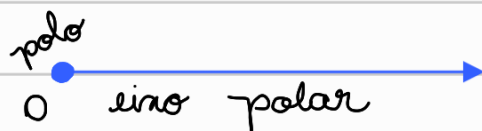


Coordenadas polares

Cit' agora, especificamos a posição de elementos por meio de coordenadas cartesianas. Em algumas situações, é mais conveniente utilizar outro sistema de coordenadas, como o sistema de coordenadas polares.

Para estabelecer um sistema de coordenadas polares no plano, definimos um ponto fixo O , chamado polo, e um raio, uma semi-reta orientada fixa, com origem O , denominada eixo polar.

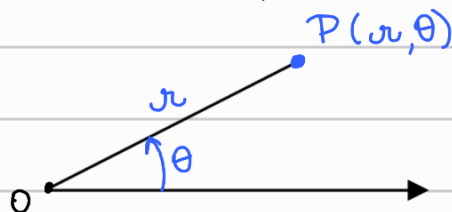
↳ Um ângulo na posição padrão tem vértice no polo O e o eixo polar como seu lado inicial.



Seja P um ponto genérico do plano e seja r a distância entre P e o polo O , assim $r = |OP|$. Se $P \neq O$, então P pertence a uma única semi-reta determinada com origem O , e esta semi-reta se constitui no lado terminal de um ângulo na posição fundamental.

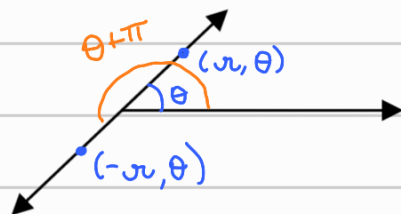
↳ Este ângulo é denotado por θ .

↳ O par ordenado (r, θ) são as coordenadas polares do ponto P , portanto, $P(r, \theta)$



• Se $r=0$ no sistema de coordenadas polares, temos que o ponto (r, θ) coincide com o polo 0.

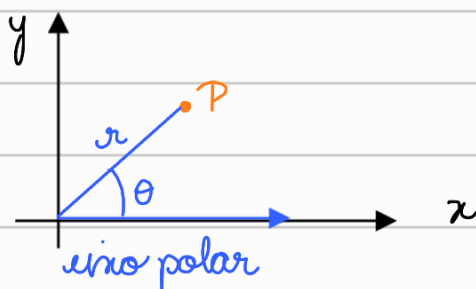
• Se r é **negativo**, conveniona-se que o ponto está localizado a $|r|$ unidades do polo, mas em uma semi-reta oposta a de θ , isto é, sobre o raio $\theta + \pi$.



Com isso, temos: $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$.

→ Conversão de coordenadas

Para estabelecer as coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: cartesianas retangulares e polares, tomamos a origem do primeiro sistema coincidindo com a origem do segundo, o eixo polar com o semi-eixo x positivo e a semi-reta para a qual $\theta = \pi/2$ com o semi-eixo y positivo.



Da figura, temos

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Exemplo: Converta as coordenadas polares para coordenadas cartesianas

- $(4, 30^\circ) \rightarrow (2\sqrt{3}, 2)$
- $(-2, 5\pi/6) \rightarrow (\sqrt{3}, -1)$

Exemplo: Converta as coordenadas cartesianas para coordenadas polares com $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$

- $(2, 2) \rightarrow (2\sqrt{2}, \pi/4)$
- $(5, -5/\sqrt{3}) \rightarrow (10/\sqrt{3}, -\pi/6)$
- $(0, -7) \rightarrow (7, -\pi/2)$

Exemplo: Seja a equação polar $r^2 = 4 \sin 2\theta$, encontre a equação cartesiana.

Resposta: $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

Exemplo: Encontre a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Resposta: $r = 4 \cos \theta$

→ Gráficos de equações em coordenadas polares

• Reta

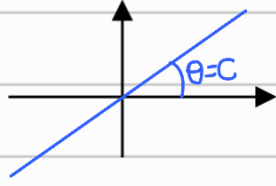
A equação

$$\theta = C$$

onde C é uma constante, é satisfeita por todos os pontos tendo coordenadas polares (r, C) , qualquer que seja

o valor de r .

↳ Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pela origem e faz com o eixo polar um ângulo $\theta = C$.

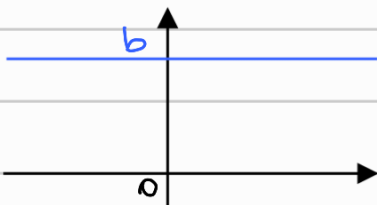


↳ A mesma reta é dada pela equação

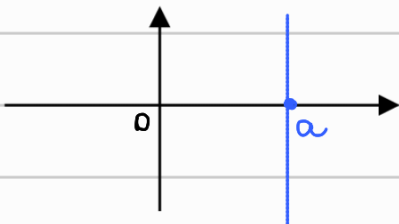
$$\theta = C + K\pi$$

com K sendo um inteiro qualquer

Em geral, a forma polar da equação de uma reta não é tão simples quanto a forma cartesiana. Mas, se a reta for paralela ao eixo polar ou ao eixo $\pi/2$, a equação é mais simples



$$r \sin \theta = b$$



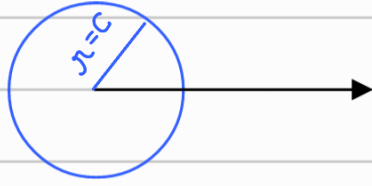
$$r \cos \theta = a$$

Circunferência

O gráfico da equação

$$r = C$$

onde C é uma constante qualquer, é uma circunferência cujo centro está na origem e cujo raio é $|C|$. A mesma circunferência é dada pela equação $r = -C$.



Caso o centro da circunferência não esteja na origem, sua equação polar torna-se mais complicada. Mas há alguns casos particulares de interesse.

↳ Se uma circunferência contém a origem (o polo) e o seu centro está em (a, b) , a equação cartesiana será

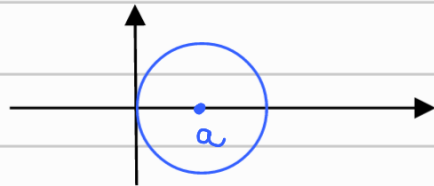
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

e a equação polar é

$$r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$$

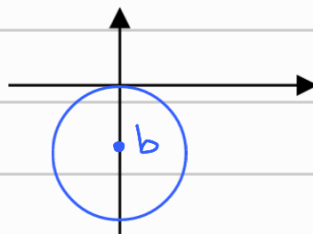
Quando $b = 0$,

$$r = 2a \cos \theta$$



Se $a = 0$,

$$r = 2b \sin \theta$$



• Limacon

O gráfico de uma equação da forma

$$r = a \pm b \cos \theta \quad \text{ou} \quad r = a \pm b \sin \theta$$

é uma limacon. Existem quatro tipos de limacon e cada tipo depende da razão a/b , onde a e b são positivos.

Limacon com um laço: $0 < \frac{a}{b} < 1$

Cardioides: $\frac{a}{b} = 1$

Limacon com um dente: $1 < \frac{a}{b} < 2$

Limacon convexa: $2 \leq \frac{a}{b}$

• Rosácea

O gráfico de uma equação da forma

$$r = a \cos n\theta \quad \text{ou} \quad r = a \sin n\theta$$

é denominado rosácea com n folhas se n for ímpar e $2n$ folhas se n for par.

• Espirais

A curva

$$r = a\theta$$

para $\theta \geq 0$ é conhecida como espiral de Arquimedes.

A curva

$$r = e^{a\theta}$$

é denominada espiral logarítmica.

• Lemniscata

A equação de uma lemniscata é dada por

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{ou} \quad r^2 = a^2 \sin 2\theta.$$

Mudança de coordenadas

As vezes é conveniente mudar de sistema de coordenadas de um sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ adotado inicialmente para outro $(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

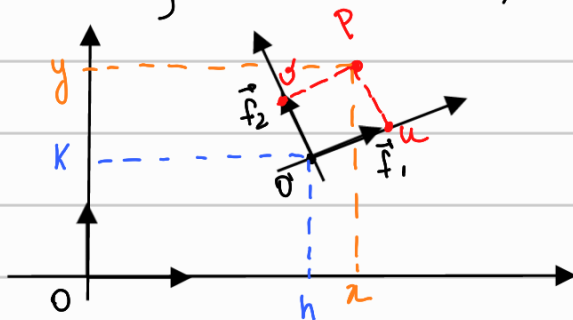
↳ O problema central é estabelecer relações entre as coordenadas "antigas" e as "novas".

→ Mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$

Sejam $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ dois sistemas de coordenadas cartesianas. Utilizando x e y para indicar as coordenadas de um ponto P qualquer no sistema Σ_1 e h e k são as coordenadas de O' em relação a Σ_1 , isto é,

$$O'(h, k)_{\Sigma_1}$$

Semelhante à mudança de base, temos



$$\text{Então: } \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \text{ e } \vec{O'P} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$$

$$\vec{OO'} = h\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$$

$$\text{Sendo } \vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \text{ e } \vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2, \text{ temos}$$

$$\vec{OP} = u(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) + v(c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2)$$

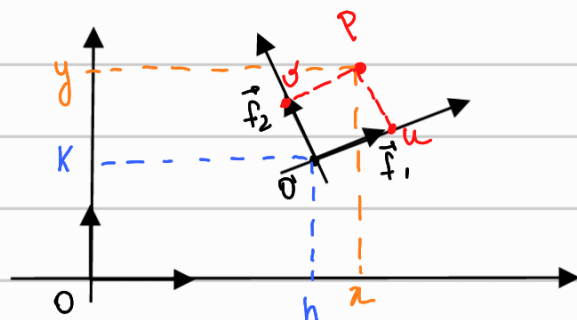
$$(x-h, y-k) = (ua + vc)\vec{e}_1 + (ub + vd)\vec{e}_2$$

$$x-h = ua + vc$$

$$y-k = ub + vd$$

Então

$$\begin{aligned} x &= h + ua + vc \\ y &= k + ub + vd \end{aligned}$$



onde $O'(h, k) \in \Sigma_1$, $P(u, v) \in \Sigma_2$, $\vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ e $\vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$

→ Mudança de coordenadas no $\mathbb{R}^3$

Sejam dois sistemas de coordenadas cartesianas $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $\Sigma_2 = (O', \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. As coordenadas de um ponto P em relação a Σ_1 são x, y, z e de O' a Σ_1 são h, k, m .

Expressando cada vetor de Σ_2 no sistema Σ_1 :

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$

$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

e o ponto P em Σ_2 : $P(u, v, w)$.

A relação entre as coordenadas $P(x, y, z) \in \Sigma_1$ e $P(u, v, w) \in \Sigma_2$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y &= k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z &= m + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{aligned}$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

- Coordenadas da origem O' em Σ_1
- Matriz formada pelas componentes de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ nos vetores base de Σ_1
- Coordenadas do ponto P em Σ_2 .

Exemplo: Equações da mudança de coordenadas onde $O'(1,2,-1)_{\Sigma_1}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

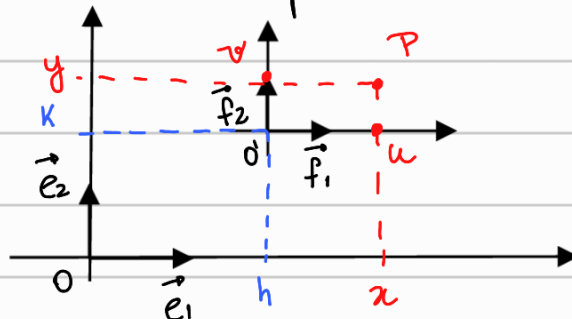
Resposta:

$$\begin{cases} x = 1 + u + w \\ y = 2 + 2w \\ z = -1 + v - w \end{cases}$$

→ Rotações e translações

• Translações

Para este caso, temos que $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$ e $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$



Logo,

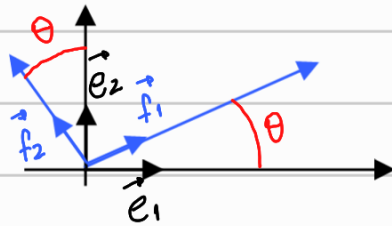
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as equações de mudança de coordenadas se tornam

$$\begin{aligned} x &= h + u \\ y &= k + v \end{aligned}$$

• Rotações

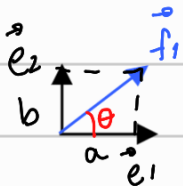
Nesse caso, $0 = 0'$ e $h = k = 0$



$$\begin{aligned} x &= h + ua + vc \\ y &= k + ub + vd \end{aligned}$$

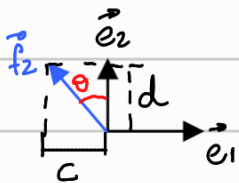
$$\longrightarrow \begin{aligned} x &= au + cv \\ y &= bu + dv \end{aligned}$$

Lembrando que $\vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ e $\vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$



$$a = |\vec{f}_1| \cos \theta = \cos \theta$$

$$b = |\vec{f}_1| \sin \theta = \sin \theta$$



$$c = -|\vec{f}_2| \sin \theta = -\sin \theta$$

$$d = |\vec{f}_2| \cos \theta = \cos \theta$$

Então,

$$x = \cos \theta u - \sin \theta v$$

$$y = \sin \theta u + \cos \theta v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

matriz de rotação

Exemplo: Escrever as equações da rotação para:

$$\bullet \theta = \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -u \\ y = -v \end{cases}$$

$$\bullet \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -v \\ y = u \end{cases}$$

$$\bullet \theta = -\pi/4 \Rightarrow \begin{cases} x = u \sqrt{2}/2 + v \sqrt{2}/2 \\ y = -u \sqrt{2}/2 + v \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

Equações paramétricas

Em vez de descrever uma curva expressando a ordenada de um ponto $P(x, y)$ da curva em função de x , às vezes é mais conveniente descrever a curva expressando ambas as coordenadas em função de uma terceira variável t .

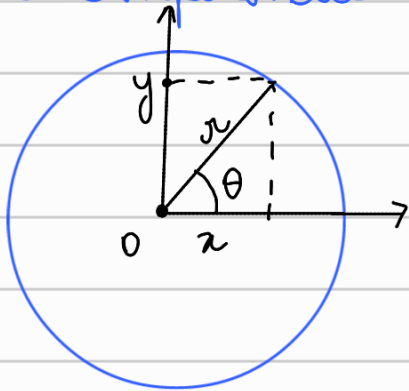
Fizemos isso anteriormente no caso da reta e do plano:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$$

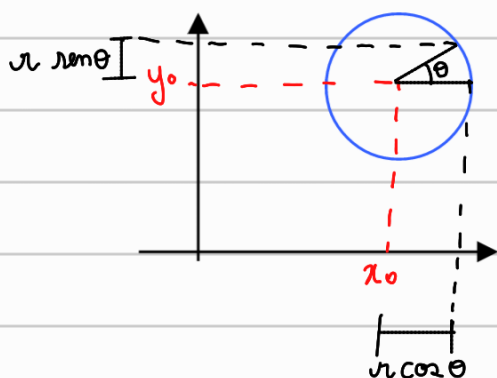
Podemos fazer isso para outras curvas

→ Circunferência



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\theta \in \mathbb{R}$$



$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \theta \\ y &= y_0 + r \sin \theta \end{aligned}$$

Exemplo: Parametrizar o círculo $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$

Resposta:
$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t \\ y = 3 + 5 \sin t \end{cases}$$

→ Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Caso o centro da elipse esteja em (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases}$$

Exemplo: Parametrize a elipse $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$

Resposta:
$$\begin{cases} x = 1 + 4 \cos t \\ y = 2 + 2 \sin t \end{cases}$$

→ Outras curvas

• Cicloide:
$$\begin{aligned} x &= r(\theta - \sin \theta) \\ y &= r(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

• Conchoides de Nicomedes:
$$\begin{aligned} x &= a + \cos t \\ y &= a \tan t + \sin t \end{aligned}$$

Em geral, se precisarmos traçar uma equação do tipo $x = g(y)$, podemos escolher

$$x = g(t), y = t$$

Se a equação for do tipo $y = f(x)$ podemos parametrizar como

$$x = t, y = f(t)$$

Exemplo: Parametrizar $x = y^4 - 3y^2$

Resposta: $y = t, x = t^4 - 3t^2$

Exemplo: Suponha que um projétil seja disparado da origem no instante $t = 0$ com uma velocidade inicial de grandeza v_0 m/s. e ângulo de elevação α . Supondo que a única força que atua sobre o projétil é a força da gravidade. Como é seu movimento.

Resposta: $a_x = 0, a_y = -g$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$
$$x = (v_0 \cos \alpha)t, y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$