

Distâncias

→ Distância entre dois pontos

A distância d entre os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é o módulo do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

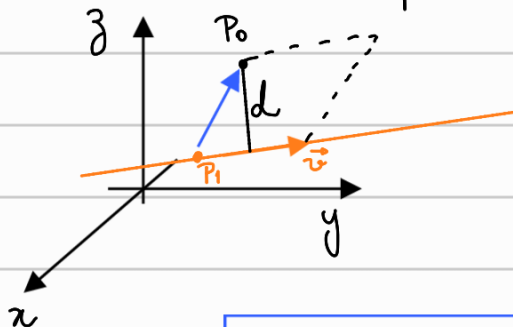
Exemplo: Calcular a distância entre $P_1(7, 3, 4)$ e $P_2(1, 0, 6)$

Resposta: 7 u.c.

→ Distância de um ponto a uma reta

Seja uma reta r definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, e seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço

↳ Os vetores $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_0}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância d de P_0 a r .



Área do paralelogramo

$$A = |\vec{v}|d = |\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$d(P_0, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|}$$

Exemplo: Calcular a distância do ponto $P_0(2,0,7)$ à reta

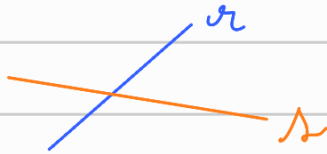
$$v: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Resposta: $d = \frac{\sqrt{872}}{3} \text{ u.c}$

→ Distância entre duas retas

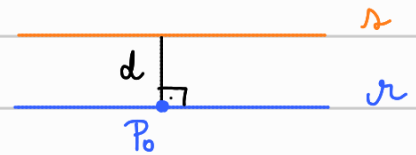
1) Retas concorrentes

A distância d entre duas retas r e s concorrentes é nula, por definição



2) Retas paralelas

A distância d entre as retas r e s paralelas é a distância de um ponto qualquer P_0 de uma das retas à outra reta.



↳ A distância entre duas retas paralelas se reduz ao cálculo da distância de um ponto a uma reta.

Exemplo: Calcular a distância entre as retas

$$r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 2x \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

Resposta: $\sqrt{13}$ u.c.

3) Retas reversas

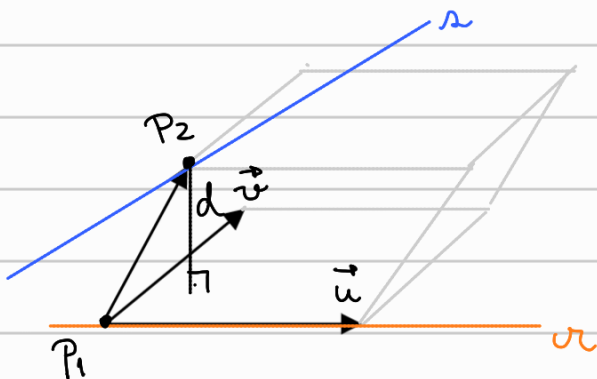
Sejam duas retas reversas:

r : definida pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$

s : definida pelo ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ determinam um paralelepípedo.

↳ A base desse paralelepípedo é definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e a altura corresponde à distância d entre as retas r e s .



$$\text{Volume: } V = |\vec{u} \times \vec{v}| d = |(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})|$$

$$d = \frac{|(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Exemplo: Calcular a distância entre as retas

$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x + 2 = \frac{3-4}{-2} \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

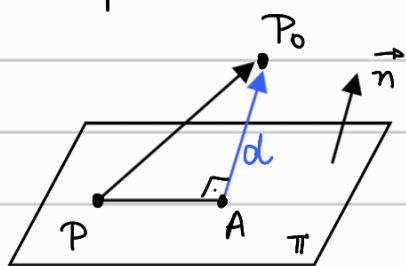
Resposta: $d = \frac{16}{\sqrt{21}}$ u.c

→ Distância de um ponto a um plano

Sejam um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e um plano

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

Sejam A o pé da perpendicular conduzida por P_0 sobre o plano π e $P(x, y, z)$ um ponto qualquer desse plano



$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$\overrightarrow{AP_0} \parallel \vec{n}$$

A distância d do ponto P_0 ao plano π é:

$$d(P_0, \pi) = |\overrightarrow{AP_0}|$$

Observando que o vetor $\overrightarrow{AP_0}$ é a projeção do vetor $\overrightarrow{PP_0}$ na direção de $\vec{n}$, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v} \quad \longrightarrow \quad |\vec{AP}_0| = \left| \frac{\vec{PP}_0 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Temos que:

$$\vec{PP}_0 = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$$

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Substituindo,

$$d = |\vec{AP}_0| = \left| (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$d = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

O ponto P pertence ao plano π :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \longrightarrow \quad d = -ax - by - cz$$

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo: Calcular a distância do ponto $P_0(-4, 2, 5)$ ao plano $\pi: 2x + y + 2z + 8 = 0$.
Resposta: 4 u.c.

→ Distância entre dois planos

A distância entre dois planos é definida somente quando os planos forem paralelos.

Dados dois planos π_1 e π_2 , paralelos, a distância d entre eles é a distância de um ponto qualquer de um dos planos ao outro.

↳ A distância entre dois planos paralelos se reduz ao cálculo da distância de um ponto a um plano.

Exemplo: Calcular a distância entre os planos

$$\pi_1: 2x - 2y + z - 5 = 0$$

e

$$\pi_2: 4x - 4y + 2z + 14 = 0.$$

Resposta: 4 u.c.

→ Distância de uma reta a um plano

A distância de uma reta a um plano é definida somente quando a reta é paralela ao plano.

↳ Dada uma reta r paralela a um plano π , a distância d da reta ao plano é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

↳ Resume-se ao cálculo da distância de um ponto a um plano.