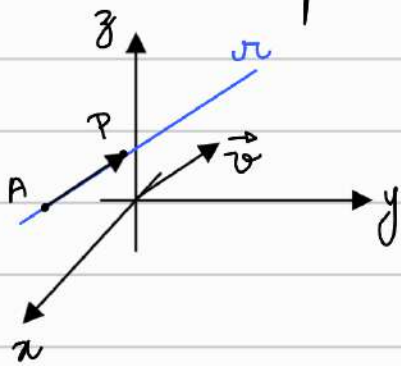


A reta

→ Equação vetorial da reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à reta r , é necessário que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.



Isto é:

$$\overrightarrow{AP} = t \vec{v}$$

$$\text{Ou, } P - A = t \vec{v}$$

$$P = A + t \vec{v} //$$

Em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) //$$

Equação vetorial da reta

onde $P(x, y, z)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$.

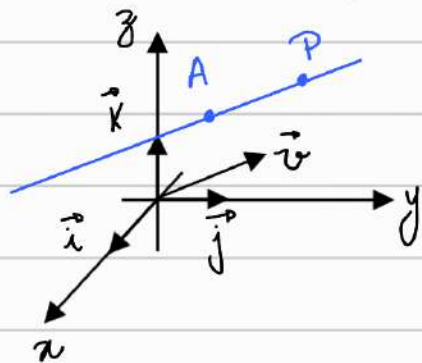
Exemplo: Determinar a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Resposta: $(x, y, z) = (3, 0, -5) + t(2, 2, -1)$

$$t \in \mathbb{R}.$$

→ Equações paramétricas da reta

Sejam $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y, z)$ um ponto genérico, $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto dado, onde ambos pontos pertencem a reta, e o vetor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ com a mesma direção de r .



Da equação vetorial:

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

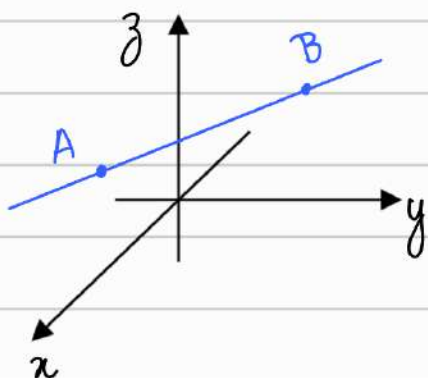
Equações paramétricas da reta r

Exemplo: Equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3, -1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3, -2, 1)$

Resposta:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

→ Reta definida por dois pontos



A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Exemplo: Reta r determinada pelos pontos $A(1, -2, -3)$ e $B(3, 1, -4)$.

$$\vec{v} = \vec{AB} = (2, 3, -1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -4 - t \end{cases}$$

→ Equações simétricas da reta

Isolando o parâmetro t das equações paramétricas da reta, temos

$$t = \frac{x - x_1}{a}, \quad t = \frac{y - y_1}{b}, \quad t = \frac{z - z_1}{c},$$

logo,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Equações simétricas da reta.

Estas equações são denominadas equações simétricas ou normais de uma reta que passa por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo: Equações da reta que passa pelo ponto $A(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1} //$$

↳ Se a reta é determinada pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, as equações simétricas podem ser escritas como

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Exemplo: Reta que passa pelos pontos $A(2, 1, -3)$ e $B(4, 0, -2)$

Resposta: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

• Condição para que três pontos estejam em linha reta

A condição para que três pontos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e $A_3(x_3, y_3, z_3)$ estejam em linha reta é que os vetores

$\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ sejam colineares, isto é



$$\overrightarrow{A_1A_2} = m \overrightarrow{A_1A_3}, \text{ para um } m \in \mathbb{R}$$

Também podemos escrever,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Exemplo: Analisar os pontos $A_1(5, 2, -6)$, $A_2(-1, -4, -3)$ e $A_3(7, 4, -7)$.

Resposta: Os pontos não são colineares.

→ Equações reduzidas da reta

A partir das equações simétricas

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

podemos escrever equações de duas coordenadas em função da terceira. Por exemplo, $y = y(x)$ e $z = z(x)$.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \rightarrow y - y_1 = \frac{b}{a} (x - x_1) \rightarrow y = y_1 + \frac{b}{a} (x - x_1)$$

$$y = \underbrace{y_1 - \frac{b}{a} x_1}_n + \underbrace{\frac{b}{a}}_m x \rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{z-z_1}{c} \rightarrow z-z_1 = \frac{c}{a}(x-x_1) \rightarrow z = z_1 + \frac{c}{a}(x-x_1)$$

$$z = z_1 - \underbrace{\frac{c}{a}x_1}_q + \underbrace{\frac{c}{a}x}_p \rightarrow \boxed{z = px + q}$$

As equações

$$y = mx + n \quad \text{e} \quad z = px + q$$

não denominadas equações reduzidas da reta.

Exemplo: Estabelecer as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos $A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Resposta:

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{2}x + 2 \\ z = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$$

→ Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

As equações da reta

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

representam uma reta r determinada por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e por um vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$.

↳ Sempre consideramos que as componentes do vetor não são diferentes de zero.

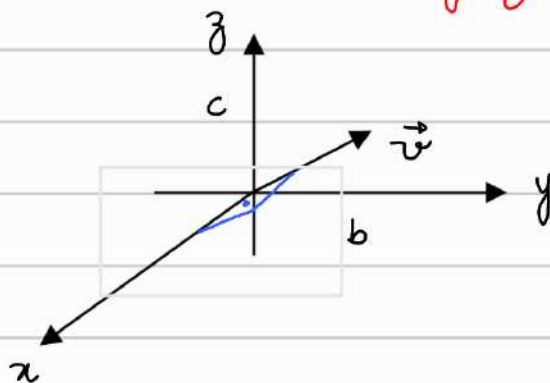
↳ Entretanto, uma ou duas destas componentes podem ser nulas. Assim, temos dois casos:

Caso 1: Uma só das componentes de $\vec{v}$ é nula

Neste caso, o vetor $\vec{v}$ é **ortogonal** a um dos **eixos coordenados** e, portanto, a **reta r** é **paralela** ao **plano** formado pelos outros eixos.

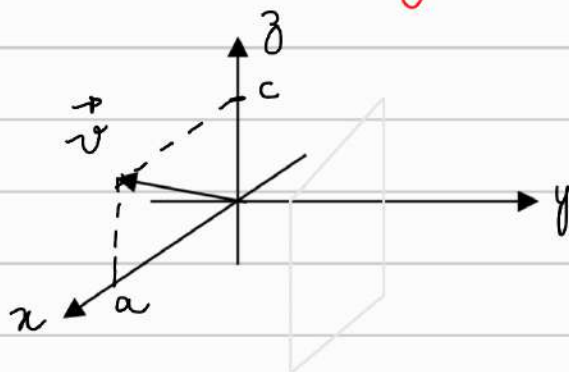
a) Se $a=0$, $\vec{v} = (0, b, c) \perp x$ e $r \parallel yOz$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$



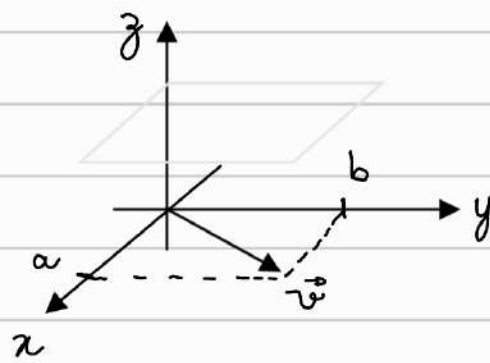
b) Se $b=0$, $\vec{v} = (a, 0, c)$ e $r \parallel xOz$

$$\begin{cases} y = y_1 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$



c) Se $c=0$, $\vec{v} = (a, b, 0)$ e $r \parallel xOy$

$$\begin{cases} z = z_1 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

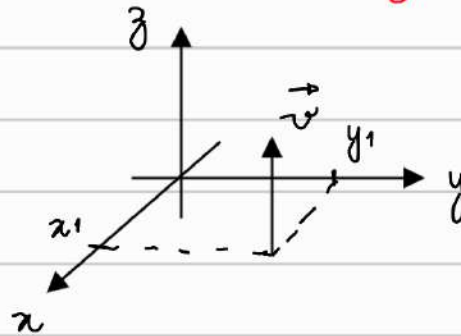


Caso 2: Duas das componentes de $\vec{v}$ não nulas

Neste caso, o vetor tem a direção de um dos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e, portanto, a reta r é paralela ao eixo que tem a direção de $\vec{i}$ ou de $\vec{j}$ ou de $\vec{k}$.

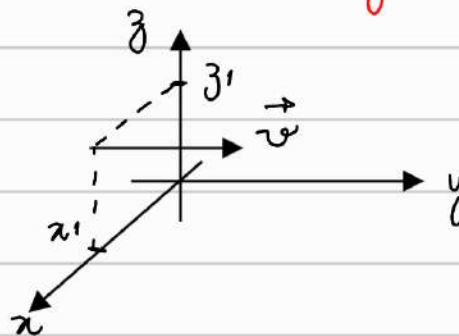
a) Se $a = b = 0$, $\vec{v} = (0, 0, c)$ e $r \parallel Oz$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$



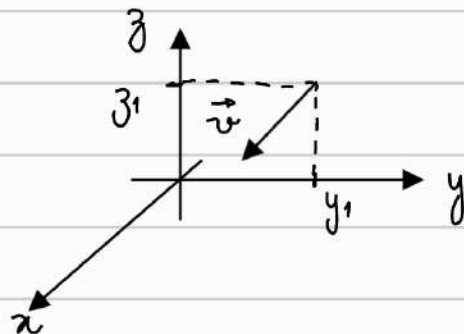
b) Se $a = c = 0$, $\vec{v} = (0, b, 0)$ e $r \parallel Oy$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$



c) Se $b = c = 0$, $\vec{v} = (a, 0, 0)$ e $r \parallel Ox$

$$\begin{cases} y=y_1 \\ z=z_1 \\ x=x_1+at \end{cases}$$



Observações

- Os eixos Ox , Oy e Oz são retas particulares

Eixo Ox : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; Eixo Oy : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$; Eixo Oz : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Exemplos: Determinar as equações da reta que

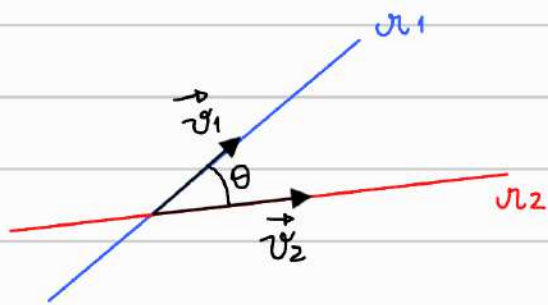
- 1) passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$
- 2) passa pelos pontos $A(1, 0, 9)$ e $B(4, 8, 9)$
- 3) passa pelo ponto $A(0, 3, -2)$ e tem a direção de $\vec{v} = 2\vec{i}$.

→ Ângulo de duas retas

Sejam as retas

r_1 : passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$

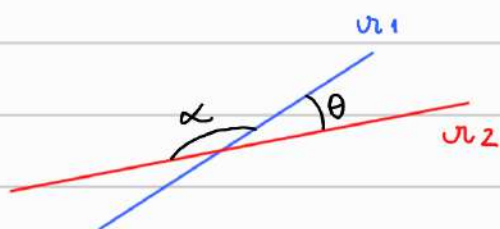
r_2 : passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$



Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2 .

↳ Sendo θ esse ângulo, temos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$



$$\alpha + \theta = 180^\circ \rightarrow \cos \alpha = -\cos \theta$$

α é o ângulo suplementar de θ .

Exemplo: Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

$$\text{e } r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Resposta: 60°

→ Condição de paralelismo de duas retas

A condição de paralelismo das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções dessas retas.

$$\vec{v}_1 = m \vec{v}_2 \longrightarrow$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Exemplo: Analisar as retas r_1 , que passa pelos pontos $A_1(-3, 4, 2)$ e $B_1(5, -2, 4)$, e r_2 , que passa pelos pontos $A_2(-1, 2, -3)$ e $B_2(-5, 5, -4)$.

Resposta: São paralelas

Observações

1) Seja

$$r_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

Qualquer reta r_2 , paralela à reta r_1 , tem parâmetros diretores a_2, b_2, c_2 , proporcionais a a_1, b_1, c_1 .

↳ a_1, b_1, c_1 não são parâmetros diretores de qualquer reta paralela à reta r_1 .

2) Sejam

$$r_1: \begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ z = p_1 x + q_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y = m_2 x + n_2 \\ z = p_2 x + q_2 \end{cases}$$

as direções das retas são dadas por

$$\vec{v}_1 = (1, m_1, p_1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (1, m_2, p_2).$$

Pela condição de paralelismo,

$$\frac{1}{1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

o que leva a $\begin{cases} m_1 = m_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases}$

Assim, as retas

$$r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -4x + 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -4x \end{cases}$$

não são paralelas.

→ Condição de ortogonalidade de duas retas

A condição de ortogonalidade das retas r_1 e r_2 é a mesma dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções destas retas, isto é,

$$\boxed{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0}$$

Exemplo: Calcular o valor de m para que as retas

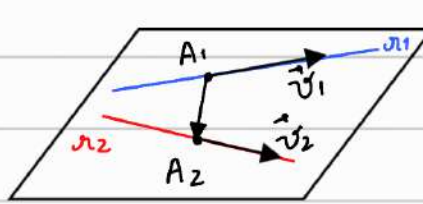
$$r: \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

sejam ortogonais.

Resposta: $m = -8$.

→ Condição de coplanaridade de duas retas

A reta r_1 , que passa por $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção determinada por $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2 , que passa por $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são coplanares se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ forem coplanares.


$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo: Determinar o valor de m para que as retas

$$r_1: \begin{cases} y = mx + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

sejam coplanares.

Resposta: $m = -3$.

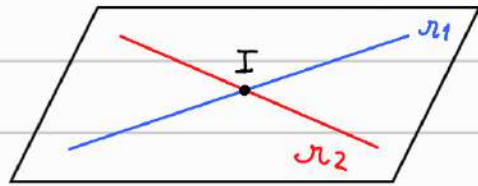
→ Posições relativas de duas retas

Duas retas r_1 e r_2 podem ser

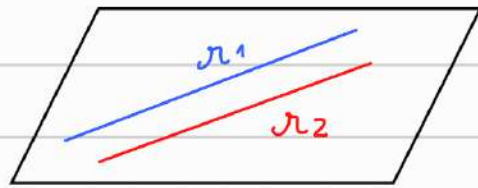
1) Coplanares

Ocorre quando as retas estão situadas no mesmo plano. Neste caso, elas poderão ser

a) Concorrentes: $r_1 \cap r_2 = \{I\}$, onde I é o ponto de interseção das retas r_1 e r_2

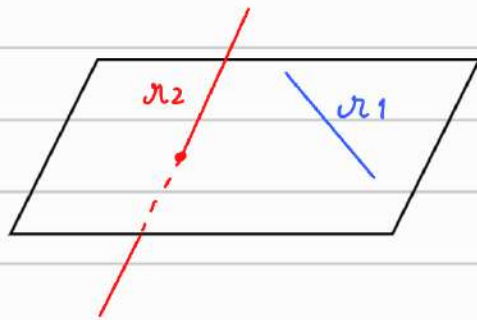


b) Paralelas: $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, onde $\emptyset$ é o conjunto vazio



2) Reversas

Neste caso, as retas não estão situadas no mesmo plano, então $r_1 \cap r_2 = \emptyset$



Lembrando que a condição de coplanaridade de duas retas r_1 e r_2 é

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$$

temos:

a) Se r_1 e r_2 não paralelas, elas não coplanares e

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1 A_2}) = 0$$

b) Se r_1 e r_2 não são paralelas mas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1 A_2}) = 0$, então as retas são concorrentes.

c) As retas r_1 e r_2 são reversas quando

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1 A_2}) \neq 0$$

Exemplo: Estudar a posição relativa das retas

$$r_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}, \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 7-2t \end{cases}$$

Resposta: As retas são concorrentes.

→ Interseção de duas retas

Duas retas r_1 e r_2 que não são coplanares e não paralelas, são retas concorrentes. Sendo assim, há um ponto $I(x, y, z)$ que é o ponto de interseção das duas retas.

↳ Este ponto pertence as duas retas simultaneamente.

Para exemplificar como encontrar I , consideremos as retas

$$r_1: \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

O ponto $I(x, y, z)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \\ x = -t \end{cases} \longrightarrow t = -x$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \\ y = 1 - 2x \\ z = 2x \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$2x = 3x - 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = -3 \cdot (1) + 2$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$z = 2 \cdot (1)$$

$$\boxed{z = 2}$$

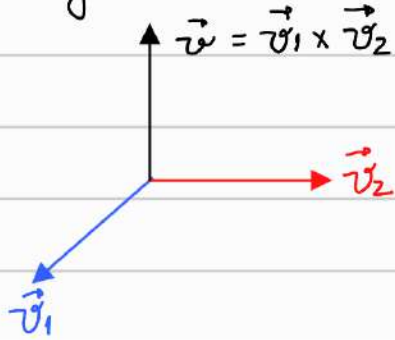
// Ponto de interseção: $I(1, -1, 2)$ //

→ Reta ortogonal a duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções dos vetores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente.

↳ Qualquer reta r , simultaneamente ortogonal

às retas r_1 e r_2 , terá um vetor diretor paralelo ou igual ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.



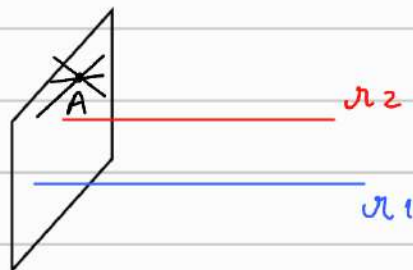
Nestas condições, uma reta estará bem definida quando se conhece um de seus pontos.

Exemplo: Determinar as equações da reta r que passa pelo ponto $A(-2, 1, 3)$ e é ortogonal comum às retas

$$r_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{z}{-1}, \quad y=2$$

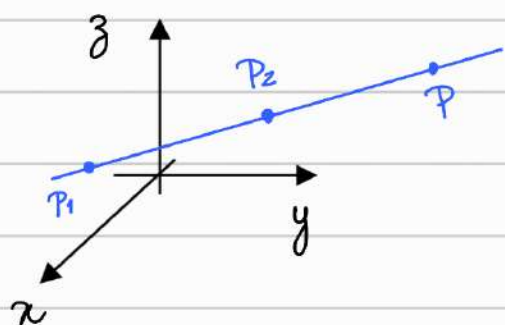
Resposta: $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{6}$

Observação: Se r_1 e r_2 não são paralelas, existem infinitas retas que passam por um ponto A e são ortogonais ao mesmo tempo a elas.



→ Ponto que divide um segmento de reta em uma razão dada

Dados os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, diz-se que um ponto $P(x, y, z)$ divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r se:



$$\overrightarrow{P_1P} = r \overrightarrow{P_2P}$$

Em coordenadas

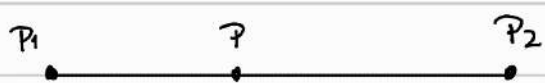
$$(x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k} = r[(x-x_2)\vec{i} + (y-y_2)\vec{j} + (z-z_2)\vec{k}]$$

$$\begin{cases} x-x_1 = r(x-x_2) \\ y-y_1 = r(y-y_2) \\ z-z_1 = r(z-z_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(1-r) = x_1 - rx_2 \\ y(1-r) = y_1 - ry_2 \\ z(1-r) = z_1 - rz_2 \end{cases}$$

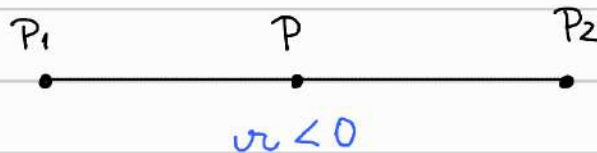
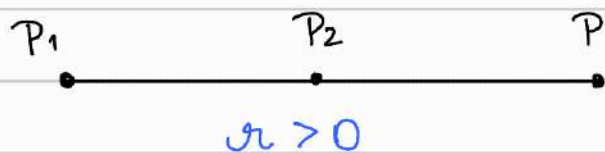
$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1-r}, \quad y = \frac{y_1 - ry_2}{1-r}, \quad z = \frac{z_1 - rz_2}{1-r}$$

onde (x, y, z) são as coordenadas do ponto P .

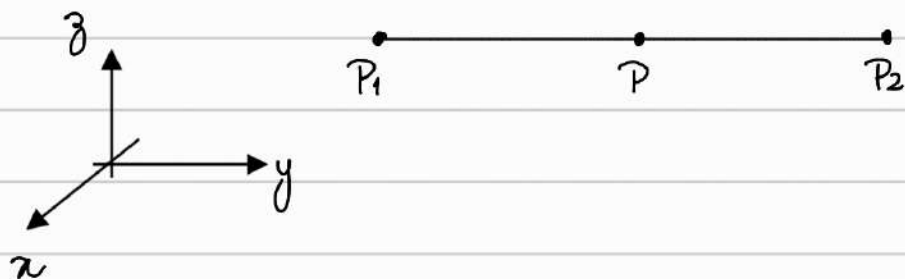
Exemplo: Dados os pontos $P_1(2, 4, 1)$ e $P_2(3, 0, 5)$, determinar $P(x, y, z)$ que divide o segmento P_1P_2 na razão $r = -1/3$



Resposta: $P(9/4, 3, 2)$



→ Ponto que divide um segmento de reta ao meio



No caso de o ponto dividir o segmento de reta P_1P_2 ao meio, temos

$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{PP_2} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P}}$$

Logo, $r = -1$ e as equações de x , y e z são

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}$$