

Superfícies Quádricas

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero, representa uma **superfície quádrlica** ou simplesmente, **quádrlica**.

→ Se a superfície quádrlica for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma **cônica**.

↳ A interseção de uma superfície com um plano é chamada **traço** da superfície no plano.

↳ Por exemplo, o traço da superfície quádrlica no plano $z=0$ (plano xOy) é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

contida no plano $z=0$.

A partir de mudanças de coordenadas, a superfície quádrlica pode ser transformada em uma das formas:

$$1) Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

que representa uma quádrica centrada, ou

$$\begin{aligned} 2) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned}$$

que representa uma quádrica não centrada.

→ Superfícies quádricas centradas

Se nenhum dos coeficientes de

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

for nulo, a equação pode ser escrita como

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é a forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam três, dois ou um o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação.

↳ Se todos os coeficientes forem negativos, não existe lugar geométrico.

1) Elipsoide

O elipsoide é a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde todos os coeficientes dos termos do 1º membro são positivos.

↳ a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsoide.

O traço da superfície em cada plano ordenado não são as elipses

$$\bullet \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{em } z=0 \text{ (plano } xOy)$$

$$\bullet \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{em } y=0 \text{ (plano } xOz)$$

$$\bullet \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{em } x=0 \text{ (plano } yOz)$$

Se pelo menos dois dos valores a, b, c não iguais, o elipsoide é de revolução.

↳ Por exemplo, se $a = c$, o elipsoide é obtido girando a elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad x=0$$

do plano yOz em torno do eixo dos y .

Exemplo: Elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

com $a=c$, é obtido girando a elipse

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad x=0$$

em torno do eixo Oy .

→ No caso de $a=b=c$, a superfície quádrlica tem a forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e representa uma **superfície esférica** de centro $(0,0,0)$ e raio a .

→ Consideramos agora um plano paralelo ao plano xOy , isto é, um plano da forma $z=K$. Substituindo z por K na equação da quádrlica, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{K^2}{c^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{K^2}{c^2}$$

- Se $|K| < c$, $1 - K^2/c^2 > 0$ e, portanto, o traço no plano $z=K$ é uma elipse.
- Se $|K| = c$, os planos $z=c$ e $z=-c$ tangenciam o elipsoide nos pontos $(0,0,c)$ e $(0,0,-c)$
- Se $|K| > c$, $1 - K^2/c^2 < 0$ e, consequentemente, não existe gráfico.

↳ Considerações análogas podem ser feitas relativamente aos paralelos aos planos xOz e yOz .

Se o centro do elipsoide é o ponto (h, K, l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação da quádrlica assume a forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-K)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

obtida a partir de uma translação de eixos.

↳ Assim, a superfície esférica de centro (h, K, l) e raio a , tem equação

$$(x-h)^2 + (y-K)^2 + (z-l)^2 = a^2.$$

2) Hiperbolóide de uma folha

Se na equação na forma padrão de uma quádrlica dois termos do 1º membro são positivos e um é negativo, a equação representa um hiperbo-

loide de uma folha.

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z .

↳ As outras duas formas canônicas são:

$$\bullet \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo Oy

$$\bullet -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo Ox .

Considerando a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tem os traços

$$\bullet \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{elipse em } z=0$$

$$\bullet \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{hipérbole em } y=0$$

$$\bullet \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{hipérbole em } x=0$$

→ Um traço no plano $z=k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy .

↳ Os traços nos planos $x=k$ e $y=k$ não são hipérbolas.

Se na equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$a=b$, o hiperboloide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário.

↳ O traço no plano xOy é uma circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad z=0$$

3) Hiperboloide de duas folhas

Se na equação de quádrlica centrada, apenas um dos coeficientes dos termos do 1º membro é positivo, a equação representa um hiperboloide de duas folhas.

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo dos y . As outras duas formas canônicas não

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz , respectivamente.

Os traços de $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, nos planos xOy e yOz não, respectivamente, as hipérboles

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad z=0 \quad (\text{plano } xOy)$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x=0 \quad (\text{plano } yOz)$$

O plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y=K$, onde $|K| < b$.

↳ Se $|K| > b$, o traço no plano $y=K$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{K^2}{b^2} - 1, \quad y=K$$

Os traços nos planos $x=K$ e $z=K$ não hipérboles.

Se $a=c$ na equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real.

↳ O traço no plano $y=K$, $|K|>b$, é a circunferência

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{K^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y=K \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{K^2}{b^2} - 1, y=K$$

→ Superfícies quádricas não centradas

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1º membro das equações

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 ; Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0 ; Rx + By^2 + Cz^2 = 0$$

for nulo, elas podem ser escritas sob uma das formas

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz ; \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by ; \quad \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

denominadas forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois

tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

1) Parabolóide elíptico

Se nas equações acima os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um **parabolóide elíptico**.

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo dos z .

↳ As outras duas formas canônicas são

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

que representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos Oy e Ox , respectivamente.

O traço de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

no plano xOy é a origem $(0,0,0)$ e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz, y=0 \quad ; \quad \frac{y^2}{b^2} = cz, x=0$$

respectivamente.

↳ Se $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície está inteiramente abaixo deste plano. Assim, temos que o sinal de c e z coincidem.

↳ Um traço no plano $z=K, K > 0$, é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano xOy .

↳ Os traços nos planos $x=K$ e $y=K$ são parábolas.

Se $a=b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola

$$\frac{y^2}{b^2} = cz; \quad x=0$$

em torno do eixo Oz .

↳ Neste caso, o traço no plano $z=K$ é uma circunferência.

2) Parabolóide hiperbólico

Se nas equações das quádricas não centradas os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem

signais contrários, a equação representa um **parabolóide hiperbólico**.

A equação

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

é uma **forma canônica** da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z .

↳ As outras formas canônicas são

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

e representam parabolóides hiperbólicos situados ao longo dos eixos Oy e Ox , respectivamente.

O traço de

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

no plano xOy ($z=0$) é o par de retas

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0, \quad z=0$$

isto é,

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0, \quad z=0 \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0, \quad z=0$$

Nos planos xOz e yOz , os traços são as parábolas

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz, y=0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = cz, x=0$$

que têm o eixo Oz como eixo de simetria e concavidade para baixo e para cima, respectivamente.

↳ O traço no plano $z=k$ é uma hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo dos y se $k > 0$ e paralelo ao eixo dos x se $k < 0$.

↳ Os traços nos planos $x=k$ e $y=k$ são parábolas.

→ Superfície cônica

Superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada em uma curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.

↳ A reta é denominada **geratriz**, a curva plana é a **diretriz** e o ponto fixo dado é o **vértice** da superfície cônica.

Vamos considerar o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados. Nestas condições, a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

↳ O traço no plano xOy é o ponto $(0,0,0)$

↳ O traço no plano yOz tem equações

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, x=0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0, x=0$$

Assim, obtemos duas retas que passam pela origem

$$y = \frac{b}{c} z, x=0 \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{c} z, x=0$$

↳ O traço no plano xOz , de forma análoga, é constituído por duas retas que passam pela origem.

↳ Os traços nos planos $z=k$ são elipses e, se $a=b$, são circunferências.

↳ Neste caso, temos a superfície cônica circular reta.

↳ Os traços no plano $x=k$ e $y=k$ são hipérbolas.

As superfícies cônicas cujos eixos não os eixos dos x e dos y , tem equações

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \text{respectivamente.}$$

→ Superfície cilíndrica

Seja C uma curva plana e f uma reta fixa não contida nesse plano.

↳ Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta r que se move paralelamente à reta fixa f em contato permanente com a curva plana C .

↳ A reta r é denominada **geratriz** e a curva C é a **diretriz** da superfície cilíndrica.

Aqui, vamos considerar apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra em um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Assim, a equação da superfície cilíndrica é a mesma de sua diretriz.

↳ Se a diretriz for a parábola

$$x^2 = 2y$$

a equação da superfície cilíndrica também será

$$x^2 = 2y.$$

Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica.

Em geral, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma

superfície cilíndrica cujas diretrizes são paralelas ao eixo da variável ausente e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano correspondente.

↳ Por exemplo, a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo dos y , sendo a diretriz uma elipse no plano xOz .