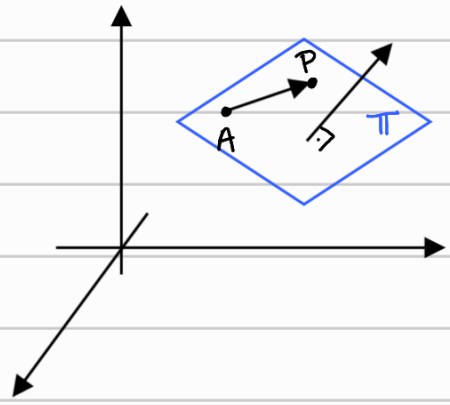
O plano

→ Equação geral do plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $\vec{n} \neq (0,0,0)$, um vetor normal ao plano.

↳ O plano π pode ser definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P(x,y,z)$ do espaço tais que o vetor $\vec{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$.

↳ O ponto pertence a π se



$$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$$

Sendo $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Equação geral do plano π

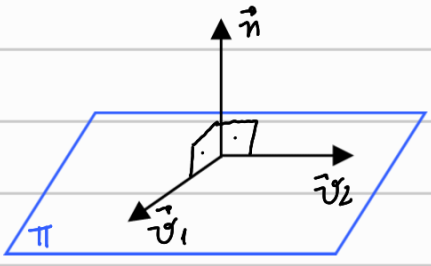
Observações:

1) O plano fica perfeitamente identificado por de seus pontos A e por um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ a π, com a, b, c simultaneamente não nulos. Assim, qualquer

vetor $K\vec{n}$, com $K \neq 0$, também é um vetor normal ao plano.

2) Sendo $\vec{n}$ um vetor ortogonal ao plano π, ele será ortogonal a qualquer vetor representado neste plano.

↳ Em particular, se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são vetores não colineares, e paralelos ao plano, e como $\vec{n}$ é ortogonal, ao mesmo tempo, a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, tem-se:



$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

3) Os três coeficientes a, b e c da equação geral

$$ax + by + cz + d = 0$$

representam as componentes de um vetor normal ao plano.

↳ Se

$$\pi: 3x + 2y - 4z + 5 = 0$$

temos $\vec{n} = (3, 2, -4)$. Este vetor é normal a qualquer plano paralelo a π.

↳ Todos os infinitos planos paralelos a π tem equação geral do tipo

$$3x + 2y - 4z + d = 0$$

onde d é o elemento que diferencia um plano de outro.

Exemplo: Equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2,-1,3)$, com $\vec{n}=(3,2,-4)$ um vetor normal a π.

Resposta: $3x+2y-4z+8=0$

Exemplo: Escrever a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A(3,1,-4)$ e é paralelo ao plano

$$\pi_1: 2x-3y+z-6=0$$

Resposta: $2x-3y+z+1=0$

Exemplo: Estabelecer a equação geral do plano mediador do segmento AB, com $A(2,-1,4)$ e $B(4,-3,-2)$

Resposta: $2x-2y-6z-4=0$.

Exemplo: Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(2,1,-2)$ e é perpendicular à reta

$$r: \begin{cases} x=-4+3t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}.$$

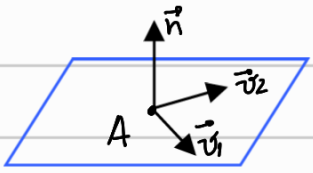
Resposta: $3x+2y+z-6=0$.

→ Determinação de um plano

Para determinar um plano, precisamos de um de seus pontos e um vetor normal a ele. Há algumas formas de obter esses elementos. Assim, existe apenas um

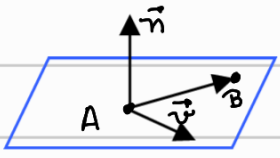
plano que:

1) passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares



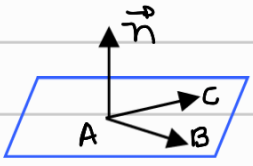
$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

2) passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$ não colinear ao vetor $\overrightarrow{AB}$.



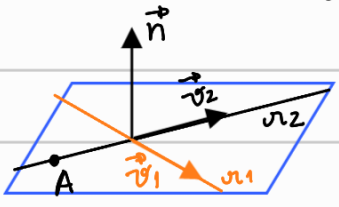
$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$$

3) passa por três pontos A, B e C não em linha reta



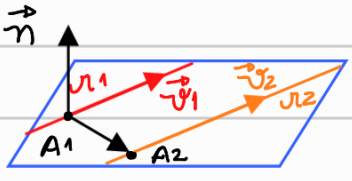
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

4) contém duas retas r_1 e r_2 concorrentes



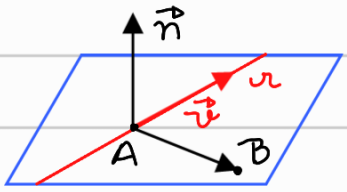
$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times v_2$$

5) contém duas retas r_1 e r_2 paralelas



$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2}$$

6) contém uma reta r e um ponto $B \notin r$



$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$

→ A determinação do vetor $\vec{n}$ ocorre pelo produto vetorial de dois vetores representados no plano
↳ Estes vetores são os vetores-base do plano.

Exemplo: Estabelecer a equação geral do plano determinado pelos pontos $A(2,1,-1)$, $B(0,-1,1)$ e $C(1,2,1)$

Resposta: $3x - y + 2z - 3 = 0$

Exemplo: Estabelecer a equação cartesiana do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$ e o ponto $B(-3,2,1)$

Resposta: $x - 7y + 17 = 0$

→ Planos paralelos aos eixos e aos planos coordenados - Casos particulares

1) Plano que passa pela origem

Se o plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

passa pela origem: $a.0 + b.0 + c.0 + d = 0$

Logo $d = 0$ e

$$\boxed{ax + by + cz = 0}$$

2) Planos paralelos aos eixos coordenados

Se apenas uma das componentes do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é nula, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados, e, portanto, o plano π é paralelo ao mesmo eixo.

a) Se $a = 0$, $\vec{n} = (0, b, c) \perp Ox \Rightarrow \pi \parallel Ox$

$$by + cz + d = 0$$

b) Se $b = 0$, $\vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy \Rightarrow \pi \parallel Oy$

$$ax + cz + d = 0$$

c) Se $c = 0$, $\vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz \Rightarrow \pi \parallel Oz$

3) Planos paralelos aos planos coordenados

Se duas das componentes do vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ são nulas, $\vec{n}$ é colinear a um dos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e, portanto, o plano π

é paralelo ao plano dos outros dois vetores.

a) Se $a=b=0$, $\vec{n}=(0,0,c)=c(0,0,1) \Rightarrow \pi \parallel xOy$

$$cz+d=0 \longrightarrow \boxed{z=K}$$

b) Se $a=c=0$, $\vec{n}=(0,b,0)=b(0,1,0) \Rightarrow \pi \parallel xOz$

$$by+d=0 \longrightarrow \boxed{y=K}$$

c) Se $b=c=0$, $\vec{n}=(a,0,0)=a(1,0,0) \Rightarrow \pi \parallel yOz$

$$ax+d=0 \longrightarrow \boxed{x=K}$$

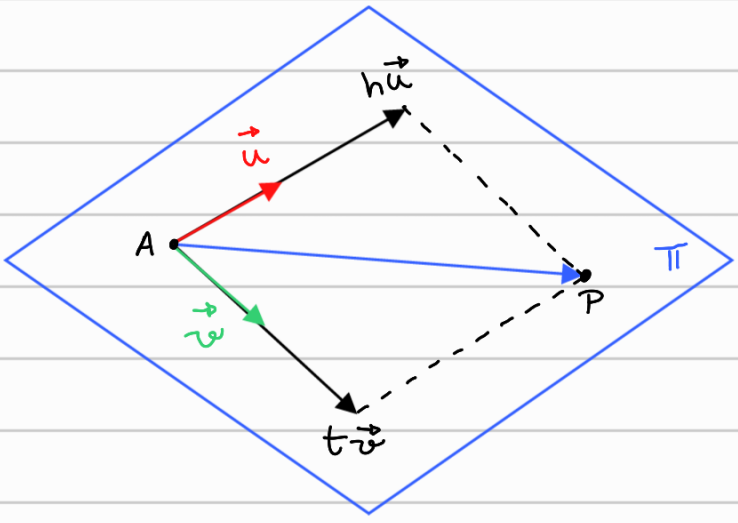
Exemplo: Determinar a equação cartesiana do plano que contém o ponto $A(2,2,-1)$ e a reta

$$r: \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}.$$

Resposta: $x-2y+2=0$.

→ Equações paramétricas do plano

Seja $A(x_0,y_0,z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ e $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ dois vetores não colineares. Um ponto $P(x,y,z)$ pertence ao plano π que passa por A e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se, e somente se, existem números reais h e t tais que



$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

Em coordenadas,

$$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Logo

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + ha_1 + ta_2 \\ y = y_0 + hb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + hc_1 + tc_2 \end{cases}$$

Equações paramétricas do plano

Exemplo: Escrever as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos $A(5,7,-2)$, $B(8,2,-3)$ e $C(1,2,4)$.

Resposta:

$$\begin{cases} x = 5 + 3h - 4t \\ y = 7 - 5h - 5t \\ z = -2 - h + 6t \end{cases}$$

→ Ângulo de dois planos

Sejam os planos

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Então, os vetores normais são $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_2)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Chama-se ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal de π_1 forma com um vetor normal de π_2. Sendo θ esse ângulo:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

- Condição de paralelismo e perpendicularismo de dois planos

As condições de paralelismo e de perpendicularismo de dois planos são as mesmas de seus respectivos vetores normais

1) Se $\pi_1 // \pi_2$, $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ e

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- Se além dessa igualdade, temos

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

os planos são coincidentes.

2) Se $\pi_1 \perp \pi_2$, $n_1 \perp n_2$, e

$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$$

Exemplo: Determinar o ângulo entre os planos

$\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ e $\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0$

Resposta: $\theta = \cos^{-1} \frac{25}{38}$.

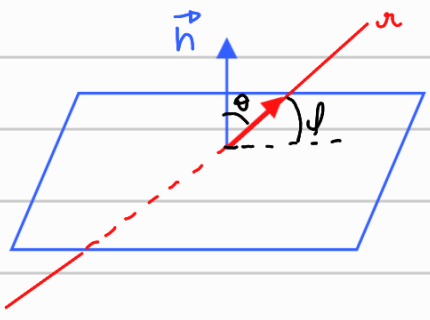
Exemplo: Calcular m e n para que os planos sejam paralelos

$\pi_1: (2m-1)x - 2y + nz - 3 = 0$ e $\pi_2: 4x + 4y - z = 0$

Resposta: $m = -1/2$, $n = 1/2$

→ Ângulo de uma reta com um plano

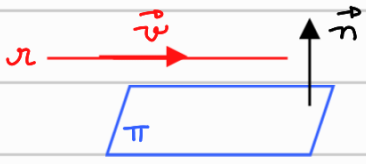
Seja uma reta r com direção do vetor $\vec{v}$ e um plano π com um vetor normal $\vec{n}$



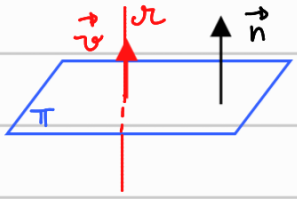
O ângulo φ da reta r com o plano π é o complemento do ângulo θ que a reta r forma com uma reta normal ao plano, isto é, $\theta + \varphi = \pi/2$ e

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}, \qquad 0 \le \theta \le \pi/2$$

- Condições de paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano



1) Se $r \parallel \vec{n}$, $\vec{v} \perp \vec{n}$



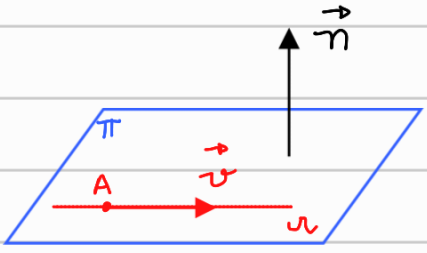
2) Se $r \perp \vec{n}$, $\vec{v} \parallel \vec{n}$

- Condição para que uma reta esteja contida em um plano

Uma reta r está contida em um plano π se

a) o vetor diretor $\vec{v}$ de r é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, normal ao plano π; e

b) um ponto pertencente a r pertence também ao plano



↳ Uma reta r está também contida em um plano π se dois pontos A e B pertencentes a r pertencem a esse plano.

Exemplo: Determinar o ângulo que a reta r forma com o plano π, onde

$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -t \\ z = 3+t \end{cases}$ e $\pi: x + y - 5 = 0$

Resposta: $\varphi = \pi/3$

Exemplo: Verificar se a reta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ é perpendicular ao plano $\pi: 9x - 6y - 3z + 5 = 0$

Resposta: $r \perp \pi$

Exemplo: Determinar os valores de m e n para que a reta

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases}$$

esteja contida no plano $\pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$

Resposta: $m = 3, n = 1$

→ Interseção de dois planos

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r que pertence aos dois planos ao mesmo tempo.

↳ Para determinar a reta, precisamos de um ponto e um vetor ou de dois pontos.

↳ Um ponto pertence à reta interseção se suas

coordenadas satisfazem simultaneamente ao sistema formado pelas equações dos dois planos.

Exemplo: $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$
$\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$

Resposta: $\begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$

• Se atribuirmos valores a x, encontramos pontos particulares da interseção dos planos π_1 e π_2.

→ Interseção de uma reta com um plano

A interseção de uma reta com um plano é um ponto, que pertence à reta e ao plano simultaneamente.

Exemplo: $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{cases}$ e $\pi: 3x + 5y - 2z - 9 = 0$

Resposta: $I(-2, -1, -10)$

• Interseção de plano com os eixos e planos coordenados

a) Interseção com os eixos

Seja o plano

$$\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$$

Como os pontos dos eixos são da forma $(x,0,0)$, $(0,y,0)$ e $(0,0,z)$, basta substituir cada ponto na equação do plano e encontra x, y, z, obtendo as interseções

1) Se $y = z = 0$, $x = 3$ e $A_1(3,0,0)$ é a intersecão com Ox.

2) Se $x = z = 0$, $y = 2$ e $A_2(0,2,0)$ é a interseção com Oy

3) Se $x = y = 0$, $z = 6$ e $A_3(0,0,6)$ é a interseção com Oz

b) Interseção com os planos

Como as equações dos planos coordenados são $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, substituímos estes valores na equação do plano e encontramos uma equação das duas outras variáveis.

1) Se $x = 0$, $3y + z - 6 = 0$, e a reta interseção é

$$r_1: \begin{cases} x = 0 \\ z = 6 - 3y \end{cases}$$

2) Se $y = 0$, $2x + z - 6 = 0$, e a reta interseção é

$$r_2: \begin{cases} y = 0 \\ z = 6 - 2x \end{cases}$$

3) Se $z = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$, e a reta intersção é

$$r_3: \begin{cases} z = 0 \\ y = 2 - \frac{2}{3}x \end{cases}$$

→ Equação segmentária do plano

Se um plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ não é paralelo a nenhum dos planos coordenados (a, b, c não nulos) e não passa pela origem ($d \neq 0$), sua equação pode ser apresentada na forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

onde $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ e $(0, 0, r)$ são os pontos onde π intercepta os eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

Exemplo:

$$\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0 \longrightarrow 2x + 3y + z = 6$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$