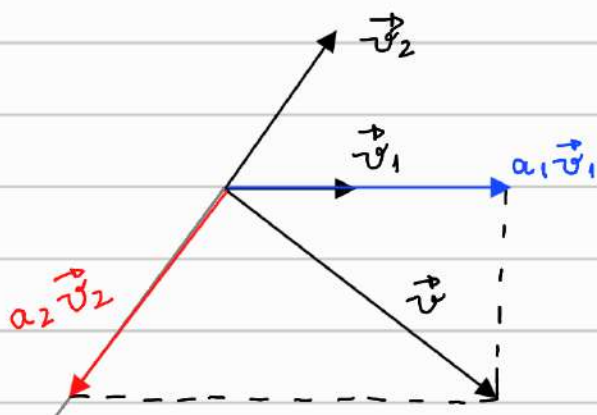
$a_1 \vec{v}_1$ e $a_2 \vec{v}_2$, logo, a soma deles é o vetor $\vec{v}$ que corresponde à diagonal desse paralelogramo.



Como vimos sobre soma de vetores

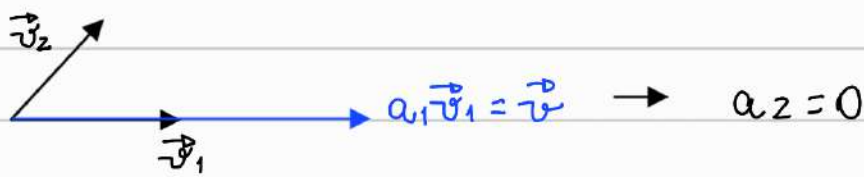
$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

• Exemplo 2: agora consideramos os mesmos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e mudamos $\vec{v}$.



Neste caso: $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$ com $a_2 < 0$.

• Exemplo 3: considerando o caso particular onde o vetor $\vec{v}$ é paralelo a um dos vetores $\vec{v}_1$ ou $\vec{v}_2$, $\vec{v}$ não será a diagonal do paralelogramo e, portanto, uma das componentes, a_1 ou a_2 , será nula.



Quando o vetor $\vec{v}$ for representado por

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

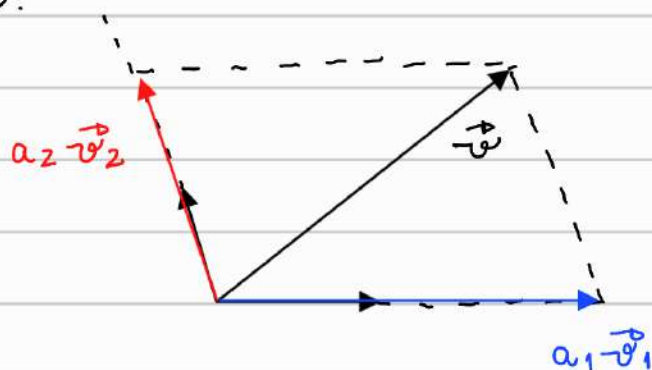
dizemos que $\vec{v}$ é uma **combinação linear** de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

↳ Um par de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não colineares, é chamado de **base** no plano.

↳ Qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano.

↳ Os números a_1 e a_2 da combinação linear são chamados de **componentes** ou **coordenadas** de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Resumindo:



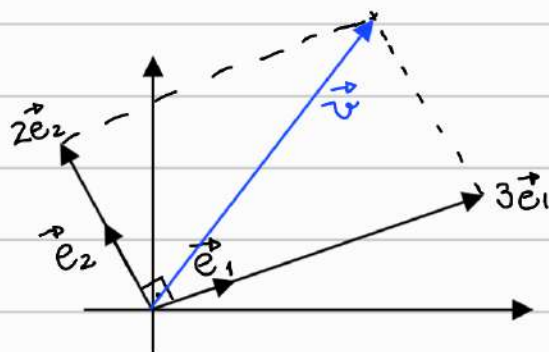
Na prática, as bases mais utilizadas são as bases **ortonormais**, isto é, os vetores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ que formam a base são **ortogonais** e **unitários**.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é ortonormal se $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

Na figura a seguir, consideramos uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, no plano xOy , e um vetor $\vec{v}$

com componentes 3 e 2, respectivamente, isto é,

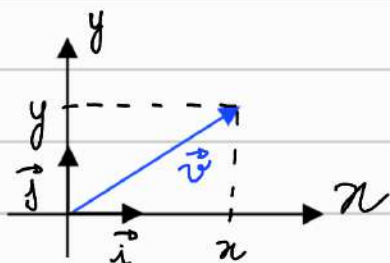
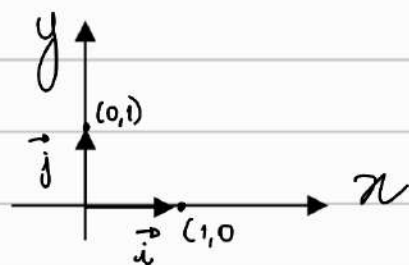
$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$



No caso de uma base ortonormal, os vetores $3\vec{e}_1$ e $2\vec{e}_2$ são projeções ortogonais de $\vec{v}$ sobre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$, respectivamente.

Existem infinitas bases ortonormais no plano xOy . Mas uma é particularmente importante e mais utilizada: a base canônica. Esta base é formada pelos vetores representados por segmentos orientados com origem O e extremidade nos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$.

↳ Simbolicamente, estes vetores são indicados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, formando a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$



$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

→ Expressão analítica de um vetor

Fixada a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os vetores do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais.

↳ a cada vetor $\vec{v}$ do plano, pode-se associar um par (x, y) de números reais que são suas componentes na base dada.

Definição: o vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais e se representa por

$$\vec{v} = (x, y)$$

que é a expressão analítica de $\vec{v}$.

A primeira componente, o x , é chamada de abscissa enquanto a componente y é denominada ordenada. De forma geral, temos que um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ pode ser escrito como $\vec{v} = (x, y)$.

• Exemplos

1) $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j} \rightarrow \vec{v} = (3, -5)$

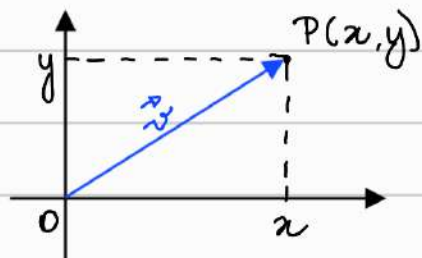
2) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \rightarrow \vec{v} = (-1, 1)$

3) $\vec{v} = 3\vec{j} \rightarrow \vec{v} = (0, 3)$

4) $\vec{v} = -10\vec{i} \rightarrow \vec{v} = (-10, 0)$

A base canônica é formada por: $\vec{i} = (1, 0)$,
 $\vec{j} = (0, 1)$

Seendo o ponto $P(x,y)$, podemos identificá-lo com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do sistema. Na base canônica, $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, onde x e y são as coordenadas de P .



→ Igualdade e operações

• Igualdade

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Assim, temos $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo: Seja $\vec{u} = (x+1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y-6)$. Quando eles serão iguais?

$$\vec{u} = \vec{v} \rightarrow \begin{cases} x+1=5 \\ 4=2y-6 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|l} x=4 \\ y=5 \end{array}$$

• Operações

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, e o escalar $a \in \mathbb{R}$. Define-se:

- a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- b) $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$

Para somar dois vetores, somamos as coordenadas correspondentes e para multiplicar por um número,

multiplicamos cada componente por este número.

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$, temos

- $\vec{u} + \vec{v} = (4, 1) + (2, 6) = (6, 7)$
- $2\vec{u} = 2 \cdot (4, 1) = (8, 2)$

A partir das definições acima e das operações algébricas dos números reais, temos as propriedades a seguir:

a) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, temos

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) Para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais a e b , temos

- $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Exemplo: Determinar o vetor $\vec{w}$ na igualdade

$$3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

se $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Resposta: $\vec{w} = \left(-\frac{7}{2}, 2\right)$

Exemplo: Encontrar a_1 e a_2 tais que

$$\vec{w} = a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v}$$

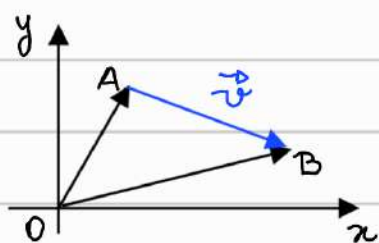
com $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (-1, 8)$.

Resposta: $a_1 = 3$, $a_2 = -1$.

→ Vetor definido por dois pontos.

Muitas vezes, temos um vetor que é representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema.

↳ Seja um vetor $\vec{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$, como representado na figura.



Como vimos, os vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ têm as expressões analíticas

$$\vec{OA} = (x_1, y_1) \quad \text{e} \quad \vec{OB} = (x_2, y_2)$$

Do triângulo OAB , temos: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$. Isolando $\vec{AB}$:

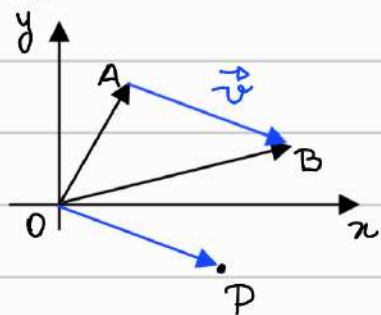
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \quad \longrightarrow \quad \vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$

$$\boxed{\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

isto é, as componentes de $\vec{AB}$ são obtidas subtraindo das coordenadas de B as coordenadas da origem A . Sendo assim, podemos escrever

$$\boxed{\vec{AB} = B - A}$$

- As coordenadas do vetor $\vec{AB}$, calculadas pela diferença $B-A$, não são sempre as mesmas componentes do representante OP com início na origem.



↳ Os segmentos orientados AB e OP são equivalentes.

Exemplo: Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determinar $D(x,y)$ de modo que $\vec{CD} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

Resposta: $D\left(0, \frac{5}{2}\right)$

→ Decomposição no espaço

Até agora, analisamos vetores no plano. Entretanto, podemos estender os conceitos apresentados para o espaço.

↳ No plano, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores, não colineares, é uma base e, portanto, todo vetor $\vec{v}$ neste plano é uma combinação linear dos vetores da base: sempre existem números reais a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$.

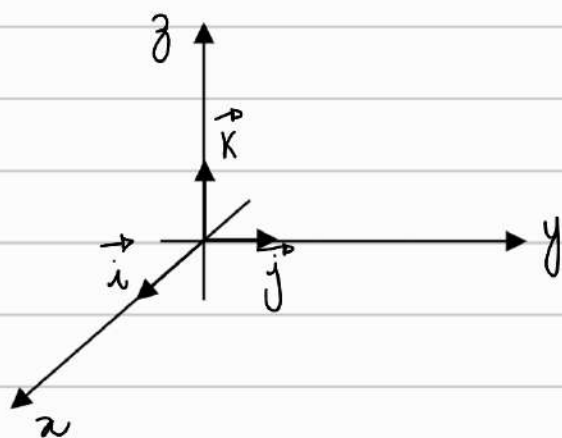
↳ No espaço, qualquer conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de três vetores não coplanares é uma base e todo vetor $\vec{v}$ do espaço pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de base, isto é, sempre exist-

Tem números reais a_1, a_2 e a_3 tais que

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3$$

onde a_1, a_2 e a_3 são as componentes de $\vec{v}$ em relação à base considerada.

Uma base no espaço é ortonormal se os três vetores forem unitários e ortogonais dois a dois. Dentre as infinitas bases ortonormais existentes, vamos utilizar a base canônica, representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



Eixos x (abscissas), y (ordenadas) e z (cotas) são chamados de eixos coordenados.

↳ Cada dupla de eixos determina um plano coordenado. Assim, temos três planos coordenados: xOy ou xy , xOz ou xz e yOz ou yz .

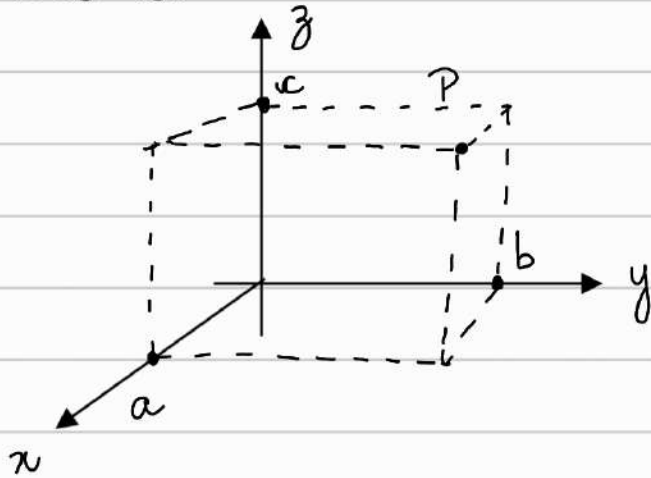
↳ Esses três planos se interceptam segundo os três eixos dividindo o espaço em oito regiões, chamadas de octante.

Cada ponto P do espaço vai corresponder uma terna (a, b, c) de números reais. Esta terna é denominada coordenadas de P .

↳ Para obter a abscissa de P , traçamos por P um plano paralelo ao plano yz e o ponto de in-

Interseção deste plano com o eixo dos x é a coordenada a .

↳ De forma análoga, obtemos as coordenadas b e c .



Exemplos

• $A(2,0,0)$

• $C(0,4,0)$

• $E(0,0,3)$

• $B(2,4,0)$

• $D(0,4,3)$

• $F(2,0,3)$

Na base canônica, um vetor $\vec{v}$ no espaço é escrito por

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Assim como no caso do plano, o vetor $\vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{OP}$, com O sendo a origem $O(0,0,0)$ e $P(x,y,z)$. Desta forma, temos a expressão analítica de $\vec{v}$

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

Exemplos:

• $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \rightarrow \vec{v} = (2, -3, 1)$

• $\vec{i} - \vec{j} = (1, -1, 0)$

• $2\vec{j} - \vec{k} = (0, 2, -1)$

• $4\vec{k} = (0, 0, 4)$

• $\vec{i} = (1, 0, 0)$

• $\vec{j} = (0, 1, 0)$

• $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos $P(x,y,z)$ do espaço e o conjunto de vetores $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Assim, o espaço pode ser interpretado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

↳ Diz-se que o espaço tem três dimensões (tridimensional) porque qualquer uma de suas bases tem três vetores e o número de componentes de um vetor é três.

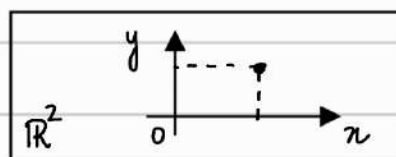
↳ De forma análoga, o plano tem dimensão 2 (bidimensional) e a reta tem dimensão 1 (unidimensional).

O conjunto formado por um ponto e uma base constitui um **sistema referencial**. Em nosso caso, temos o conjunto formado pelo ponto O e pela base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, e ele é denominado **referencial ortogonal de origem O** ou **sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$** . Indicamos este sistema por $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

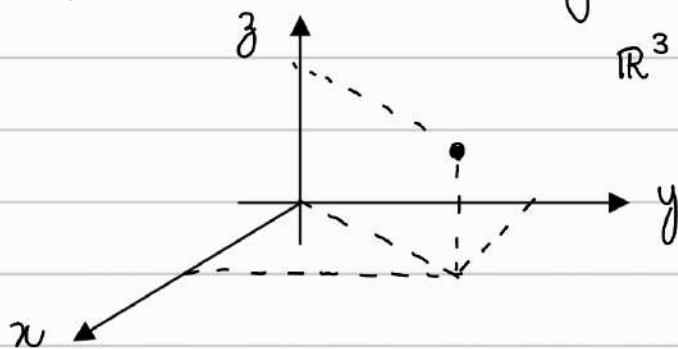
Sabemos que a representação geométrica do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é a reta, chamada de reta real



O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^2$, é o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R}\}$ e sua representação geométrica é o **plano cartesiano** determinado pelos dois eixos cartesianos ortogonais x e y .



O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^3$, é o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Sua representação geométrica é o **espaço cartesiano** determinado pelas três eixos cartesianos, dois a dois ortogonais, Ox , Oy e Oz .



→ Igualdade - Operações - Vetor definido por dois pontos

1) Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

2) Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, define-se

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$a\vec{u} = (ax_1, ay_1, az_1)$$

3) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

→ Condição de paralelismo de dois vetores

Tomos que se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ não colineares (ou paralelos), existe um número K tal que $\vec{u} = K\vec{v}$, isto é,

$$(x_1, y_1, z_1) = K(x_2, y_2, z_2) \quad \text{ou} \quad (x_1, y_1, z_1) = (Kx_2, Ky_2, Kz_2)$$

Pela definição de igualdade de vetores

$$x_1 = Kx_2; \quad y_1 = Ky_2; \quad z_1 = Kz_2$$

o que resulta na condição de paralelismo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Se tal condição for satisfeita $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Exemplo: Mostrar que $\vec{u} = (-2, 3, -4)$ e $\vec{v} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$ não são paralelos.

Exemplos: 4 a 7 do livro (p. 33 a 36)

Dependência linear

→ Dependência e independência linear

Um vetor $\vec{v}$ é paralelo a uma reta r (em um plano π) se existir um representante AB de $\vec{v}$ tal que o segmento AB esteja contido em r (em π)

- O vetor nulo é paralelo a qualquer reta e qualquer plano
- Dois vetores paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si, mas dois vetores paralelos a um mesmo plano podem não ser paralelos.

Definição: Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vetores de V^3 , com $n \geq 1$, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ números reais. Chama-se combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, o vetor

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Se $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, podemos dizer que $\vec{u}$ é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

A partir da definição, temos que o vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ quaisquer que sejam estes vetores. De fato, é sempre possível escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ o que leva a

$$\vec{0} = 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + 0 \vec{v}_n.$$

Proposição 1: Uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$, com $n \geq 2$, é linearmente dependente (LD) se e somente se algum vetor

da sequência for gerado pelos demais.

Corolário 1: a sequência $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se, e somente se, existe um α real tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$, ou existe β real tal que $\vec{v} = \beta \vec{u}$. Além disso, se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, existe $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ tal que $\alpha = 1/\beta$.

Proposição 2: Uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vetores V^3 é **linearmente independente (LI)** se e somente se a equação

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

nas incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ **apenas** admite a solução trivial, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Corolário 2: Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, existem α e β tais que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Corolário 3: Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então todo vetor $\vec{x} \in V^3$ é gerado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}.$$

Exemplos: exercícios 1 e 5 (p. 37) $\rightarrow$ lista
bases canônicas não LI
 $\{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ é LD

→ Base

Definição: Chama-se **base** V^3 a qualquer tripla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ linearmente independente de vetores de V^3 .

Em outras palavras, um conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de vetores de um espaço será uma base desse espaço se

- 1) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é linearmente independente
- 2) Todo vetor no espaço é uma combinação linear dos vetores da base.

Destá última afirmação, temos que para todo vetor $\vec{v}$ pertencente ao espaço, existem escalares a_1, a_2, a_3 , tais que,

$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$$

Conjunto de vetores linearmente dependentes não formam base. Uma forma de identificar se vetores não LD é a partir das proposições a seguir

Proposição 1: Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ não LD se e somente se x_1, y_1, z_1 não proporcionais a x_2, y_2, z_2 .

Proposição 2: Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ não LI se e somente se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

• Explicação: Da condição de independência linear, temos que
 $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Em sistemas de equações, temos

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0 \end{cases}$$

Sabemos que, da teoria de sistemas de equações, quando o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo, temos uma solução única. O sistema apresentado é homogêneo, logo, a solução trivial $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ é uma solução, e se o determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

for não nulo, esta solução trivial é única.

Exemplos: Verificar se os vetores são LI ou LD

- $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$
- $\vec{u} = (1, 7, 1)$ e $\vec{v} = (1/2, 7/2, 1/2)$
- $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, -3, 1)$

Exemplo: Seja uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, mostrar que os vetores

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

formam uma base.

Exemplo: Quais são as coordenadas de $\vec{v} = (1, 0, 0)$ em relação a base $\beta = (\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3)$, com $\vec{\beta}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{\beta}_2 = (-1, 1, 0)$ e $\vec{\beta}_3 = (1, 0, -1)$?

Exemplo: Calcular as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1, 1, 1)_E$ na base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$

$$\text{Resposta: } \vec{v} = \frac{1}{4} \vec{f}_1 - \frac{5}{4} \vec{f}_2 + \frac{7}{4} \vec{f}_3$$

→ Mudança de base

A escolha de uma base conveniente ajuda muitas vezes a resolver um problema simplificando-o. Entretanto, pode acontecer de os vetores já estejam definidos em outra base. Então, precisamos saber uma relação entre as duas bases.

Supomos que temos um vetor relacionado a base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e queremos usar a base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. Então, escrevemos cada vetor de F em termos da base E , isto é,

$$\begin{aligned}
 \vec{f}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\
 \vec{f}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\
 \vec{f}_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

onde a_{ij} são números reais.

Agora, tendo um vetor $\vec{v}$ na base E ,

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)_E$$

queremos $\vec{v}$ em F , ou seja,

$$\vec{v} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = (y_1, y_2, y_3)_F$$

Substituindo os vetores $\vec{f}$ escritos em E na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + \\
 &\quad + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\
 x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\
 x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} //
 \end{aligned}$$

Definição: Dadas as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, podemos escrever

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

Temos que a matriz de mudança de base E para a base F é definida por

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Temos de os elementos a_{11}, a_{21}, a_{31} de

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$

ficam na primeira coluna. De maneira análoga, os elementos de $\vec{f}_2$ ficam na segunda coluna e os elementos de $\vec{f}_3$ ficam na terceira.

Exemplo: Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, com

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 ; \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_3 ; \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

encontrar a matriz mudança de base de E para F .

Resposta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: A matriz de mudança de base da base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ para a base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quais os elementos de F em termos da base E ?

Resposta:

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1 - \vec{e}_3\end{aligned}$$

Proposição: Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ e $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ bases. Então, se $E \xrightarrow{M} F$, $F \xrightarrow{N} G$, temos

$$E \xrightarrow{MN} G$$

Corolário: Se $E \xrightarrow{M} F$, então $F \xrightarrow{M^{-1}} E$.